UỶ BAN NHÂN DÂN TỈNH NINH BÌNH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ

ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ
CẤP TRƯỜNG

MỘT SỐ ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRONG KHÔNG GIAN METRIC ĐẦY VÀ ỨNG DỤNG

Chủ nhiệm đề tài: Đặng Thị Thu Hiền
Đơn vị công tác: Khoa Tự nhiên

Ninh Bình, tháng 5 năm 2017

UỶ BAN NHÂN DÂN TỈNH NINH BÌNH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ

ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ
CẤP TRƯỜNG

MỘT SỐ ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRONG KHÔNG GIAN METRIC ĐẦY VÀ ỨNG DỤNG

Chủ nhiệm đề tài: Đặng Thị Thu Hiền
Các thành viên: Lê Thị Hồng Hạnh
Đinh Bích Hảo

Ninh Bình, tháng 5 năm 2017

TIN CHUNG VỀ ĐỀ TÀI

1. Tên đề tài: Một số định lý điểm bất động trong không gian metric đầy và ứng dụng.

2. Lĩnh vực nghiên cứu: Khoa học Tự nhiên.

3. Thời gian thực hiện: Từ tháng 9/ 2016 đến tháng 5/2017.

4. Chủ nhiệm đề tài: Đặng Thị Thu Hiền, Khoa Tự nhiên - Trường Đại Học Hoa Lư.

5. Các thành viên tham gia:

Lê Thị Hồng Hạnh, Khoa Tự nhiên - Trường Đại học Hoa Lư.

Đinh Thị Bích Hảo, Khoa Tự nhiên - Trường Đại Học Hoa Lư.

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài

Các định lý điểm bất động là các câu trả lời cho một bài toán tổng quát sau đây: Cho C là một tập con của không gian$X$, f là một ánh xạ từ C vào X. Phải đặt những điều kiện nào trên C, X và f để có thể khẳng sự tồn tại của một điểm x_0 trong C sao cho $f(x_0) = x_0$. Điểm x_0 như vậy gọi là điểm bất động của ánh xạ f.

Đến nay, lý thuyết điểm bất động đã ra đời khoảng một thế kỷ. Những định lý điểm bất động nổi tiếng đã xuất hiện từ đầu thế kỷ 20, trong đó phải kể đến nguyên lý điểm bất động Brouwer (1912) và nguyên lý ánh xạ co Banach (1922).

Nguyên lý ánh xạ co Banach (1922) là kết quả khởi đầu cho lý thuyết điểm bất động của ánh xạ dạng co, tức là ánh xạ thoả mãn $d\big(f(x), f(y)\big) \leq kd(x, y)$ nhưng k có thể không phải là hằng số của ánh xạ co mà $k = 1$, hoặc k là một số dương tuỳ ý, hay $k = k\big(d(x, y)\big)$ là một hàm số bị chặn, ... Những nghiên cứu dạng này hiện đang rất sôi động, được sự quan tâm nghiên cứu của các nhà toán học trong và ngoài nước.

Với mong muốn làm rõ một số kết quả đạt được trong [6], [7], xây dựng một số định lí điểm bất động theo hướng nghiên cứu như trên bằng cách xét trong không gian mạnh hơn (không gian siêu metric đầy), và nghiên cứu các ứng dụng của chúng, nhất là ứng dụng nguyên lý ánh xạ co Banach trong các bài toán về dãy số, về phương trình mà chúng tôi nhận thấy hầu như chưa có tài liệu hiện hành nào viết một cách có hệ thống, sâu sắc. Chúng tôi đã lựa chọn đề tài " Một số định lý điểm bất động trong không gian metric đầy và ứng dụng" .

2. Tổng quan tình hình nghiên cứu thuộc lĩnh vực của đề tài

Lý thuyết điểm bất động đang thu hút sư quan tâm của đông đảo các nhà toán học trong và ngoài nước theo nhiều hướng nghiên cứu khác nhau, như: mở rộng lớp ánh xạ, thay đổi không gian: mở rộng không gian hoặc làm mạnh không gian. Nghiên cứu theo hướng mở rộng lớp ánh xạ, ở ngoài nước phải kể đến B.E. Rhoades, Binayak S. Choudhury*, M.A.

Geraghty, J.J.Neito, R.R. Lopez, với các công trình được công bố trong [5], [6], [7]...Ở trong nước nghiên cứu theo hướng này phải kể đến TS. Nguyễn Thị Thanh Hà, TS. Đỗ Hồng Tân, ...

3. Mục tiêu và nhiệm vụ nghiên cứu

- Xây dựng một số định lý điểm bất động trong không gian metric đầy của lớp ánh xạ Lipschitz, lớp ánh xạ co, lớp ánh xạ co yếu.

- Nghiên cứu một số ứng dụng của nguyên lý ánh xạ co Banach trong Toán học cao cấp và Toán học sơ cấp.

- Xây dựng một số bài toán liên quan đến điểm bất động.

4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

• **Đối tượng nghiên cứu:** Ánh xạ Lipschitz, ánh xạ co, ánh xạ co yếu; không gian metric đầy, không gian siêu metric đầy.

• **Phạm vi nghiên cứu:**

+ Định lý về sự tồn tại, duy nhất điểm bất động của các lớp ánh xạ trên trong không gian metric đầy, không gian siêu metric đầy.

+ Ứng dụng của các kết quả trên trong Toán học cao cấp và Toán học sơ cấp.

5. Cách tiếp cận và phương pháp nghiên cứu

• **Cách tiếp cận:** Dùng công cụ giải tích nghiên cứu sự tồn tại, duy nhất điểm bất động của lớp ánh xạ co, lớp ánh xạ co yếu, lớp ánh xạ Lipschitz trong không gian metric đầy, không gian sieu metric đầy. Trên cơ sở các kết quả thu được, nghiên cứu ứng dụng của chúng trong Toán học cao cấp và Toán học sơ cấp.

• **Phương pháp nghiên cứu:** Nghiên cứu lý thuyết.

Chương 1

Một số kiến thức cơ bản

Trong chương này chúng tôi sẽ trình bày những kiến thức cơ bản của không gian metric: định nghĩa không gian metric, sự hội tụ trong không gian metric, không gian metric đầy, không gian metric compat, các không gian metric được sử dụng ở trong chương 3 cũng được chúng tôi đưa vào. Ngoài ra chúng tôi còn trình bày về không gian siêu metric.

1.1 Định nghĩa không gian metric

1.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.1.1. *Giả sử X là một tập khác rỗng. Hàm số $d : X \times X \to \mathbb{R}$ được gọi là một metric hay một khoảng cách trên X nếu các tính chất sau được thoả mãn:*
M_1) $d(x, y) \geq 0$ với mọi $x, y \in X$ và $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
M_2) $d(x, y) = d(y, x)$ với mọi $x, y \in X$
M_3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ với mọi $x, y, z \in X$ (Bất đẳng thức tam giác)

Nếu d là một metric trên X thì ta cặp (X, d) được gọi là một không gian metric. Đôi khi ta viết " không gian metric X" thay cho không gian metric (X, d). Mỗi phần tử của X gọi là một điểm. Số $d(x, y)$ gọi là metric hay khoảng cách giữa hai điểm x và y.

Nhận xét 1.1.2. *Từ các tính chất trên dễ dàng suy ra với 4 điểm*

$x, y, z, t \in X$ ta có

$$|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z)$$
$$|d(x,y) - d(z,t)| \leq d(x,z) + d(y,t)$$

1.1.2 Ví dụ

Ví dụ 1.1.3. *Cho X là một tập khác rỗng bất kì. Hàm số d xác định trên $X \times X$ được cho bởi:*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x = y \\ 1 & \text{nếu } x \neq y \end{cases}$$

là một metric trên X, metric này gọi là metric rời rạc trên X. Không gian metric (X, d) gọi là không gian rời rạc.

Ví dụ 1.1.4. *Hàm số $d(x,y) = |x - y|$ là một metric trên tập số thực $\mathbb{R}$, và gọi là metric thông thường trên $\mathbb{R}$. Tập số thực cùng với metric thông thường gọi là đường thẳng thực.*

Ví dụ 1.1.5. *Giả sử $\mathbb{R}^k$ là không gian vectơ thực k chiều. Với mỗi hai phần tử $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ của $\mathbb{R}^k$, ta định nghĩa*

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|$$
$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|^2}$$
$$d_\infty(x,y) = \max_{1 \leq i \leq k} |x_i - y_i|$$

Khi đó d_1, d_2, d_∞ là những metric trên $\mathbb{R}^k$.
Metric d_2 ở trên gọi là metric Euclid trên $\mathbb{R}^k$; với metric này $\mathbb{R}^k$ gọi là không gian Euclid k chiều

Ví dụ 1.1.6. *Kí hiệu $C[a,b] = \{x : [a,b] \to \mathbb{R} : x \text{ liên tục}\}$. Xét hàm số $d : C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbb{R}$ cho bởi*

$$d(x,y) = \sup_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$$

Khi đó d là metric trên $C[a,b]$.

Ví dụ 1.1.7. *Giả sử M là một tập con khác rỗng bất kì của không gian metric (X, d). Khi đó hàm số*

$$d_M = d|_{M \times M}$$

là một metric trên tập hợp M. Không gian metric (M, d_M) gọi là không gian con của không gian metric (X, d); d_M gọi là metric cảm sinh bởi metric d trên M

1.2 Sự hội tụ trong không gian metric

Định nghĩa 1.2.1. *Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy điểm trong không gian metric (X, d). Ta nói dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến điểm $x \in X$ nếu $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$, nghĩa là, với mọi số $\epsilon > 0$ cho trước tồn tại số tự nhiên n_ϵ sao cho*

$$d(x_n, x) < \epsilon, \text{với mọi } n \geq n_\epsilon$$

Khi đó, điểm $x \in X$ gọi là giới hạn của dãy $\{x_n\}$ và viết

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{hoặc} \quad x_n \to x (n \to \infty)$$

Một dãy gọi là hội tụ nếu nó có một giới hạn nào đó. Một dãy không hội tụ được gọi là phân kì.

Mệnh đề 1.2.2. *Trong không gian metric giới hạn của mỗi dãy hội tụ là duy nhất.*

Chứng minh. Giả sử dãy $\{x_n\}$ trong không gian metric (X, d) hội tụ đến hai điểm phân biệt x, y. Ta có

$$0 < d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \to 0 (n \to \infty)$$ □

Mệnh đề 1.2.3. *Trong không gian metric (X, d), nếu $x_n \to x$ và $y_n \to y$ khi $n \to \infty$, thì $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ khi $n \to \infty$*

Chứng minh. Xuất phát từ bất đẳng thức

$$0 \leq |d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y)$$

Cho $n \to \infty$ suy ra điều phải chứng minh □

Ví dụ 1.2.4. *Sự hội tụ trên đường thẳng thực $\mathbb{R}$ là sự hội tụ của dãy số theo nghĩa thông thường.*

Ví dụ 1.2.5. *Trong không gian metric Euclid $\mathbb{R}^k$, sự hội tụ của dãy $x^{(n)} = (x_1^n, x_2^n, \cdots, x_k^n)$ đến điểm $x = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$ có nghĩa là*

$$d_2(x^n, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i^n - x_i)^2} \to 0$$

điều này tương đương với $x_i^n \to x_i (i = 1, 2, \cdots, k)$. Vậy sự hội tụ trong không gian Euclid $\mathbb{R}^k$ là sự hội tụ theo toạ độ.

1.3 Ánh xạ liên tục

Cho $f : X \to Y$ là một ánh xạ từ không gian metric (X, d) vào không gian metric (Y, ρ)

Định nghĩa 1.3.1. *Ánh xạ gọi là liên tục tại điểm $x_0 \in X$ nếu với mọi số $\epsilon > 0$ tồn tại số $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in X$ thoả mãn $d(x, x_0) < \delta$ ta đều có $\rho\big(f(x), f(x_0)\big) < \epsilon$.*

Bổ đề 1.3.2. *Ánh xạ f liên tục tại điểm x_0 khi và chỉ khi với mọi dãy $\{x_n\} \in X, x_n \to x_0$ kéo theo $f(x_n) \to f(x_0)$.*

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Giả sử f là ánh xạ liên tục tại $x_0, \{x_n\} \subset X$ và $x_n \to x_0$. Ta chứng minh $f(x_n)$ hội tụ đến $f(x_0)$. Lấy $\epsilon > 0$ bất kì. Vì f liên tục tại x_0 nên tồn tại số $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in X$, nếu $d(x, x_0) < \delta$ thì $d\big(f(x), f(x_0)\big) < \epsilon$. Mặt khác, do $x_n \to x_0$ nên tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $d(x_n, x_0) < \delta$ với mọi $n \geq n_0$. Từ đó $d\big(f(x), f(x_0)\big) < \epsilon$ với mọi $n \geq n_0$. Vậy $f(x_n) \to f(x_0)$.

($\Leftarrow$) Giả sử mọi dãy $\{x_n\} \subset X, x_n \to x_0$ đều kéo theo $f(x_n) \to f(x_0)$. ta phải chứng minh f liên tục tại x_0.

Phản chứng: Giả sử f không liên tục tại x_0. Khi đó tồn tại số $\epsilon_0 > 0$ để với mọi $\delta > 0$, tồn tại $x_\delta \in X$ sao cho $d\big(f(x), f(x_0)\big) < \delta$ nhưng $d\big(f(x_\delta, f(x)\big) \geq \epsilon_0$. Do đó, Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, tồn tại $x_n \in X$ để $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ và $d\big(f(x_n), f(x_0)\big) \geq \epsilon_0$. Suy ra $x_n \to x_0$ nhưng $f(x_n) \to f(x_0)$. Điều này trái giả thiết. Vậy f liên tục tại x_0. $\square$

1.4 Không gian metric đầy

Định nghĩa 1.4.1. *Một dãy điểm* $\{x_n\}$ *trong không gian metric* (X, d) *gọi là một dãy Cauchy hay dãy cơ bản nếu*

$$\lim_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$$

, nghĩa là, với mọi số $\epsilon > 0$ *tồn tại số tự nhiên* n_ϵ *sao cho*

$d(x_m, x_n) < \epsilon$ *với mọi* $n, m \geq n_\epsilon$

Định nghĩa 1.4.2. *Không gian metric* (X, d) *gọi là một không gian đầy (hay đủ) nếu mọi dãy Cauchy trong* X *đều hội tụ.*

Ví dụ 1.4.3. *Trong giải tích cổ điển ta đã biết mọi dãy số thực là dãy Cauchy đều hội tụ, nên đường thẳng thực là không gian metric đầy. Vì sự hội tụ trong không gian Euclid* $\mathbb{R}^k$ *là sự hội tụ theo toạ độ nên từ tính đầy của* $\mathbb{R}$ *dễ dàng suy ra* $\mathbb{R}^k$ *là không gian đầy.*

Ví dụ 1.4.4. *Không gian* $C[a, b]$ *với metric sup là đầy.*

Chứng minh. Thật vậy, giả sử $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong $C[a, b]$. Khi đó, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên n_ϵ sao cho

$$d(x_m, x_n) = \sup_{t\in[a,b]} |x_m(t) - x_n(t)| < \epsilon, \forall m, n \geq n_\epsilon, \forall t \in [a, b]$$

Suy ra

$$|x_m(t) - x_n(t)| < \epsilon, \forall m, n \geq n_\epsilon, \forall t \in [a, b] \tag{1.1}$$

Từ đây suy ra, với mỗi $t \in [a, b]$ cố định, dãy $\{x_n(t)\}$ là một dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$, do đó nó có giới hạn là một số thực $x(t)$ nào đó. Bây giờ trong bất đẳng thức (1.1) trên cho $m \to \infty$ ta được

$$|x(t) - x_n(t)| \leq \epsilon, \forall n \geq n_\epsilon, \forall t \in [a, b] \tag{1.2}$$

Điều này chứng tỏ dãy hàm liên tục $\{x_n\}$ hội tụ đều đến hàm x trên $[a, b]$. Do đó x cũng liên tục trên đoạn $[a, b]$. Hơn nữa, từ (1.2) ta cũng nhận được

$$d(x, x_n) \leq \epsilon, \forall n \geq n_\epsilon$$

Do đó $\{x_n\}$ hội tụ đến x trong $C[a, b]$. □

Ví dụ 1.4.5. *Cho (X, d) là một không gian metric đầy, A là tập con đóng trong X. Khi đó không gian metric (A, d_A) là không gian metric đầy, với d_A là metric cảm sinh bởi metric d.*

1.5 Không gian metric compact

Cho (X, d) là một không gian metric và A là một tập con của X

Định nghĩa 1.5.1. *Tập con A gọi là compact nếu mọi dãy $\{x_n\}$ trong A đều chứa một dãy con x_{n_k} hội tụ đến một điểm $x \in A$.*
Nếu tập X là tập compact thì ta nói X là không gian compact.

Mệnh đề 1.5.2. *Một tập compact thì đóng. Một tập con đóng của một tập compact thì compact.*

Chứng minh. Cho A là một tập con compact. Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy trong A, $x_n \to x \in X$. Vì A compact nên dãy $\{x_n\}$ có chứa dãy con $\{x_{n_k}\}$ sao cho $x_{n_k} \to y \in A$. Nhưng dãy con $\{x_{n_k}\}$ cũng hội tụ đến x nên $x = y \in A$. Vậy A là đóng.

Bây giờ giả sử B là một tập con đóng của tập compact A. Lấy dãy $\{x_n\}$ trong B. Vì $\{x_n\}$ cũng là một dãy trong A và A compact, nên có dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ đến $x \in A$. Do B đóng nên $x \in B$. Vậy B là tập compact □

Nhận xét 1.5.3. *Không gian metric compact là không gian metric đầy*

Ví dụ 1.5.4. *Trong đường thẳng thực $\mathbb{R}$, đoạn $[a, b]$ là tập compact*

Định lý 1.5.5. ***(Hausdorff)*** *Trong không gian metric đầy một tập con là compact khi và chỉ khi nó đóng và hoàn toàn bị chặn.*

Mệnh đề 1.5.6. *Trong không gian Euclid hữu hạn chiều $\mathbb{R}^k$, một tập con là compact khi và chỉ khi nó đóng và bị chặn.*

1.6 Không gian siêu metric

Định nghĩa 1.6.1. *Cho X là một tập khác rỗng. Hàm số $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ gọi là một siêu metric trên X nếu các tính chất sau thoả mãn:*

S_1) $\rho(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$, và $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
S_2) $\rho(x, y) = \rho(y, x), \forall x, y \in X$;
S_3) $\rho(x, z) \leq \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}, \forall x, y, z \in X$

Tập hợp X cùng với siêu metric ρ trên nó gọi là một không gian siêu metric, kí hiệu (X, ρ). Mỗi phần tử thuộc (X, ρ) được gọi là một điểm.

Ví dụ 1.6.2. *Giả sử X là tập số thực $\mathbb{R}$, E là tập tất cả các dãy vô hạn $x = \{x_n\}_{n \geq 1}$ những phần tử của X. Với mỗi cặp phần tử khác nhau $x = \{x\}_{n \geq 1}, y = \{y_n\}_{n \geq 1}$của tập hợp E, giả sử $k(x, y)$ là số n nhỏ nhất sao cho $x_n \neq y_n$. Ta đặt*

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{k(x, y)}, & \text{nếu } x \neq y \\ 0, & \text{nếu } x = y \end{cases} \tag{1.3}$$

Khi đó ρ là một siêu metric trong E

Chứng minh. Do $n \geq 1$ nên $k(x, y) > 0, \forall x, y \in X$.
Theo định nghĩa của ρ thì $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
Cũng từ định nghĩa của ρ dễ dàng suy ra $\rho(x, y) = \rho(y, x). \forall x, y \in X$
Ta chứng minh ρ thoả mãn tính chất S_3, tức là

$$\rho(x, z) \leq \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}, \forall x, y, z \in X \tag{1.4}$$

- Nếu $x = y$ hoặc $y = z$ hoặc $x = z$ thì (1.4) đúng
- Nếu $x \neq y$, $y \neq z$, $x \neq z$ Đặt $k^* = \min\{k(x, y), k(y, z)\}$. Theo định nghĩa của $k(x, y)$ ta có

$$x_n = y_n, \forall n < k^*$$

Do đó

$$\rho(x, z) = \frac{1}{k^*} = \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}$$

□

Mệnh đề 1.6.3. *Mọi không gian siêu metric đều là không gian metric.*

Chứng minh. Từ tiên đề S_3 ta suy ra

$$\rho(x, z) \leq \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\} \leq \rho(x, y) + \rho(y, z), \forall x, y, z \in X$$

Kết hợp với 2 tiên đề S_1 và S_2 thì ρ là một metric trên X. Do đó (X, ρ) cũng là không gian metric □

Nhận xét 1.6.4. *Điều ngược lại của mệnh đề 1.6.3 không đúng, tức là nếu* (X, d) *là không gian metric thì có thể nó không là không gian siêu metric.*
Chẳng hạn: Trên $X = \mathbb{R}$*, ta đặt* $d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$*. Khi đó* d *là một metric trên* X*. Tuy nhiên* d *không phải là một siêu metric trên* X*. Thật vậy, nếu ta chọn*

$$x = 1, y = 2, z = 3$$

thì $d(x, z) = 2, d(x, y) = 1, d(y, z) = 1$*. Do đó*

$$d(x, z) > \max\{d(x, y), d(y, z)\}$$

Như vậy tiên đề S_3 *không được thoả mãn. Do đó* d *không phải là siêu metric trên* X*.*

Chương 2

Một số định lí điểm bất động trong không gian metric đầy

Trong chương này, trên cơ sở các bài báo [6], [7] chúng tôi sẽ trình bày định lí điểm bất động trong không gian metric đầy của lớp ánh xạ co yếu, lớp ánh xạ Lipschitz. Đối với lớp ánh xạ co được chúng tôi phân tích kĩ hằng số co. Ngoài ra, chúng tôi còn xây dựng một số định lí điểm bất động trong không gian siêu metric đầy.

2.1 Điểm bất động của ánh xạ co

Định nghĩa 2.1.1. *Cho X là một không gian metric. Điểm $x \in X$ gọi là một điểm bất động của ánh xạ f từ không gian metric X vào chính nó nếu $f(x) = x$*

Định nghĩa 2.1.2. *Ánh xạ f từ không gian metric (X, d) vào chính nó gọi là một ánh xạ co nếu có số $k, 0 \leq k < 1$, sao cho*

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq kd(x, y) \textit{với mọi } x, y \in X$$

Nhận xét 2.1.3. *Ánh xạ co là ánh xạ liên tục*

Thật vậy, lấy điểm bất kì $x_0 \in X$. Với mỗi $\epsilon > 0$, chọn $\delta = \dfrac{\epsilon}{k+1}$. Khi đó, với mọi $x \in X$ thoả mãn $d(x, x_0) < \delta$ ta đều có

$$d\big(f(x), f(x_0)\big) \leq kd(x, x_0) \leq k\delta = \frac{k\epsilon}{k+1} < \epsilon$$

Do đó, f liên tục tại x_0, mà x_0 tuỳ ý thuộc X nên f liên tục.

Định lý 2.1.4. *(Nguyên lý ánh xạ co Banach). Một ánh xạ co đi từ không gian metric đầy vào chính nó bao giờ cũng có một điểm bất động duy nhất.*

Chứng minh. Giả sử (X, d) là một không gian metric đầy và $f : X \to X$ là ánh xạ thoả mãn

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq kd(x, y), \forall x, y \in X \tag{2.1}$$

với hằng số k nào đó, $0 \leq k < 1$.

Lấy điểm bất kì $x_0 \in X$. Xây dựng dãy $\{x_n\}$ xác định bởi

$$x_n = f(x_{n-1}), n \geq 1 \tag{2.2}$$

Từ (2.1) suy ra

$$d(x_n, x_{n+1}) = d\big(f(x_{n-1}), f(x_n)\big) \leq kd(x_{n-1}, x_n), \forall n \geq 1$$

Sử dụng điều này liên tiếp ta nhận được

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq kd(x_{n-1}, x_n) \leq k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \cdots \leq k^n d(x_0, x_1), \forall n \geq 1$$

Từ đây, với mọi $n, p \geq 1$, ta có

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq (k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+p-1}) d(x_0, x_1) \\ &= k^n \frac{1 - k^p}{1 - k} d(x_0, x_1) \leq k^n \frac{d(x_0, x_1)}{1 - k} \to 0 (n \to \infty) \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy trong X, mà X đầy nên $x_n \to x^* \in X$. Vì ánh xạ co là liên tục, nên lấy giới hạn hai vế của (2.2) khi $n \to \infty$ ta nhận được

$$x^* = f(x^*)$$

Do đó x^* là một điểm bất động của f

Giả sử rằng ánh xạ f còn có một điểm bất động $y^* \neq x^*$. Khi đó, ta có

$$0 < d(x^*, y^*) = d\big(f(x^*), f(y^*)\big) \leq kd(x^*, y^*)$$

Suy ra $k \geq 1$ (điều này mâu thuẫn với giả thiết $k < 1$). Vậy x^* là điểm bất động duy nhất của f và định lí được chứng minh. $\square$

Nhận xét 2.1.5.

1. Từ chứng minh nguyên lí ánh xạ co Banach ta thấy nếu ánh xạ f đi từ không gian metric đầy vào chính nó là ánh xạ co thì dãy xác định bởi

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{X} \\ x_n = f(x_{n-1}), n \geq 1 \end{cases} \tag{2.3}$$

sẽ hội tụ đến điểm bất động duy nhất của ánh xạ f. Điều này làm cơ sở cho việc giải một số bài toán về dãy số ở chương 3.

2. Hệ số k trong ánh xạ co là một hằng số không phụ thuộc vào từng cặp điểm (x, y). Nếu k không phải hệ số chung cho mọi cặp điểm, chẳng hạn với mỗi cặp điểm (x, y), $x \neq y$ tồn tại số dương $k_{xy} < 1$ sao cho

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq k_{xy} d(x, y)$$

thì nguyên lí ánh xạ co không còn đúng nữa.

Thật vậy. xét hàm số $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + x - \arctan x, x \in \mathbb{R}$

Với mỗi cặp $(x, y), x \neq y$, giả sử $x < y$. Do f là hàm khả vi trên $\mathbb{R}$ nên f khả vi trên đoạn $[x, y]$, theo định lí Lagrange tồn tại $c_{xy} \in (x, y)$ sao cho

$$|f(x) - f(y)| = |f^{'}(c_{xy})||x - y|$$

Ta có

$$f^{'}(x) = \frac{x^2}{1 + x^2} < 1, x \in \mathbb{R}$$

Do đó

$$|f^{'}(c_{xy})| < 1$$

Tuy nhiên, f không có điểm bất động vì phương trình $f(x) = x$ vô nghiệm.

3. Trong nguyên lí ánh xạ co Banach, giả thiết X là đầy không thể bỏ qua, vì có những ánh xạ co đi từ không gian metric không đầy vào chính nó mà không có điểm bất động.

Thật vậy, tập $X = (0, \dfrac{1}{3}]$ cùng với metric cảm sinh bởi metric thông thường trên đường thẳng thực là không gian metric không đầy.

Xét ánh xạ $f : X \to X$ xác định bởi $f(x) = x^2, x \in X$.
Với $\forall x, y \in X$, ta có

$$|f(x) - f(y)| = |x - y||x + y| \leq |x - y|(|x| + |y|) \leq \frac{2}{3}|x - y|$$

Vì $\frac{2}{3} < 1$ nên f là ánh xạ co. Tuy nhiên phương trình

$$x^2 = x \text{ vô nghiệm trên } X$$

Do đó f không có điểm bất động.

Điều gì sẽ xảy ra khi $k = 1$ có thể thấy câu trả lời trong ví dụ sau

Ví dụ 2.1.6. *Cho ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Rõ ràng*

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

nhưng f không có điểm bất động

Ví dụ 2.1.7. *Cho $X = [1, +\infty)$ là không gian metric đầy với metric thông thường trên $\mathbb{R}$. Xét ánh xạ $f : X \to X$ xác định bởi $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Khi đó*

$$\begin{aligned} d\big(f(x), f(y)\big) &= |f(x) - f(y)| \\ &= |(x + \frac{1}{x}) - (y + \frac{1}{y})| \\ &= |x - y||1 - \frac{1}{xy}| \\ &< |x - y|, \forall x, y \in X, x \neq y \end{aligned}$$

Nhưng f không có điểm bất động vì phương trình $x + \frac{1}{x} = x$ vô nghiệm trên X.

Như vậy nguyên lí ánh xạ co Banach thậm chí không mở rộng được đối với lớp ánh xạ rộng hơn một chút $d\big(f(x), f(y)\big) < d(x, y), \forall x \neq y$. Để nguyên lí ánh xạ co vẫn thì điều kiện bổ sung đơn giản nhất là tính compact của không gian. Ta có định lí sau

Định lý 2.1.8. *Cho (X, d) là không gian metric compact, và giả sử $f : X \to X$ là ánh xạ thoả mãn $d(f(x), f(y)) < d(x, y), \forall x \neq y$. Khi đó f có duy nhất điểm bất động.*

Chứng minh. Từ giả thiết ta có $d\big(f(x), f(y)\big) \leq 1, \forall x, y \in X$
Xét ánh xạ $\varphi : X \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\varphi(x) = d\big(x, f(x)\big), x \in X$$

Với $x, y \in X$ta có

$$\begin{aligned}\varphi(x) - \varphi(y) &= d\big(x, f(x)\big) - d\big(y, f(y)\big)\\ &\leq d(x, y) + d\big(y, f(y)\big) + d\big(f(y), f(x)\big) - d\big(y, f(y)\big)\\ &= d(x, y) + d\big(f(y), f(x)\big) \leq 2d(x, y)\end{aligned}$$

Thay đổi vai trò của x và y cho nhau ta được

$$\varphi(y) - \varphi(x) \leq 2d(x, y)$$

Do đó

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \leq 2d(x, y), \forall x, y \in X$$

Suy ra, φ liên tục. Do X là compact nên φ đạt được giá trị bé nhất trên X tại x^*

$$\min_{x \in X} \varphi(x) = \varphi(x^*) = \alpha \geq 0$$

Suy ra

$$\varphi\big(f(x^*)\big) \geq \varphi(x^*) \tag{2.4}$$

Giả sử $\alpha > 0$. Khi đó $\varphi(x^*) = d\big(x^*, f(x^*)\big) > 0$. Suy ra $f(x^*) \neq x^*$
Do đó

$$\varphi\big(f(x^*)\big) = d\Big(f(x^*), f\big(f(x^*)\big)\Big) < d\big(x^*, f(x^*)\big) = \varphi(x^*)(\text{mâu thuẫn với (2.4)})$$

Điều này chứng tỏ $f(x^*) = x^*$, tức là x^* là điểm bất động của f.
Rõ ràng x^* là điểm bất động duy nhất của f, vì nếu còn có $f(y^*) = y^*, y^* \neq x^*$thì

$$d(x^*, y^*) = d\big(f(x^*), f(y^*)\big) < d(x^*, y^*) \text{ (vô lí).}$$

Vậy f có duy nhất điểm bất động. □

2.2 Điểm bất động của ánh xạ co yếu

Định nghĩa 2.2.1. *Cho (X, d) là một không gian metric. Ánh xạ $f : X \to X$ được gọi là ánh xạ co yếu nếu*

$$d\big(f(x), f(y)\big) < d(x, y) - \phi\big(d(x, y)\big), \forall x \neq y$$

, trong đó $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ là ánh xạ liên tục và không giảm thoả mãn $\phi(t) = 0$ nếu và chỉ nếu $t = 0$.

Nhận xét 2.2.2. *Ánh xạ co yếu là ánh xạ liên tục.*

Thật vậy, từ giả thiết ta suy ra

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq d(x, y), \forall x, y \in X$$

Lấy bất kì $x_0 \in X$. Với mỗi $\epsilon > 0$ cho trước, tồn tại $\delta = \epsilon$ sao cho với mọi $x \in X$ thoả mãn $d(x, x_0) < \delta$ ta đều có

$$d\big(f(x), f(x_0)\big) \leq d(x, x_0) < \delta = \epsilon$$

Do đó f liên tục tại x_0, mà $x_0 \in X$ tuỳ ý, nên f liên tục.

Định lý 2.2.3. *[6] Cho (X, d) là không gian metric đầy. Giả sử $f : X \to X$ là ánh xạ co yếu. Khi đó f có duy nhất điểm bất động.*

Chứng minh. Lấy $x_0 \in X$. Ta xây dựng dãy $\{x_n\}$ như sau

$$x_n = f(x_{n-1}), n \geq 1 \tag{2.5}$$

Đặt $p_n = d(x_{n+1}, x_n), n \geq 1$. Từ giả thiết ta có

$$p_{n+1} \leq p_n - \phi(p_n) \leq p_n, \forall n \geq 1 \tag{2.6}$$

Do đó, dãy $\{p_n\}$ là dãy giảm. Mặt khác dãy $\{p_n\}$ bị chặn dưới bởi 0 nên hội tụ. Giả sử

$$\lim_{n\to\infty} p_n = r \geq 0$$

Vì ϕ liên tục nên trong (2.6) cho $n \to \infty$ ta thu được

$$r \leq r - \phi(r)$$

Suy ra

$$\phi(r) \leq 0 \Rightarrow \phi(r) = 0 \Rightarrow r = 0$$

Cố định $\epsilon > 0$, chọn N sao cho

$$d(x_N, x_{N+1}) \leq \min\{\frac{\epsilon}{2}, \phi(\frac{\epsilon}{2})\}$$

Chúng ta sẽ chỉ ra f là ánh xạ co từ hình cầu đóng $B[x_N, \epsilon]$ vào chính nó

+ Trường hợp 1: $d(x, x_N) \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Ta có

$$\begin{aligned} d\big(f(x), x_N\big) &\leq d\big(f(x), f(x_N)\big) + d\big(f(x_N), x_N\big) \\ &\leq d(x, x_N) - \phi\big(d(x, x_N)\big) + d(x_{N+1}, x_N) \\ &\leq d(x, x_N) + d(x_{N+1}, x_N) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

+ Trường hợp 2. $\frac{\epsilon}{2} < d(x, x_N) \leq \epsilon$

Do ϕ là hàm không giảm nên $\phi\big(d(x, x_N)\big) \geq \phi(\frac{\epsilon}{2})$

Suy ra

$$\begin{aligned} d\big(f(x), x_N\big) &\leq d(x, x_N) - \phi\big(d(x, x_N)\big) + d(x_{N+1}, x_N) \\ &\leq d(x, x_N) - \phi(\frac{\epsilon}{2}) + \phi(\frac{\epsilon}{2}) \\ &\leq d(x, x_N) \leq \epsilon \end{aligned}$$

Như vậy f là ánh xạ đi từ hình cầu đóng $B[x_N, \epsilon]$ vào chính nó. Do đó $x_n \in B[x_N, \epsilon], \forall n > N$, tức là

$$d(x_n, x_N) < \epsilon, \forall n > N$$

Do đó

$$d(x_m, x_n) < 2\epsilon, \forall m, n > N$$

Suy ra, dãy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy, do đó nó hội tụ đến x^*. Từ tính liên tục của f, trong (2.5) cho $n \to \infty$ ta thu được $f(x^*) = x^*$. Do đó, x^* là điểm bất động của f.

Giả sử y^* là điểm bất động khác x^* của f. Từ giả thiết ta có

$$d(x^*, y^*) = d\big(f(x^*), f(y^*)\big) < d(x^*, y^*) - \phi\big(d(x^*, y^*)\big) < d(x^*, y^*) (\text{vô lí})$$

Vậy f có duy nhất một điểm bất động. $\square$

2.3 Điểm bất động của ánh xạ Lipschitz

Định nghĩa 2.3.1. *Cho* (X, d) *là một không gian metric. Ánh xạ* $f : X \to X$ *được gọi là ánh xạ Lipschitz nếu tồn tại số* $k > 0$ *sao cho*

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq kd(x, y) \textit{với mọi } x, y \in X$$

Hằng số k bé nhất thoả mãn bất đẳng thức trên gọi là hằng số Lipschitz của f

Nhận xét 2.3.2.

1. Ánh xạ co, ánh xạ co yếu là ánh xạ Lipschitz.

2. Ánh xạ Lipschitz là ánh xạ liên tục

Thật vậy, lấy điểm bất kì $x_0 \in X$. *Với mỗi* $\epsilon > 0$ *cho trước, tồn tại* $\delta = \dfrac{\epsilon}{k}$, *sao cho với mọi* $x \in X$ *thoả mãn* $d(x, x_0) < \delta$ *ta đều có*

$$d\big(f(x), f(x_0)\big) \leq kd(x, x_0) < k\delta = \frac{k\epsilon}{k} < \epsilon$$

Định lý 2.3.3 (7). *Cho* (X, d) *là một không gian metric đầy. Giả sử* $f : X \to X$ *là ánh xạ thoả mãn với mỗi* $n \geq 1$ *thì* f^n *là ánh xạ Lipschitz với hằng số Lipschitz* k_n, *và* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} k_n < +\infty$. *Chứng minh rằng f có duy nhất điểm bất động* x^*, *và dãy* $\{f^n(x)\} \to x^*(n \to \infty)$ *với mọi* $x \in X$.

Chứng minh. Xét ánh xạ $\varphi : X \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\varphi(x) = d\big(x, f(x)\big), x \in X.$$

Với $x, y \in X$, ta có

$$\begin{aligned}
\varphi(x) - \varphi(y) &= d\big(x, f(x)\big) - d\big(y, f(y)\big) \\
&\leq d(x, y) + d\big(y, f(y)\big) + d\big(f(y), f(x)\big) - d\big(y, f(y)\big) \\
&= d(x, y) + d\big(f(y), f(x)\big) \leq (1 + k_1)d(x, y)
\end{aligned}$$

Thay đổi vai trò của x và y ta được

$$\varphi(y) - \varphi(x) \leq (1 + k_1)d(x, y)$$

Do đó

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq (1 + k_1)d(x, y), \forall x, y \in X \tag{2.7}$$

Bởi (2.7) nên φ liên tục. Bây giờ cố định $x \in X$. Vì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} k_n$ hội tụ nên $k_n \to 0 (n \to \infty)$.
Do đó

$$0 \leq \varphi(f^n(x)) = d\big(f^n(x), f^{n+1}(x)\big) \leq k_n d\big(x, f(x)\big) = k_n \varphi(x) \tag{2.8}$$

Trong (2.8) cho $n \to \infty$ ta được $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(f^n(x)) = 0$
Vì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} k_n$ hội tụ nên $r_{n-1} = \sum\limits_{i=n}^{+\infty} k_n \to 0(n \to \infty)$.
Do đó với $n \geq 1, p \geq 1$, ta có

$$\begin{aligned} d\big(f^n(x), f^{n+p}(x)\big) \leq d\big(f^n(x), f^{n+1}(x)\big) + d\big(f^{n+1}(x), f^{n+2}(x)\big) + \cdots + \\ + d\big(f^{n+p-1}(x), f^{n+p}(x)\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq (k_n + k_{n+1} + \cdots + k_{n+p-1}) d\big(x, f(x)\big) \\ &\leq (\sum_{i=n}^{+\infty} k_i)\varphi(x) \to 0(n \to \infty) \end{aligned}$$

Suy ra dãy $\{f^n(x)\}$ là dãy Cauchy trong X. Vì X đầy nên $\{f^n(x)\}$ hội tụ. Giả sử

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x^* \in X$$

Suy ra

$$d\big(x^*, f(x^*)\big) = \varphi(x^*) = \lim_{n\to\infty} \varphi\big(f^n(x)\big) = 0 \Rightarrow f(x^*) = x^*$$

Do đó x^* là điểm bất động của f
Giả sử $y^* \in X$ là một điểm bất động của f. Khi đó, với mỗi $n \geq 1$ ta có

$$0 \leq d(x^*, y^*) = d\big(f^n(x^*), f^n(y^*)\big) \leq k_n d(x^*, y^*) \tag{2.9}$$

Do $k_n \to 0(n \to \infty)$, nên trong (2.9) cho $n \to \infty$ ta được

$$d(x^*, y^*) = 0 \Rightarrow x^* = y^*$$

Vậy x^* là điểm bất động duy nhất của f. $\square$

Định nghĩa 2.3.4. *Một tập con $Y \subset X$ được gọi là bị chặn nếu thoả mãn* $\sup\{d(x, y) : x, y \in X\} < +\infty$

Định lý 2.3.5. *Giả sử $f : X \to X$ là ánh xạ thoả mãn với $\forall n \geq 1$ thì f^n là ánh xạ Lipschitz với hằng số Lipschitz k_n và $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = 0$. Khi đó f có duy nhất một điểm bất động nếu và chỉ nếu tồn tại $x \in X$ sao cho tập $\{f^n(x) : n \geq 1\}$ bị chặn. Hơn nữa, nếu f có điểm bất động x^* thì $\forall x \in X$ dãy $\{f^n(x)\}$ hội tụ đến x^**

?. Giả sử f có điểm bất động x^*. Do dãy $\{k_n\}$ hội tụ nên bị chặn, tức là tồn tại $M > 0$ sao cho

$$k_n \leq M, \forall n \geq 1$$

Với mọi $x \in X$ ta có

$$\begin{aligned} d\big(f^n(x), x^*\big) &= d\big(f^n(x), f^n(x^*)\big) \leq k_n d(x, x^*) \\ &\leq M d(x, x^*), \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

Vậy với mỗi $x \in X$tập $\{f^n(x) : n \geq 1\}$ bị chặn

Ngược lại, giả sử tồn tại $x \in X$ sao cho $\{f^n(x) : n \geq 1\}$ bị chặn, suy ra tồn tại $c > 0$ sao cho

$$d\big(f^n(x), f^m(x)\big) \leq c \text{ với mọi } m, n \geq 1$$

Với $n \geq 2, p \geq 1$ ta có

$$\begin{aligned} d\big(f^{n+p}(x), f^n(x)\big) &= d\Big(f^{n-1}\big(f^{p+1}(x)\big), f^{n-1}\big(f(x)\big)\Big) \\ &\leq k_{n-1} d\big(f^{p+1}(x), f(x)\big) \to 0 (n \to \infty) \end{aligned}$$

Do đó dãy $\{f^n(x)\}$ là dãy Cauchy trong X. Vì X đầy nên dãy $\{f^n(x)\}$ hội tụ đến $x^* \in X$

Ta có

$$\begin{aligned} d\big(x^*, f(x^*)\big) &\leq d\big(x^*, f^n(x)\big) + d\big(f^n(x), f(x^*)\big) \\ &\leq d\big(x^*, f^n(x)\big) + k_1 d\big(f^{n-1}(x), x^*\big) \to 0 (n \to \infty) \\ &\Rightarrow f(x^*) = x^* \Rightarrow f(x^*) = x^*. \end{aligned}$$

Do đó x^* là điểm bất động của f. Giả sử y^* cũng là điểm bất động của f. Khi đó

$$\begin{aligned} 0 \leq d(x^*, y^*) = d\big(f(x^*), f(y^*)\big) &= \cdots = d\big(f^n(x^*), f^n(y^*)\big) \\ &\leq k_n d(x^*, y^*) \to 0 (n \to \infty) \\ &\Rightarrow d(x^*, y^*) = 0 \Rightarrow x^* = y^* \end{aligned}$$

Do đó x^* là điểm bất động duy nhất của f. □

2.4 Điểm bất động trong không gian siêu metric đầy

Trong phần này chúng tôi xây dựng một số định lí điểm bất động trong không gian siêu metric đầy. Trước tiên ta cần bổ đề sau

Bổ đề 2.4.1. *Cho (X, ρ) là một không gian siêu metric. Điều kiện cần và đủ để $\{x_n\}$ là dãy Cauchy là:*

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) = 0$$

Chứng minh. $(\Rightarrow)$ Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy. Khi đó với mỗi $\epsilon > 0$ cho trước tồn tại n_ϵ sao cho

$$\rho(x_m, x_n) < \epsilon, \forall m, n \geq n_\epsilon$$

Do đó

$$\rho(x_n, x_{n+1}) < \epsilon, \forall n \geq n_\epsilon$$

Suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) = 0$$

$(\Leftarrow)$ Ngược lại, giả sử

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) = 0$$

Khi đó, với mỗi $\epsilon > 0$ cho trước, tồn tại n_ϵ sao cho

$$\rho(x_n, x_{n+1}) < \epsilon, \forall n \geq n_\epsilon$$

Từ đây với mọi $n \geq n_\epsilon$, $\forall p \geq 1$ ta có

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leq \max\{\rho(x_n, x_{n+1}), \rho(x_{n+1}, x_{n+2}), \cdots, \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p})\} < \epsilon$$

Vậy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy □

Định lý 2.4.2. *Cho (X,ρ) là không gian siêu metric đầy. Giả sử $f : X \to X$ là ánh xạ thoả mãn*

$$\rho^2\big(f(x), f(y)\big) \le \rho(x,y)\phi\big(\rho(x,y)\big), \forall x, y \in X,$$

trong đó $\phi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ là ánh xạ liên tục thoả mãn các điều kiện sau
(i) $\phi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$
(ii) $\phi(t) < t, \forall t > 0$
Khi đó, f có duy nhất một điểm bất động trong X.

Chứng minh. Lấy điểm bất kì $x_0 \in X$. Xây dựng dãy $\{x_n\}$ xác định bởi

$$x_n = f(x_{n-1}), n \ge 1$$

\+ Nếu $x_n = x_{n+1}$ với n nào đó thì f có điểm bất động.
\+ Nếu $x_n \ne x_{n+1}, \forall n$. Ta có

$$\begin{aligned}\rho^2(x_n, x_{n+1}) &= \rho^2\big(f(x_{n-1}), f(x_n)\big)\\ &\le \rho(x_{n-1}, x_n)\phi\big(\rho(x_{n-1}, x_n)\big) < \rho^2(x_{n-1}, x_n)\end{aligned}$$

Suy ra

$$\rho(x_n, x_{n+1}) < \rho(x_{n-1}, x_n), \forall n \ge 1$$

Do đó dãy $\{\rho(x_n, x_{n+1})\}$ là dãy giảm, mà dãy này bị chặn dưới bởi 0 nên hội tụ. Giả sử

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) = r \ge 0$$

Do ϕ liên tục nên từ bất đẳng thức

$$\rho^2(x_n, x_{n+1}) \le \rho(x_{n-1}, x_n)\phi\big(\rho(x_{n-1}, x_n)\big)$$

cho $n \to \infty$ ta thu được

$$r^2 \le r\phi(r) \tag{2.10}$$

Nếu $r > 0$ thì từ (2.10) ta suy ra $r \le \phi(r)$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $\phi(r) < r, \forall r > 0$. Do đó r=0, tức là

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) = 0$$

Theo bổ đề 2.4.1 dãy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy, mà (X, ρ) là không gian siêu metric đầy nên dãy này hội tụ đến $x^* \in X$
Ta có

$$\rho^2\big(f(x^*), x_{n+1}\big) = \rho^2\big(f(x^*), f(x_n)\big) \leq \rho(x^*, x_n)\phi\big(\rho(x^*, x_n)\big) \leq \rho^2(x^*, x_n) \tag{2.11}$$

Trong (2.11) cho $n \to \infty$ ta thu được

$$\rho^2\big(f(x^*), x^*\big) \leq 0 \Rightarrow \rho\big(f(x^*), x^*\big) = 0 \Rightarrow f(x^*) = x^*$$

Do đó x^* là điểm bất động của f.
Giả sử f còn điểm bất động $y^* \neq x^*$. Khi đó

$$\begin{aligned}\rho^2(y^*, x^*) &= \rho^2\big(f(y^*), f(x^*)\big)\\ &\leq \rho(y^*, x^*)\phi\big(\rho(y^*, x^*)\big) < \rho^2(y^*, x^*) \text{ (vô lí)}\end{aligned}$$

Vậy f có điểm bất động duy nhất trong X. □

Định lý 2.4.3. *Cho (X, ρ) là một không gian siêu metric đủ. Giả sử $f : X \to X$ là ánh xạ thoả mãn $\rho\big(f(x), f(y)\big) < \rho(x, y) - \phi\big(\rho(x, y)\big), \forall x \neq y$ trong đó $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ là ánh xạ liên tục và thoả mãn $\phi(t) = 0$ nếu và chỉ nếu $t = 0$. Khi đó f có duy nhất điểm bất động*

Chứng minh. Từ giả thiết ta có $\rho\big(f(x), f(y)\big) \leq \rho(x, y), \forall x, y \in X$. Do đó f liên tục. Lấy bất kì $x_0 \in X$. Ta xây dựng dãy $\{x_n\}$ như sau

$$x_n = f(x_{n-1}), n \geq 1 \tag{2.12}$$

Đặt $p_n = \rho(x_{n+1}, x_n), n \geq 1$. Chứng minh tương tự như định lí 2.2.3 ta thu được

$$\lim \rho(x_n, x_{n+1}) = 0$$

Do đó, theo bổ đề 2.4.1 dãy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong X, mà X đầy nên dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến $x^* \in X$. Từ tính liên tục của f, trong (2.12) cho $n \to \infty$ ta thu được $f(x^*) = x^*$. Do đó x^* là điểm bất động của f.

Giả sử y^* là điểm bất động khác x^* của f. Từ giả thiết ta có

$$\rho(x^*, y^*) = \rho\big(f(x^*), f(y^*)\big) < \rho(x^*, y^*) - \phi\big(\rho(x^*, y^*)\big) < \rho(x^*, y^*) \text{(vô lí)}$$

Vậy f có duy nhất một điểm bất động.

□

Nhận xét 2.4.4. *Định lí 2.4.3 trong không gian siêu metric đủ ta không cần giả thiết ϕ không giảm như trong định lí 2.2.3.*

Chương 3

Ứng dụng

Trong chương này chúng tôi sẽ trình bày một số ứng dụng của các định lí điểm bất động trong không gian metric đầy được trình bày ở chương 2. Trong đó, ứng dụng của nguyên lí ánh xạ co Banach được chúng tôi trình bày kĩ hơn, các ứng dụng liên quan đến việc khảo sát sự tồn tại nghiệm của các bài toán liên quan đến phương trình vi phân, phương trình tích phân, hệ phương trình tuyến tính, các bài toán về dãy số, giải phương trình. Ngoài ra, chúng tôi còn xây dựng một số bài tập liên quan đến điểm bất động.

3.1 Một số ứng dụng của nguyên lý ánh xạ co Banach

3.1.1 Sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình vi phân với điều kiện ban đầu

Giả sử $f(x, y)$ là hàm số liên tục trên dải $[x_0 - r, x_0 + r] \times \mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện Lipschitz theo biến y:

$$|f(x, y) - f(x, y')| \leq K|y - y'|, \forall (x, y), (x, y') \in [x_0 - r, x_0 + r] \times \mathbb{R}$$

, với K là hằng số dương không phụ thuộc vào x, y. Khi đó tồn tại duy nhất một hàm khả vi $\varphi(x)$ trên đoạn $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [x_0 - r, x_0 + r]$

sao cho:

$$\varphi(x_0) = y_0 \text{ và } \frac{d\varphi}{dx} = f\big(x, \varphi(x)\big), \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \tag{3.1}$$

(ở đây y_0 là một số cho trước tuỳ ý).

Thật vậy, các điều kiện nêu ở (3.1) có thể viết dưới dạng:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt$$

Chọn $\delta < \min\{r, \dfrac{1}{K}\}$. Định nghĩa ánh xạ:

$$F : C[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

bởi công thức

$$F(\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, \varphi(t)\big)dt$$

, ở đây $C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ là không gian các hàm liên tục với chuẩn sup Ta sẽ chứng tỏ rằng f là ánh xạ co. Thật vậy ta có:

$$\begin{aligned} d\big(F(\varphi), F(\eta)\big) &= \sup_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} \Big| \int_{x_0}^{x} f\big(t, \varphi(t)\big) - f\big(t, \eta(t)\big)dt \Big| \\ &\leq K\delta \sup_{t \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} |\varphi(t) - \eta(t)| \\ &= K\delta d(\varphi, \eta) \leq \theta d(\varphi, \eta) \end{aligned}$$

Vì $\theta = K\delta < 1$ nên F là ánh xạ co. Theo nguyên lý điểm bất động tồn tại duy nhất $\varphi \in C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ sao cho$F(\varphi) = \varphi$, tức là

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, \varphi(t)\big)dt$$

Từ đẳng thức này suy ra

$$\varphi(x_0) = y_0 \text{ và } \frac{d\varphi}{dx} = f\big(x, \varphi(x)\big), \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

3.1.2 Ứng dụng nguyên lý ánh xạ co cho phương trình tích phân

Xét phương trình tích phân

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b \psi(x,s)\varphi(s)ds$$

(ở đây f là hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$, ψ liên tục trên đoạn $[a,b]\times[a,b]$). Đặt $M = \max\{|\psi(x,s)| : (x,s) \in [a,b]\times[a,b]\}$. Nếu $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ thì phương trình trên có nghiệm duy nhất

Thật vậy, xét ánh xạ $T : C[a,b] \to [a,b]$ cho bởi công thức

$$T(\varphi)(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b \psi(x,s)\varphi(s)ds$$

Với bất kì $\varphi, \eta \in C[a,b]$, ta có

$$\begin{aligned}
d\big(T(\varphi), T(\eta)\big) &= \sup_{x\in[a,b]} |\lambda \int\limits_a^b \psi(x,s)\big(\varphi(s) - \eta(s)\big)| \\
&\le \sup_{x\in[a,b]} |\lambda| \int\limits_a^b |\psi(x,s)||\varphi(s) - \eta(s)|ds \\
&\le |\lambda| M \int\limits_a^b |\varphi(s) - \eta(s)|ds \\
&\le |\lambda| M \int\limits_a^b d(\varphi,\eta)ds = |\lambda| M(b-a)d(\varphi,\eta)
\end{aligned}$$

Mà $|\lambda|M(b-a) < 1$ nên T là ánh xạ co đi từ $C[a,b]$ vào chính nó. Theo nguyên lí ánh xạ co Banach tồn tại duy nhất φ, sao cho

$$T\varphi = \varphi,$$

tức là

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b \psi(x,s)\varphi(s)ds$$

3.1.3 Ứng dụng của nguyên lý ánh xạ co vào giải một số bài toán về dãy số

Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_n = f(x_{n-1}), n \geq 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

Dãy số này hoàn toàn xác định nếu biết x_0, và f. Một đặc điểm quan trọng của dãy số này là nếu nó hội tụ về x thì $f(x) = x$ (với giả thiết f liên tục).

Nếu X là tập con đóng trong $\mathbb{R}, x_0 \in X$, và $f : X \to X$ là ánh xạ co. Theo chứng minh nguyên lí ánh xạ co Banach dãy số đã cho sẽ hội tụ đến điểm bất động duy nhất của ánh xạ f.

Trong phần dưới đây tập X mà chúng ta xét có một trong các dạng $X = \mathbb{R}, X = [a, b], X = [a, +\infty)$.

Bổ đề 3.1.1. *Nếu ánh xạ $f : X \to X$ khả vi trên X sao cho*

$$\sup_{x \in X} |f^{'}(x)| < 1$$

thì f là ánh xạ co.

Chứng minh. Đặt $k = \sup\limits_{x \in X} |f^{'}(x)|$. Khi đó $|f^{'}(x)| \leq k, \forall x \in X$
Với $x, y \in X, x \neq y$, không mất tính tổng quát giả sử $x < y$.
Vì f khả vi trên X nên f khả vi trên đoạn $[x, y]$ (giả sử $x < y$). Theo định lí Lagrange tồn tại $c \in (x, y)$ sao cho

$$f(x) - f(y) = f^{'}(c)(x - y)$$

suy ra

$$|f(x) - f(y)| = |f^{'}(c)||(x - y)| \leq k|x - y|, \forall x, y \in D, x \neq y \tag{3.3}$$

Mặt khác, hiển nhiên(3.3) đúng khi $x = y$.
Do đó

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \forall x, y \in X \tag{3.4}$$

Vì $k < 1$ nên f là ánh xạ co từ X vào chính nó. $\square$

Để tìm giới hạn của dãy số dạng (3.2) ta làm như sau

Bước 1: Chứng minh f là ánh xạ co

Cách 1: Đánh giá $|f(x) - f(y)|$ theo $|x - y|$, tìm $0 \leq k < 1$ sao cho

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \forall x, y \in X$$

Cách 2: Nếu f khả vi trên X, sử dụng bổ đề 3.1.1

- Tính $|f^{'}(x)|, x \in X$
- Chứng minh $k = \sup\limits_{x \in X} |f^{'}(x)| < 1$

Bước 2 Giải phương trình $f(x) = x$ trên X tìm được nghiệm duy nhất x^*.

Bước 3: Kết luận: Dãy đã cho hội tụ, và giới hạn của dãy là x^*.

Ví dụ 3.1.2. *Chứng minh dãy số $\{x_n\}$sau hội tụ và tìm giới hạn của dãy*

$$2, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, \cdots$$

Lời giải

Đặt $X = [2, +\infty)$. Khi đó X là tập con đóng của đường thẳng thực. Xét hàm số $f : X \to X$ xác định bởi

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x}, x \in X$$

Khi đó, dãy số đã cho được xác định bởi

$$\begin{cases} x_0 = 2 \in X \\ x_n = f(x_{n-1}), n \geq 1 \end{cases} \tag{3.5}$$

Với bất kì $x, y \in X$, ta có

$$|f(x) - f(y)| = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = \frac{|x - y|}{xy} \leq \frac{1}{4}|x - y|$$

Do đó f là ánh xạ co từ X vào chính nó. Theo nguyên lí ánh xạ co Banach f có duy nhất điểm bất động x^*, và x^* là giới hạn của dãy ban đầu

Phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất $x = 1 + \sqrt{2}$.
Vậy
$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 + \sqrt{2}.$$
Sau đây ta có bài toán tổng quát của bài toán trên

Ví dụ 3.1.3. ***(Tổng quát):*** *Với $a > 1$ cho trước. Chứng minh dãy số sau hội tụ và tìm giới hạn của dãy*
$$a, a + \frac{1}{a}, a + \frac{1}{a + \frac{1}{a}}, a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a}}} \cdots$$

Lời giải

$X = [a, +\infty)$ là tập con đóng trong $\mathbb{R}$.
xét ánh xạ $f : X \to X$ xác định bởi $f(x) = a + \dfrac{1}{x}, x \in X$
Khi đó, dãy số đã cho xác định bởi
$$\begin{cases} x_0 = a \in X \\ x_n = f(x_{n-1}), n \geq 1 \end{cases} \tag{3.6}$$
Ta có
$$|f(x) - f(y)| = \frac{|x-y|}{xy} \leq \frac{1}{a^2}|x - y|, \forall x, y \in X$$
Với $a > 1$ thì $k = \dfrac{1}{a^2} < 1$ nên f là ánh xạ co từ X vào chính nó. Do đó dãy số đã cho hội tụ đến điểm bất động duy nhất của f.
Phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất trên X là $x = \dfrac{a + \sqrt{a^2+4}}{2}$.
Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{a + \sqrt{a^2+4}}{2}$.

Ví dụ 3.1.4. *Cho dãy số $\{x_n\}_{n\geq 1}$ như sau*
$$\begin{cases} x_1 = b \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = \dfrac{2009}{3}\ln({x_n}^2 + 2009^2) - 2009^2, \forall n = 1, 2, \cdots, \end{cases} \tag{3.7}$$
Chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$

Lời giải

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{2009}{3}\ln(x^2 + 2009^2) - 2009^2, x \in \mathbb{R}$$

Khi đó, dãy số đã cho xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = b \in \mathbb{R} \\ x_n = f(x_{n-1}), n \geq 2 \end{cases} \tag{3.8}$$

Ta có

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \frac{2009}{3}\frac{2|x|}{x^2 + 2009^2} \\ &\leq \frac{2009}{3}\frac{2|x|}{2 \times 2009|x|} = \frac{1}{3} < 1, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Do đó f là ánh xạ co từ đường thẳng thực vào chính nó. Vì vậy, dãy số đã cho hội tụ đến điểm bất động duy nhất của f

Ví dụ 3.1.5. *Cho $a > 0$, dãy $\{x_n\}_{n\geq 1}$ xác định như sau*

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = \log_3({x_n}^3 + 1)^{\frac{1}{3}} + \dfrac{4}{3}, n \geq 1 \end{cases} \tag{3.9}$$

Chứng minh dãy số đã cho hội tụ và tìm giới hạn của dãy.

Lời giải

Tập $X = [0, +\infty)$ là tập con đóng của đường thẳng thực.
Đăt

$$f(x) = \log_3(x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}, x \in X.$$

Khi đó dãy số đã cho được xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = a \in X \\ x_{n+1} = f(x_n), n \geq 1 \end{cases} \tag{3.10}$$

Ta có

$$|f'(x)| = \frac{x^2}{(x^3 + 1)\ln 3}, \forall x \in X$$

Mà

$$x^3 + 1 = \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2} + 1 \geq \frac{3x^2}{\sqrt[3]{4}}, \forall x \in X$$

Suy ra

$$|f^{'}(x)| \leq \frac{\sqrt[3]{4}}{3\ln 3} < 1, \forall x \in X$$

Do đó f là ánh xạ co đi từ Xvào chính nó. Theo nguyên lí ánh xạ co Banach dãy số đã cho hội tụ đến điểm bất động duy nhất của f.
Dễ thấy $x = 2 \in X$ thoả mãn phương trình $f(x) = x$.
Vậy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2$$

Ví dụ 3.1.6. *Chứng minh dãy số sau hội tụ và tìm giới hạn của dãy*

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{2} \\ x_n = \dfrac{1}{5}\sin x_{n-1}, n \geq 1 \end{cases} \tag{3.11}$$

Lời giải

Chú ý: $|\sin x| \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$
Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{5}\sin x, x \in \mathbb{R}$.
Khi đó, dãy số đã cho xác định bởi

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{2} \in X \\ x_n = \dfrac{1}{5} f(x_{n-1}), n \geq 1 \end{cases} \tag{3.12}$$

Với $x, y \in \mathbb{R}$ tuỳ ý, ta có

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |\frac{1}{5}\sin x - \frac{1}{5}\sin y| \\ &= \frac{2}{5}|\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}| \end{aligned}$$

Mặt khác

$$|\sin\frac{x-y}{2}| \leq \frac{|x-y|}{2}, |\cos\frac{x+y}{2}| \leq 1$$

Suy ra

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{5}|x-y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Do đó f là ánh xạ co từ đường thẳng thực vào chính nó. Theo nguyên lí ánh xạ co Banach, dãy số đã cho hội tụ đến điểm bất động duy nhất của ánh xạ f.

Dễ thấy phương trình $\frac{1}{5}\sin x = x$ nhận $x = 0$ là nghiệm

Vậy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

Tổng quát: Cho $a, b \in \mathbb{R}$, trong đó $|a| < 1$. Khi đó dãy số

$$\begin{cases} x_0 = b \\ x_n = a\sin x_{n-1}, n \geq 1 \end{cases} \tag{3.13}$$

có giới hạn bằng 0

Thật vậy, làm tương tự như ví dụ 3.1.6 với $f(x) = a\sin x, x \in \mathbb{R}$

Ví dụ 3.1.7. *Tìm giới hạn của dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{6} \\ x_n = \frac{1}{3}\sin x_{n-1}^2, n \geq 1 \end{cases} \tag{3.14}$$

Lời giải

Dễ thấy.

$$-\frac{1}{3} \leq x_n \leq \frac{1}{3}, \forall n \geq 0$$

Đặt $X = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$. Khi đó, X là tập con đóng trong $\mathbb{R}$

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{1}{3}\sin x^2, x \in X$$

Khi đó, dãy số đã cho xác định bởi

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_n = f(x_{n-1}), n \geq 1 \end{cases} \tag{3.15}$$

Với $x, y \in X$, ta có

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \frac{1}{3}|\sin x^2 - \sin y^2| \\ &= \frac{2}{3}|\sin\frac{x^2 - y^2}{2}\cos\frac{x^2 + y^2}{2}| \end{aligned}$$

Mặt khác

$$|\sin\frac{x^2-y^2}{2}| \le \frac{|x^2-y^2|}{2}, |\cos\frac{x^2+y^2}{2}| \le 1$$

Do đó

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &\le \frac{1}{3}|(x^2-y^2)| \\ &= \frac{1}{3}|x-y||x+y| \le \frac{1}{3}|x-y|[|x|+|y|] \le \frac{2}{9}|x-y|\end{aligned}$$

Vì $\frac{2}{9} < 1$ nên f là ánh xạ co từ X vào chính nó. Theo nguyên lí ánh xạ co Banach dãy số đã cho hội tụ đến điểm bất động duy nhất của f.
Dễ thấy phương trình $\frac{1}{3}\sin x^2 = x$ nhận $x = 0 \in X$ là nghiệm.
Vậy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

Ví dụ 3.1.8. *Cho dãy số $\{u_n\}$ được xác định như sau*

$$\begin{cases} u_0 = -2010 \\ u_n = \sin^2(u_{n-1}+3) - 2011, n \ge 1 \end{cases} \tag{3.16}$$

Chứng minh dãy số đã cho hội tụ.

Lời giải

Dễ thấy

$$-2011 \le u_{n+1} \le -2010, \forall n \ge 0$$

Tập $X = [-2011, -2010]$ là tập con đóng trong đường thẳng thực.
Xát ánh xạ $f : X \to X$ xác định bởi

$$f(x) = \sin^2(x+3) - 2011, x \in X$$

Khi đó, dãy số đã cho xác định bởi

$$\begin{cases} u_0 \in X \\ u_n = f(u_{n-1}), n \ge 1 \end{cases} \tag{3.17}$$

Ta có $|f^{'}(x)| = |\sin(2x+6)|, \forall x \in X$
Vì $|f^{'}(x)|$ là hàm liên tục trên đoạn $[-2011, -2010]$ nên nó đạt được giá

trị lớn nhất trên đoạn đó
Đặt

$$\alpha = \max_{x\in[-2011,-2010]} |\sin(2x+6)|$$

Rõ ràng $\alpha \leq 1$. Ta sẽ chỉ ra $\alpha < 1$. Xét phương trình

$$\begin{aligned}|\sin(2x+6)| = 1 &\Leftrightarrow \cos(2x+6) = 0\\ &\Leftrightarrow 2x+6 = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} - 3 + \frac{k\pi}{2}\end{aligned}$$

Mặt khác, $\nexists k \in \mathbb{Z}$ sao cho $\frac{\pi}{4} - 3 + \frac{k\pi}{2} \in [-2011, -2010]$
Suy ra

$$|f^{'}(x)| \leq \alpha < 1, \forall x \in X$$

Do đó f là ánh xạ co từ X vào chính nó. Theo nguyên lí ánh xạ co Banach dãy số đã cho hội tụ đến điểm bất động duy nhất của f

Ví dụ 3.1.9. *Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định như sau*

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{2} \\ x_n = \ln(1 + e^{-x_{n-1}}), \forall n \geq 1 \end{cases} \tag{3.18}$$

Chứng minh dãy số đã cho hội tụ và tìm giới hạn của dãy.

Lời giải

Tập $X = [0, +\infty)$ là tập con đóng trong đường thẳng thực.
Xét hàm số $f : X \to X$ xác định bởi

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x}), x \in X$$

Khi đó, dãy số đã cho xác định bởi

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_n = f(x_{n-1}), \forall n \geq 1 \end{cases} \tag{3.19}$$

Ta có

$$f^{'}(x)| = |\frac{-e^x}{1+e^{-x}}| = \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}, \forall x \in X$$

Do đó f là ánh xạ co từ X vào chính nó. Theo nguyên lí ánh xạ co Banach dãy số đã cho có giới hạn là điểm bất động duy nhất của f
Xét phương trình sau trên X

$$\begin{aligned}\ln(1+e^{-x}) = x &\Leftrightarrow 1+e^{-x} = e^x \\ &\Leftrightarrow e^{2x} - e^x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})(\text{thoả mãn})\end{aligned}$$

Vậy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2}).$$

Ví dụ 3.1.10. *Cho* $a \geq \dfrac{1}{4}$. *Tìm giới hạn của dãy số* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *sau*

$$x_n = \underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}}_{n \text{ dấu căn}}$$

Lời giải

Tập $X = [\sqrt{a}, +\infty)$ là tập con đóng của đường thẳng thực.
Xét hàm số $f : X \to X$ xác định bởi

$$f(x) = \sqrt{a+x}, x \in X$$

Khi đó, dãy số đã cho xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{a} \in X \\ x_n = f(x_{n-1}), \forall n \geq 2 \end{cases} \tag{3.20}$$

Với bất kì $x, y \in X$, ta có

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= |\sqrt{a+x} - \sqrt{a+y}| \\ &= \frac{|x-y|}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a+y}} \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{a+\sqrt{a}}}|x-y|\end{aligned}$$

Với $a \geq \dfrac{1}{4}$ thì $k = \dfrac{1}{2\sqrt{a+\sqrt{a}}} < \dfrac{1}{2\sqrt{a}} < 1.$

Do đó f là ánh xạ co đi từ X vào chính nó. Theo nguyên lí ánh xạ co Banach dãy số đã cho có giới hạn là điểm bất động duy nhất của f.

Giải phương trình sau trên X

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{a+x} = x$$

ta được nghiệm $x = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

Vậy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

Ví dụ 3.1.11. *Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định như sau*

$$\begin{cases} x_1 = 10 \\ x_n = \dfrac{1}{5}\ln(1+x_{n-1}^6), n \geq 2 \end{cases} \tag{3.21}$$

Tìm giới hạn của dãy số đã cho.

Lời giải

Tập $X = [0, +\infty)$ là tập con đóng trong đường thẳng thực

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{5}\ln(1+x^6), x \in X$

Khi đó, dãy số đã cho xác đinh bởi

$$\begin{cases} x_1 \in X \\ x_n = f(x_{n-1}), n \geq 2 \end{cases} \tag{3.22}$$

Ta có

$$|f^{'}(x)| = \frac{6x^5}{5(1+x^6)}, x \in X$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} 1 + x^6 &= 1 + \frac{x^6}{5} + \frac{x^6}{5} + \frac{x^6}{5} + \frac{x^6}{5} + \frac{x^6}{5} \\ &\geq 6\sqrt[6]{\frac{x^{30}}{5^5}} = 6\frac{x^5}{\sqrt[6]{5^5}}, \forall x \in X \end{aligned}$$

Do đó

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt[6]{5}} < 1, \forall x \in X.$$

Do đó f là ánh xạ co đi từ X vào chính nó. Theo nguyên lí ánh xạ co Banach dãy số đã cho hội tụ đến điểm bất động duy nhất của f.
Dễ thấy $x = 0 \in X$ thoả mãn $\frac{1}{5}\ln(1+x^6) = x$.
Vậy dãy số đã cho có giới hạn bằng 0.

3.1.4 Dùng nguyên lý ánh xạ co vào giải toán

Bài tập 3.1.12. *Xét hệ phương trình tuyến tính n ẩn*

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i, i = 1, 2, \cdots, n,$$

trong đó $a_{ij}, b_i (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ *là những số thực cho trước. Chứng minh rằng hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất nếu một trong những điều kiện sau thoả mãn:*

1) $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq \alpha < 1, i = 1, 2, \cdots, n;$

2) $\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leq \alpha < 1, j = 1, 2, \cdots, n;$

3) $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \leq \alpha < 1$

Chứng minh. Xét ánh xạ $f : (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^n, d)$ cho bởi

$$f(x) = Ax + b, \text{ ở đó } A = (a_{ij})_{n\times n}, b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$$

, trong các trường hợp sau
1) $d_1(x, y) = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$.
Khi đó, $(\mathbb{R}^n, d_1)$ là không gian metric đầy. Với 2 điểm bất kì

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ trong $\mathbb{R}^n$, ta có

$$\begin{aligned}
d_1(f(x), f(y)) &= \max_{1 \le i \le n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - y_j)| \\
&\le \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j - y_j| \\
&\le \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| d_1(x, y) \le \alpha d_1(x, y)
\end{aligned}$$

Mà $\alpha < 1$ nên f là ánh xạ co. Theo nguyên lí ánh xạ co Banach f có duy nhất điểm bất động. Do đó hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

2) $d_2(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.

Khi đó, $(\mathbb{R}^n, d_2)$ là không gian metric đầy. Với 2 điểm bất kì $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ trong $\mathbb{R}^n$, ta có

$$\begin{aligned}
d_2(f(x), f(y)) &= \sum_{i=1}^{n} |a_{i1}(x_1 - y_1) + a_{i2}(x_2 - y_2) + \cdots + a_{in}(x_n - y_n)| \\
&\le (\sum_{i=1}^{n} |a_{i1}||x_1 - y_1| + |a_{i2}||x_2 - y_2| + \cdots + |a_{in}||x_n - y_n|) \\
&\le (\sum_{i=1}^{n} |a_{i1}|)|x_1 - y_1| + (\sum_{i=1}^{n} |a_{i2}|)|x_2 - y_2| + \cdots + \\
&\qquad + (\sum_{i=1}^{n} |a_{in}|)|x_n - y_n| \\
&\le \alpha d_2(x, y)|
\end{aligned}$$

Mà $\sqrt{\alpha} < 1$ nên f là ánh xạ co. Theo nguyên lí ánh xạ co Banach f có duy nhất điểm bất động. Do đó hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

3) $d_3(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$.

Khi đó, $(\mathbb{R}^n, d_3)$ là không gian metric đầy. Với 2 điểm bất kì

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ trong $\mathbb{R}^n$, ta có

$$\begin{aligned} d_3(f(x), f(y)) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_{i1}(x_1 - y_1) + a_{i2}(x_2 - y_2) + \cdots + a_{in}(x_n - y_n)|^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2} \leq \sqrt{\alpha} d_3(x, y) \end{aligned}$$

Mà $\sqrt{\alpha} < 1$ nên f là ánh xạ co. Theo nguyên lí ánh xạ co Banach f có duy nhất điểm bất động. Do đó hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất. □

Bài tập 3.1.13. *Cho (X, d) là không gian metric đầy. Giả sử $f : X \to X$ là ánh xạ thoả mãn f^N là ánh xạ co với N nguyên dương nào đó. Chứng minh rằng f có duy nhất một điểm bất động.*

Lời giải

Theo nguyên lí ánh xạ co Banach f^N có duy nhất điểm bất động x
Ta có

$$f^{N+1}(x) = f\big(f^N(x)\big) = f(x)$$

Do đó

$$f^N\big(f(x)\big) = f(x)$$

nên $f(x)$ cũng là điểm bất động của f^N.
Vì điểm bất động của f^N là duy nhất nên $f(x) = x$
Giả sử y cũng là điểm bất động của f, tức là f(y)=y.
Khi đó

$$\begin{aligned} &f^2(y) = f\big(f(y)\big) = f(y) = y, \\ &f^3(y) = f\big(f^2(y)\big) = f(y) = y, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &f^N(y) = y \end{aligned}$$

Do đó y cũng là điểm bất động của f^N. Do tính duy nhất điểm bất động của f^N nên $x = y$. Vậy f có duy nhất điểm bất động.

Bài tập 3.1.14. *Cho hàm số $x(t)$ khả vi trên đoạn $[0,1]$ thoả mãn các điều kiện:*

$$0 \le x(t) \le 1, 0 \le x^{'}(t) \le \frac{1}{2}, \forall t \in [0,1]$$

Xét sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình $x(t) - t = 0$ trên đoạn $[0,1]$

Lời giải

Đoạn $[0,1]$ là tập con đóng của đường thẳng thực.
Hàm số $x : [0,1] \to [0,1]$ khả vi trên đoạn $[0,1]$.
Từ giả thiết ta có

$$\sup_{t \in [0,1]} |x^{'}(t)| < 1$$

Theo bổ đề 3.1.1 x là ánh xạ co đi từ $[0,1]$ vào chính nó. Theo nguyên lí ánh xạ co Banach x có duy nhất điểm bất động. Do đó phương trình $x(t) - t = 0$ có duy nhất nghiệm trên đoạn $[0,1]$.

Bài tập 3.1.15. *Cho ánh xạ $T : C[0,1] \to C[0,1]$ xác định bởi*

$$T(f)(x) = e^x + \frac{1}{2}\int\limits_0^{x^2} f(t)dt$$

Hãy chứng tỏ rằng tồn tại duy nhất một hàm khả vi f trên đoạn $[0,1]$ thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} f^{'}(x) = e^x + xf(x^2) \\ f(0) = 1 \end{cases} \tag{3.23}$$

Lời giải.

Với mọi $f, g \in C[0,1]$ ta có

$$\begin{aligned} d\big(T(f), T(g)\big) &= \sup_{x \in [0,1]} |T(f)(x) - T(g)(x)| \\ &\le \sup_{x \in [0,1]} \frac{1}{2}\int\limits_0^{x^2} |f(t) - g(t)|dt \\ &\le \frac{1}{2}\int\limits_0^{1} |f(t) - g(t)|dt \le \frac{1}{2}d(f,g) \end{aligned}$$

Vì $k = \dfrac{1}{2} < 1$ nên T là ánh xạ co từ $C[0,1]$ vào chính nó. Theo nguyên lí ánh xạ co Banach tồn tại duy nhất một hàm $f \in C[0,1]$ thoả mãn $T(f) = f$,tức là

$$f(x) = e^x + \frac{1}{2}\int\limits_0^{x^2} f(t)dt$$

Từ đây suy ra f là hàm khả vi và thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} f^{'}(x) = e^x + xf(x^2) \\ f(0) = 1 \end{cases} \tag{3.24}$$

Nếu g là một hàm thoả mãn điều kiện trên thì

$$g(x) = e^x + \frac{1}{2}\int\limits_0^{x^2} g(t)dt$$

tức là $T(g) = g$. Như vậy g là điểm bất động của ánh xạ T. Vì T có duy nhất điểm bất động nên ta có $f = g$.

3.2 Xây dựng một số bài toán liên quan đến điểm bất động

Bài tập 3.2.1. *Giải phương trình sau*

$$\sin x^4 = 2x$$

Lời giải

Dễ thấy nếu x là nghiệm của phương trình thì $x \in [-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}]$.
Đặt $X = [-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}]$. Tập X là tập con đóng của đường thẳng thực.
Xét ánh xạ $f : X \to X$ xác định bởi

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin x^4, x \in X$$

Lấy bất kì $x, y \in X$, ta có

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| = \frac{1}{2}|\sin x^4 - \sin y^4| &\leq \frac{1}{2}|x^4-y^4| \\ &= \frac{1}{2}|x-y||x+y||x^2+y^2| \\ &\leq \frac{1}{2}|x-y|(|x|+|y|)(x^2+y^2) \leq \frac{1}{4}|x-y|\end{aligned}$$

Vì $\frac{1}{4} < 1$ nên f là ánh xạ co. Theo nguyên lí ánh xạ co Banach f có duy nhất điểm bất động. Do đó phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.
Dễ thấy $x = 0$ thoả mãn phương trình.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bài tập 3.2.2. *Giải phương trình sau*

$$e^{-sin^2 x} - 1 - x = 0$$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$e^{-sin^2 x} - 1 = x$$

Vì $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ nên $\frac{1}{e} \leq e^{-\sin^2 x} \leq 1$.
Do đó nếu phương trình đã cho có nghiệm thì

$$\frac{1}{e} - 1 \leq x \leq 0$$

Tập $X = [\frac{1}{e} - 1, 0big]$ là tập con đóng trong đường thẳng thực.
Xét hàm số $f : X \to X$ xác định bởi

$$f(x) = e^{-\sin^2 x} - 1, x \in X$$

Ta có

$$|f^{'}(x)| = |-e^{-\sin^2 x}\sin 2x| = e^{-\sin^2 x}|\sin 2x|, x \in X$$

Vì $|f^{'}(x)|$ liên tục trên $X = \left[\frac{1}{e} - 1, 0\right]$ nên nó đạt được giá trị lớn nhất trên X. Đặt

$$k = \max_{x \in \left[\frac{1}{e} - 1, 0\right]} |f^{'}(x)|$$

Ta có
$$0 < e^{-\sin^2 x} \leq 1, 0 \leq |\sin 2x| < 1, \forall x \in X$$
Suy ra
$$e^{-\sin^2 x}|\sin 2x| < 1, \forall x \in X$$
Do đó $k < 1$. Vì vậy f là ánh xạ co đi từ X vào chính nó. Theo nguyên lí ánh xạ co Banach f có duy nhất điểm bất động. Do đó phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Dễ thấy $x = 0 \in X$ thoả mãn phương trình. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$

Bài tập 3.2.3. *Một ánh xạ đi từ không gian metric đầy vào chính nó có duy nhất điểm bất động có phải là ánh xạ co không?*

Lời giải

Ánh xạ f có thể không là ánh xạ co.

Thật vậy, xét $X = \big[0, \dfrac{3}{4}\big]$ với metric cảm sinh bởi metric thông thường trên $\mathbb{R}$. Vì X đóng trong $\mathbb{R}$ nên X là đầy

Ta xác định ánh xạ $f : X \to X$ xác định bởi $f(x) = x^2, x \in X$

Phương trình $f(x) = x$ trên X có nghiệm duy nhất $x = 0$ nên f có duy nhất điểm bất động.

Tuy nhiên f không phải là ánh xạ co, vì nếu ngược lại f là ánh xạ co sẽ tồn tại $k \in [0, 1)$ sao cho
$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \forall x, y \in X$$
Lấy $x = \dfrac{3}{4}, y = \dfrac{1}{2}$ ta thu được
$$|(\frac{3}{4})^2 - (\frac{1}{2})^2| \leq k|\frac{3}{4} - \frac{1}{2}|$$
Suy ra $k \geq \dfrac{5}{4} > 1$, mâu thuẫn $0 \leq k < 1$. Do đó f không phải là ánh xạ co.

Bài tập 3.2.4. *Cho (X, d) là không gian metric đầy. Giả sử $f : X \to X$ là ánh xạ thoả mãn*
$$d\big(f(x), f(y)\big) < d(x, y) - \ln\big(1 + d(x, y)\big), \forall x \neq y$$
Chứng minh f có duy nhất điểm bất động.

Lời giải

Xét ánh xạ $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ xác định bởi

$$\phi(t) = \ln(1 + t), t \in [0, +\infty)$$

Dễ thấy ánh xạ ϕ liên tục thoả mãn các điều kiện
(i) $\phi(t) = 0$ nếu và chỉ nếu $t = 0$
ii) ϕ không giảm, vì

$$\phi^{'}(t) = \frac{1}{t+1} > 0, \forall t \geq 0$$

Ánh xạ f thoả mãn

$$d\big(f(x), f(y)\big) < d(x, y) - \phi\big(d(x, y)\big), \forall x \neq y$$

Do đó, theo định lí 2.2.3 f có duy nhất điểm bất động.

Bài tập 3.2.5. *Cho ánh xạ A xác định trên nửa khoảng $[2, +\infty)$ vào chính nó bởi công thức $A(x) = x + \dfrac{1}{x}$. A có phải là ánh xạ co không? Vì sao?*

Lời giải

Tập$X = [2, +\infty)$ là tập con đóng trong đường thẳng thực. Do đó X cùng với metric cảm sinh bởi metric thông thường trên đường thẳng thực là không gian metric đầy.
Giả sử f là ánh xạ co. Khi đó, theo nguyên lí ánh xạ co Banach f có duy nhất điểm bất động x^*. Tuy nhiên, phương trình

$$x + \frac{1}{x} = x \text{ vô nghiệm trên } X$$

Do đó f không phải là ánh xạ co

Bài tập 3.2.6. *Lấy ví dụ về một không gian metric đầy X mà mọi ánh xạ liên tục đi từ X vào chính nó đều có điểm bất động? Điểm bất động này có duy nhất không?*

Lời giải

$X = [0,1]$ với metric cảm sinh bởi metric thông thường trên đường thẳng thực là không gian metric đầy.
Giả sử $f : [0,1] \to [0,1]$ là ánh xạ liên tục. Xét hàm số

$$g(x) = f(x) - x, x \in [0,1]$$

Vì f liên tục trên đoạn $[0,1]$ nên g liên tục trên đoạn $[0,1]$.
Mặt khác

$$g(0)g(1) = \big(f(0) - 0\big)\big(f(1) - 1\big) \leq 0$$

Suy ra, tồn tại $c \in [0,1]$ sao cho $g(c) = 0$, tức là $f(c) = c$. Do đó c là điểm bất động của ánh xạ f.
Điểm bất động của f có thể không duy nhất, chẳng hạn xét $f : [0,1] \to [0,1]$ xác định bởi $f(x) = x^2, x \in [0,1]$, thì f có 2 điểm bất động là $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Bài tập 3.2.7. *Cho dãy số*

$$5, 5 + \frac{1}{5}, 5 + \frac{1}{5 + \frac{1}{5}}, 5 + \frac{1}{5 + \frac{1}{5 + \frac{1}{5}}}, \cdots$$

Chứng minh dãy số có giới hạn hữn hạn và tìm giới hạn của dãy.

Lời giải

Áp dụng ví dụ 3.1.3, với $a = 5 > 1$, dãy số đã cho hội tụ và có giới hạn là

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$$

Bài tập 3.2.8. *Lấy ví dụ về một không gian metric đủ (X, d) mà mọi ánh xạ $X \to X$ thoả mãn*

$$d\big(f(x), f(y)\big) < d(x,y), x \neq y$$

đều có duy nhất điểm bất động.

Lời giải

Lấy $X = \mathbb{R}$, d là metric rời rạc trên X, tức là

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x = y \\ 1 & \text{nếu } x \neq y \end{cases}$$

Ta sẽ chỉ ra (X,d) là đầy. Thật vậy, giả sử dãy Cauchy $\{x_n\}$ trong (X,d). Khi đó, tồn tại n_0 sao cho

$$\begin{aligned} &d(x_m,x_n) < 1, \forall m,n \geq n_0 \\ \Rightarrow &d(x_m,x_n) = 0, \forall m,n \geq n_0 \\ \Rightarrow &x_m = x_n, \forall m,n \geq n_0 \Rightarrow x_n = x_{n_0}, \forall n \geq n_0 \end{aligned}$$

Vì vậy dãy $\{x_n\}$ hội tụ. Do đó (X,d) là không gian metric đầy.
Với $x \neq y$ theo giả thiết ta có

$$d\big(f(x), f(y)\big) < d(x,y) = 1 \Rightarrow f(x) = f(y)$$

Do đó, f là ánh xạ hằng. Vì vậy f có duy nhất điểm bất động.

Bài tập 3.2.9. *Cho (X,ρ) là không gian siêu metric đầy, $f : X \to X$ là ánh xạ thoả mãn*

$$\rho\big(f(x), f(y)\big) \leq \rho(x,y) \ln\big(\rho(x,y) + 1\big), \forall x,y \in X$$

Chứng minh f có duy nhất điểm bất động.

Lời giải

Xét ánh xạ $\phi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ xác đinh bởi

$$\phi(t) = \ln(t+1), t \geq 0$$

Dễ thấy ϕ là ánh xạ liên tục. Ngoài ra ϕ thoả mãn các điều kiện
(i) $\phi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$
(ii) $\phi(t) < t, \forall t > 0$
Thật vậy hàm $g(t) = \ln(1+t) - t, t \in (0,+\infty)$ có đạo hàm

$$g^{'}(t) = \frac{-t}{1+t} < 0, \forall t > 0$$

Do đó

$$g(t) < g(0) = 0, \forall t > 0$$

Theo định lí 2.4.2 f có duy nhất điểm bất động.

Bài tập 3.2.10. *Tìm giới hạn của dãy số* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *sau:*

$$x_n = \underbrace{\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{3}}}}}_{n \text{ dấu căn}}$$

Lời giải

Áp dụng ví dụ 3.1.10 trong trường hợp $a = 3$. Dãy số đã cho có giới hạn là $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Bài tập 3.2.11. *Giả sử* $f : [a, b] \to [a, b]$ *là một hàm số thoả mãn điều kiện*

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|, \forall x, y \in [a, b], x \neq y$$

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ *có nghiệm duy nhất.*

Lời giải

Tập $X = [a, b]$ là tập con compact trong đường thẳng thực. Do đó X cùng với metric cảm sinh bởi metric thông thường trên $\mathbb{R}$ là không gian metric compact.

Mặt khác, ánh xạ f thoả mãn $|f(x)-f(y)| < |x-y|, \forall x, y \in X, x \neq y$ nên theo định lí 2.1.8 f có duy nhất điểm bất động. Vì vậy phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất.

KẾT LUẬN

Kết quả đã đạt được

Đề tài tập trung vào việc nghiên cứu một số định lý điểm bất động trong không gian metric đầy và các ứng dụng của chúng, và đã đạt được kết quả như sau:

- Xây dựng một số định lí điểm bất động trong không gian siêu metric đầy. Cụ thể là định lý 2.4.2 và định lý 2.4.3.

- Nêu được một số ứng dụng của nguyên lý ánh xạ co Banach trong các bài toán sơ cấp về dãy số, về giải phương trình, cũng như giải một số bài toán cao cấp.

- Xây dựng một số bài toán liên quan đến điểm bất động.

Hướng phát triển đề tài

- Tìm ví dụ minh hoạ cho các kết quả chính.

- Nghiên cứu định lí điểm bất động theo hướng: Đặt các điều kiện trên hàm f, cũng như xét trong lớp không gian metric đầy đặc biệt như không gian Banach, hoặc trong mở rộng không gian: không gian metric nón, không gian kiểu metric.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Khuê, Bùi Đắc Tắc - Đỗ Đức Thái, *Cơ sở lý thuyết hàm và giải tích hàm*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2001.

[2] Cung Thế Anh - Nguyễn Thành Anh, *Giáo trình TôPô đại cương*, Nhà xuất bản Đại học sư phạm, 2011.

[3] Đỗ Hồng Tân - Nguyễn Thi Thanh Hà, *Các định lí điểm bất động*, Nhà xuất bản Đại học sư phạm Hà Nội, 2003.

[4] Nguyễn Tài Chung, *Bồi dưỡng học sinh giỏi chuyên khảo dãy số*, Nhà xuất bản Đại học Quốc Gia Hà Nội, 2003.

[5] B.H.Tân and H.D. Vương,*On eventually and asymptotically Lipschitz mappings*, Vietnam J. Math. 30 (2002), 31 - 42.

[6] B.E. Rhoades,*Some theorems on weakly contractive maps*, Nonlinear Analysis 47 (2001), 2683 - 2693.

[7] Mohamed A. Khamsi, *Remarks on Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of Contractive Mappings*, Spinger - Verlag NewYork, 2010.

[8] Binayak S. Choudhury*, N. Metiya, *Fixed points of weak contractions in cone metric spaces*, Nonlinear Analysis 72 (2010), 1589 - 1593.

[9] Huang Long - Guang, Zhang Xian*, Gani T. Stamov,*Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*, J. Math. Anal. Appl. 332 (2007), 1468 - 1476.

[10] M.A. Geraghty, *On contractive mappings*, Proc, Amer. Math. Soc. 40(1973), 604 - 608.

[11] J.J.Neito, R.R.Lopez, *Contractive mapping theorems in partially or dered sets and application to ordinary differential equation*, Order 22 (2005), 223 - 239.