

ỦY BAN NHÂN DÂN TỈNH NINH BÌNH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ

_____ * _____

ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP TRƯỜNG

DÁNG ĐIỀU TIỆM CẬN NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH
HYPERBOLIC TẮT DẦN CHỨA TOÁN TỬ GRUSHIN

CHỦ NHIỆM ĐỀ TÀI: DƯƠNG TRỌNG LUYỆN
ĐƠN VỊ CÔNG TÁC: KHOA TỰ NHIÊN

NINH BÌNH - 2017

ỦY BAN NHÂN DÂN TỈNH NINH BÌNH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ

_____ * _____

ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP TRƯỜNG

DÁNG ĐIỀU TIỆM CẬN NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH
HYPERBOLIC TẮT DẦN CHỨA TOÁN TỬ GRUSHIN

Chủ nhiệm đề tài: Dương Trọng Luyện

Thành viên: Phạm Văn Cường

Dương Thu Hương

Ninh Bình- 2017

THÔNG TIN CHUNG VỀ ĐỀ TÀI

1. Tên đề tài

Dáng điệu tiệm cận nghiệm của phương trình Hyperbolic tắt dần chứa toán tử Grushin.

2. Lĩnh vực nghiên cứu

Khoa học Tự nhiên

3. Thời gian thực hiện

Từ tháng 9 năm 2016 đến tháng 4 năm 2017.

4. Chủ nhiệm đề tài

Dương Trọng Luyện, Khoa Tự nhiên, Trường Đại học Hoa Lư.

5. Những thành viên tham gia

Phạm Văn Cường, Khoa Tự nhiên, Trường Đại học Hoa Lư.

Dương Thu Hương, Khoa Tiểu học - Mầm non, Trường Đại học Hoa Lư.

Mục lục

	Trang
Mở đầu	4
Chương1. MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ	13
1.1 Toán tử Grushin và một số không gian hàm	13
1.1.1 Toán tử Grushin	13
1.1.2 Một số không gian hàm	14
1.1.3 Một số tính chất	15
1.2 Tập hút toàn cục và tính chất	15
1.2.1 Một số định nghĩa	15
1.2.2 Một số tính chất	18
Chương2. TẬP HÚT TOÀN CỤC ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH HYPERBOLIC TẮT DẦN CHỨA TOÁN TỬ GRUSHIN TRONG MIỀN BỊ CHẶN	20
2.1 Sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân	20
2.1.1 Bài toán	20
2.1.2 Sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân	22
2.2 Sự tồn tại tập hút toàn cục trong $S^2_{k,0}(\Omega) \times L^2(\Omega)$	28
2.3 Đánh giá số chiều fractal của tập hút toàn cục	34
Chương3. TẬP HÚT TOÀN CỤC ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH HYPERBOLIC TẮT DẦN CHỨA TOÁN TỬ GRUSHIN TRÊN TOÀN KHÔNG GIAN	46
3.1 Sự tồn tại duy nhất của nghiệm tích phân	46

3.1.1	Bài toán	46
3.1.2	Sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân	48
3.2	Sự tồn tại tập hút toàn cục trong $S_k^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$. . .	50
Kết luận		74
	Các kết quả đạt được	74
	Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo	74
Tài liệu tham khảo		75

MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài

Lí thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng được nghiên cứu đầu tiên trong các công trình của J. D'Alembert (1717-1783), L. Euler (1707-1783), D. Bernoulli (1700-1782), J. Lagrange (1736-1813), P. Laplace (1749-1827), S. Poisson (1781-1840) và J. Fourier (1768-1830), như là một công cụ chính để mô tả cơ học cũng như mô hình giải tích của Vật lí. Vào giữa thế kỷ XIX với sự xuất hiện các công trình của Riemann, lí thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng đã chứng tỏ là một công cụ thiết yếu của nhiều ngành toán học. Cuối thế kỷ XIX, H. Poincaré đã chỉ ra mối quan hệ biện chứng giữa lí thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng và các ngành toán học khác. Sang thế kỷ XX, lí thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng phát triển vô cùng mạnh mẽ nhờ có công cụ giải tích hàm, đặc biệt là từ khi xuất hiện lí thuyết hàm suy rộng do S. L. Sobolev và L. Schwartz xây dựng.

Nghiên cứu các phương trình và hệ phương trình elliptic tổng quát đã đóng vai trò rất quan trọng trong lí thuyết phương trình vi phân. Hiện nay các kết quả theo hướng này đã tương đối hoàn chỉnh. Cùng với sự phát triển không ngừng của toán học cũng như khoa học công nghệ nhiều bài toán liên quan tới độ trơn của nghiệm các phương trình và hệ phương trình không elliptic đã xuất hiện. Có một số lớp phương trình, trong đó có lớp phương trình elliptic suy biến, ở một khía cạnh nào đó cũng có một số tính chất giống với phương trình elliptic. Tuy nhiên các kết quả đạt được cho các phương trình phi tuyến elliptic vẫn còn ít, chưa đầy đủ. Với các lí do nêu trên chúng tôi đã chọn đề tài nghiên cứu là

“Dáng điệu tiệm cận nghiệm của phương trình hyperbolic tắt dần chứa toán tử Grushin. ”.

2. Tổng quan tình hình nghiên cứu thuộc lĩnh vực của đề tài

Các nghiên cứu về phương trình elliptic đã được đề cập khá nhiều trong các công trình [15, 24, 31, 32, 61] và các trích dẫn thêm ở trong đó. Các kết quả đạt được đối với phương trình elliptic, hệ phương trình elliptic, phương trình parabolic, và phương trình hyperbolic tắt dần là tương đối trọn vẹn.

Năm 1970, nhà toán học người Nga V. V. Grushin đã đưa ra toán tử

$$G_k = \Delta_x + |x|^{2k} \Delta_y \text{ với } (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{N_1+N_2}, N_1, N_2 \geq 1, k \in \mathbb{Z}_+$$

trong [26], tác giả V. V. Grushin đã đạt được các kết quả sau:

- Nếu $k = 0$ thì G_0 là elliptic trong miền Ω .
- Nếu $k > 0$ thì G_k không là elliptic trong miền $\Omega \subset \mathbb{R}^{N_1+N_2}$ có giao khác rỗng với mặt $x = 0$.

Đây là ví dụ điển hình cho lớp toán tử hypoelliptic, nhưng không là elliptic. Nhà toán học V. V. Grushin đã chứng minh được nếu $G_k u$ là hàm khả vi vô hạn trong miền Ω thì u cũng khả vi vô hạn trong miền Ω và các tính chất địa phương của G_k được tác giả nghiên cứu khá đầy đủ trong [26]. Những kết quả mang tính tiên phong này đã thúc đẩy hàng trăm công trình nghiên cứu sau đó. Một số chuyên gia ngoài nước cũng đã nghiên cứu phương trình elliptic suy biến, phương trình parabolic suy biến, phương trình hyperbolic suy biến và cũng đã đạt được một số kết quả trong các công trình [13, 14, 25, 26, 33, 35–39, 55, 69] và các trích dẫn thêm ở trong đó. Một số tác giả trong nước cũng đạt được các kết quả sâu sắc trong việc nghiên cứu các phương trình, hệ

các phương trình elliptic suy biến phi tuyến, phương trình parabolic suy biến, và phương trình hyperbolic suy biến. Các kết quả đã đạt được là: sự tồn tại và không tồn tại nghiệm của bài toán biên cho phương trình elliptic suy biến, hệ phương trình elliptic suy biến trong các công trình [5, 6, 19–21, 34, 58, 60, 62–65] và các trích dẫn thêm ở trong đó. Sự tồn tại nghiệm, đáng điều tiếm cận nghiệm của phương trình parabolic suy biến, trong các công trình [1–4, 7, 9, 51] và các trích dẫn thêm ở trong đó. Tính điều khiển được của phương trình parabolic suy biến chứa toán tử Grushin trong các công trình [8, 9].

Năm 2012 các tác giả A. E. Kogoj và E. Lanconelli đã đưa ra toán tử tổng quát cho hai toán tử Grushin và toán tử P_{k_1, k_2} trong [35], đã chỉ ra số mũ tối hạn của định lí nhúng kiểu Sobolev, đồng nhất thức kiểu Pohozaev, chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu và tính chính quy của nghiệm yếu của bài toán sau bằng phương pháp biến phân:

$$\begin{cases} \Delta_\gamma u - \eta u + f(X, u) = 0 & \text{trong } \Omega, \\ u = 0 & \text{trên } \partial\Omega, \end{cases} \quad (0.1)$$

ở đó Ω là tập mở bị chặn trong $\mathbb{R}^N$, $\eta \geq 0$ và $\Delta_\gamma u, \tilde{N}$ được định nghĩa trong Chương 1.

Hàm $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục thỏa mãn:

- $f(X, \xi) = o(\xi)$ khi $\xi \rightarrow 0$ đều với mọi $X \in \overline{\Omega}$,
- $f(X, \xi) = o(\xi^{\frac{\tilde{N}+2}{\tilde{N}-2}})$ khi $\xi \rightarrow \infty$, đều với mọi $X \in \overline{\Omega}$,
- Tồn tại hai hằng số $\mu > 2, u_0 > 0$ thỏa mãn $\xi f(X, \xi) > \mu F(X, \xi)$ với $|\xi| > u_0$ và $F(X, \xi) > 0$ với $\xi > u_0, F(X, \xi) = \int_0^\xi f(X, \tau) d\tau$.

Năm 2016 các tác giả C. T. Anh, và B. K. My trong [5] đã nghiên

cứu sự tồn tại nghiệm của Bài toán (0.1) với $\eta = 0$ và điều kiện của $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục thỏa mãn:

- $f(X, 0) = 0, \lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{f(X, \xi)}{|\xi|^{2^*_\gamma - 1}} = 0, 2^*_\gamma = \frac{2\tilde{N}}{\tilde{N} - 2};$
- $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{F(X, \xi)}{|\xi|^2} = 0$ đều với mọi $X \in \overline{\Omega}$, trong đó $F(X, \xi) = \int_0^\xi f(X, \tau) d\tau;$
- $\limsup_{|\xi| \rightarrow 0} \frac{F(X, \xi)}{|\xi|^2} < \mu_1$ đều với mọi $X \in \overline{\Omega}$, với μ_1 là giá trị riêng đầu tiên của toán tử $-\Delta_\gamma$ trong miền Ω với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất;
- Tồn tại $C_* \geq 0, \theta > 0$ thỏa mãn:

$$H(X, \xi_1) \leq \theta H(X, \xi_2) + C_*, \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}, 0 < |\xi_1| < |\xi_2|, \forall X \in \Omega,$$

$$\text{trong đó } H(X, \xi) = \frac{1}{2} \xi f(X, \xi) - F(X, \xi).$$

Khi đó Bài toán (0.1) luôn có nghiệm yếu không tầm thường. Và nhiều kết quả đối với bài toán chứa toán tử $-\Delta_\gamma$ ta có thể xem trong [6, 37, 38, 46, 66, 67].

Các kết quả về sự tồn tại nghiệm, dáng điệu tiệm cận nghiệm của phương trình hyperbolic tắt dần chứa toán tử elliptic và toán tử elliptic suy biến trong miền bị chặn cũng đã đạt được một số kết quả nhất định. Ta xét bài toán sau:

$$\begin{cases} u_{tt} + \beta u_t = \Delta u + f(X, u), & X \in \Omega, t > 0, \\ u(X, t) = 0, & X \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(X, 0) = u_0(X), u_t(X, 0) = u_1(X), \end{cases} \quad (0.2)$$

trong đó Ω là miền bị chặn có biên trơn trong $\mathbb{R}^N$, β là hằng số dương và $u_0(X) \in H_0^1(\Omega), u_1(X) \in L^2(\Omega)$.

- Năm 1984, J. K. Hale trong [28] và A. Haraux trong [30] đã chứng minh được sự tồn tại nghiệm toàn cục và tập hút toàn cục của Bài toán (0.2) với điều kiện sau $f(X, \xi) \equiv f(\xi) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $N \geq 3$ và thỏa mãn:

$$|f(\xi)| \leq C_0(|\xi|^{\rho+1} + 1), \quad 0 \leq \rho < \frac{2}{N-2}, \quad \liminf_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{f(\xi)}{\xi} > -\lambda_1.$$

- Năm 1989, A. V. Babin and M. I. Vishik [11] đã chứng minh được sự tồn tại tập hút toàn cục của Bài toán (0.2) trong trường hợp số mũ tới hạn, tức là $\rho = \frac{2}{N-2}$ và sau đó được tổng quát bởi J. M. Arrieta, A. N. Carvalho, và J. K. Hale [10].

- Năm 1988, R. Temam [56] đã chứng minh được sự tồn tại của tập hút toàn cục của Bài toán (0.2) và năm 1994, E. Feireisl [23] đã chứng minh tập hút toàn cục có số chiều fractal là hữu hạn với điều kiện sau $f(X, \xi) \equiv g(\xi) + h(X)$, $h(X) \in L^2(\Omega)$, $g(\xi) \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ thỏa mãn:

$$\liminf_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{G(\xi)}{\xi^2} \geq 0, \quad \liminf_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{\xi g(\xi) - c_1 G(\xi)}{\xi^2} \geq 0, \quad G(\xi) = \int_0^\xi g(\tau) d\tau, \quad c_1 > 0,$$

và

$$|g'(\xi)| \leq C_2(1 + |\xi|^\rho) \text{ với } \begin{cases} 0 \leq \rho < \infty & \text{khi } N = 1, 2, \\ 0 \leq \rho < 2 & \text{khi } N = 3, \\ \rho = 0 \text{ (tức là } g' \text{ là bị chặn)} & \text{khi } N \geq 4. \end{cases}$$

- Năm 1991, J. K. Hale and G. Raugel [29] đã chứng minh được sự tồn tại nghiệm toàn cục và tập hút toàn cục của Bài toán (0.2) với $N = 2$, $f(X, \xi) \equiv f(\xi)$ thỏa mãn điều kiện tăng trưởng mũ

$$f \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}), \quad |f(\xi)| \leq e^{\theta(\xi)}, \quad \liminf_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{f(\xi)}{\xi} > -\lambda_1,$$

trong đó θ là hàm liên tục thỏa mãn

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{\theta(\xi)}{\xi^2} = 0.$$

- Năm 2004, J. M. Ball trong [12] đã chứng minh được sự tồn tại tập hút toàn cục của Bài toán (0.2) bằng phương pháp phương trình năng lượng với điều kiện của hàm $f(X, \xi) \equiv f(\xi)$ là hàm liên tục thỏa mãn $\liminf_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{f(\xi)}{\xi} > -\lambda_1$, λ_1 là giá trị riêng đầu tiên của toán tử $-\Delta$ với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất và $|f(\xi)| \leq C_0 \left(1 + |\xi|^{\frac{N}{N-2}}\right)$ nếu $N > 2$, $C_0 > 0$ là hằng số, $|f(\xi)| \leq e^{\theta(\xi)}$, nếu $N = 2$ trong đó θ là hàm liên tục thỏa mãn $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{\theta(\xi)}{\xi^2} = 0$.

- Năm 2014, các tác giả A. E. Kogoj và S. Sonner trong [37], đã nghiên cứu Bài toán (0.2) suy biến có dạng sau:

$$\begin{cases} u_{tt}(X, t) + \beta u_t = \mathcal{L}u(X, t) + f(u(X, t)), & X \in \Omega, t > 0, \\ u(X, t) = 0, & X \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(X, 0) = u_0(X), u_t(X, 0) = u_1(X), \end{cases} \quad (0.3)$$

trong đó Ω là miền bị chặn có biên trơn trong $\mathbb{R}^N$, β là hằng số dương, $\mathcal{L}$ là toán tử X -elliptic (xem [37, 39]), và $f(\xi)$ thỏa mãn điều kiện:

- $|f(\xi_1) - f(\xi_2)| \leq C|\xi_1 - \xi_2|(1 + |\xi_1|^\rho + |\xi_2|^\rho)$, với $C > 0$, $0 \leq \rho < \frac{q-2}{2}$, q là hằng số được định nghĩa trong [37];
- $\limsup_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{f(\xi)}{\xi} < \mu_1$, với μ_1 là giá trị riêng đầu tiên của toán tử $-\mathcal{L}$ trong miền Ω với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất.

Khi đó Bài toán (0.3) có nghiệm toàn cục, có tập hút toàn cục và số chiều fractal của tập hút đó là hữu hạn.

Cùng với việc nghiên cứu Bài toán (0.2) nhiều tác giả cũng nghiên cứu bài toán đó trong miền không bị chặn và cũng đạt được một số kết quả nhất định. Chúng ta xét bài toán sau:

$$\begin{cases} u_{tt} + \beta u_t + u = \Delta u + f(X, u), & X \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(X, 0) = u_0(X), u_t(X, 0) = u_1(X), \end{cases} \quad (0.4)$$

trong đó β là hằng số dương, $u_0(X) \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $u_1(X) \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

- Năm 1994, E. Feireisl trong [23], đã chứng minh được sự tồn tại tập hút toàn cục trong không gian $H^1(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)$ của Bài toán (0.4) với $N = 3$, $\xi - f(X, \xi) \equiv g(X, \xi)$ thỏa mãn điều kiện:

- $g \in C^2(\mathbb{R}^4)$, $g(\cdot, 0) \in H^1(\mathbb{R}^3)$, $\left| \frac{\partial g}{\partial \xi}(X, 0) \right| \leq C$, với mọi $X \in \mathbb{R}^3$,
- $\left| \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2}(X, \xi) \right| \leq C(1 + |\xi|)$, với mọi $X \in \mathbb{R}^3, \xi \in \mathbb{R}$,
- $\liminf_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{g(X, \xi)}{\xi} \geq 0$, đều với $X \in \mathbb{R}^3$,
- $\left(g(X, \xi) - g(X, 0) \right) \xi \geq C\xi^2$, với mọi $\xi \in \mathbb{R}, |X| > r_1, C > 0$.

- Năm 2005, Fall Djiby trong [22], bằng cách sử dụng phương pháp ước lượng đuôi nghiệm đã chứng minh được sự tồn tại tập hút toàn cục trong không gian $H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$ của Bài toán (0.4) với điều kiện của hàm $f(X, \xi)$ như sau:

- $\xi - f(X, \xi) = \xi + h_1(\xi) - h_2(X)$, $h_2(X) \in L^2(\mathbb{R}^N)$,
- $h_1 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $h_1(0) = 0$, $h_1(\xi)\xi \geq CF(\xi) \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}$, trong đó C là hằng số dương, $F(\xi) = \int_0^\xi h_1(\tau) d\tau$
- $0 \leq \limsup_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{h_1(\xi)}{\xi} < \infty$.

- Năm 2009, H. B. Xiao trong [27], đã chứng minh được sự tồn tại tập hút toàn cục trong không gian $H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$ của Bài toán (0.4) với điều kiện của hàm $f(X, \xi)$ như sau:

- $\xi - f(X, \xi) = \xi + h_1(\xi) - h_2(X)$, $h_2(X) \in L^2(\mathbb{R}^N)$,

- $h_1 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $h_1(\xi)\xi \geq 0$, $|h'_1(\xi)| \leq C(1 + |\xi|^p)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, trong đó C là hằng số dương, $p > 0$, $p(N - 2) \leq 2$.

Từ những kết quả ở trên, chúng ta thấy rằng đối với lớp phương trình hyperbolic suy biến mặc dù đã có một số kết quả tuy nhiên các kết quả thu được vẫn còn ít và còn nhiều vấn đề mở cần được nghiên cứu liên quan đến toán tử G_α . Nói riêng, những vấn đề mở mà chúng tôi quan tâm trong đề tài này (xin xem thêm phần Kết luận về những vấn đề mở khác) bao gồm:

- Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm tích phân và dáng điệu tiệm cận của nghiệm (thông qua tập hút toàn cục) của bài toán hyperbolic tắt dần chứa toán tử Grushin trong miền bị chặn và chứng minh số chiều fractal của tập hút toàn cục là hữu hạn.
- Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm tích phân và dáng điệu tiệm cận của nghiệm (thông qua tập hút toàn cục) trong trường hợp bài toán hyperbolic tắt dần chứa toán tử Grushin trong toàn không gian.

3. Mục tiêu và nhiệm vụ nghiên cứu

• *Nội dung 1*: Nghiên cứu phương trình hyperbolic tắt dần chứa toán tử Grushin trong miền bị chặn với các nội dung sau:

- Nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm tích phân;
- Nghiên cứu sự tồn tại tập hút toàn cục;
- Đánh giá số chiều fractal của tập hút toàn cục.

• *Nội dung 2*: Nghiên cứu phương trình hyperbolic tắt dần chứa toán tử Grushin trong toàn không gian với các nội dung sau:

- Nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm tích phân;

- Nghiên cứu sự tồn tại tập hút toàn cục.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của đề tài là xét bài toán biên và bài toán biên giá trị ban đầu có chứa toán tử elliptic suy biến

$$G_k := \Delta_x + |x|^{2k} \Delta_y.$$

Phạm vi nghiên cứu: Sự tồn tại nghiệm và dáng điệu tiệm cận nghiệm của phương trình hyperbolic tắt dần chứa toán tử Grushin.

4. Phương pháp nghiên cứu

Phương pháp nghiên cứu: Nghiên cứu lý thuyết trong đó

- Để nghiên cứu sự tồn tại duy nhất của nghiệm tích phân chúng tôi sử dụng phương pháp nửa nhóm (xem [49, 54]).
- Để nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm, chúng tôi sử dụng các công cụ và phương pháp của lý thuyết hệ động lực vô hạn chiều (xem [11, 12, 16, 17, 48, 53, 56, 68]), nói riêng là phương pháp phương trình năng lượng và phương pháp đánh giá phần đuôi của nghiệm.
- Để chứng minh số chiều fractal của tập hút toàn cục là bị chặn chúng tôi sử dụng phương pháp ℓ - quỹ đạo (xem [47, 50]).

Chương 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Nội dung của chương bao gồm: Khái niệm toán tử Grushin, một số không gian hàm, các tính chất quan trọng sử dụng trong đề tài, các kết quả tổng quát về lý thuyết tập hút toàn cục và một số kết quả bổ trợ được dùng cho các chương sau.

1.1 Toán tử Grushin và một số không gian hàm

1.1.1 Toán tử Grushin

Định nghĩa 1.1.1. Giả sử k là một số thực không âm. Khi đó toán tử

$$G_k := \Delta_x + |x|^{2k} \Delta_y,$$

trong đó $x = (x_1, x_2, \dots, x_{N_1}) \in \mathbb{R}^{N_1}$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_{N_2}) \in \mathbb{R}^{N_2}$, $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$,

$$|x|^{2k} = \left(\sum_{i=1}^{N_1} x_i^2 \right)^k, \Delta_x = \sum_{i=1}^{N_1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \Delta_y = \sum_{j=1}^{N_2} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}$$

được gọi là toán tử Grushin (xem [25]).

Định nghĩa 1.1.2. Phương trình hyperbolic tắt dần chứa toán tử Grushin là phương trình có dạng

$$u_{tt} + \beta u_t = G_k u + f(X, u),$$

trong đó β là hằng số dương,

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

1.1.2 Một số không gian hàm

Định nghĩa 1.1.3. Với $1 \leq p < \infty$, ta định nghĩa tập tất cả các hàm $u \in L^p(\Omega)$ sao cho $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^p(\Omega), |x|^k \frac{\partial u}{\partial y_i} \in L^p(\Omega)$ với mọi $j = 1, 2, \dots, N_1, i = 1, 2, \dots, N_2$ là không gian $S_k^p(\Omega)$.

Chuẩn trong $S_k^p(\Omega)$ được định nghĩa là

$$\|u\|_{S_k^p(\Omega)} = \left\{ \int_{\Omega} \left(|u|^p + \sum_{j=1}^{N_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^p + \sum_{i=1}^{N_2} \left| |x|^k \frac{\partial u}{\partial y_i} \right|^p \right) dx dy \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Nếu $p = 2$ chúng ta định nghĩa tích vô hướng trong $S_k^2(\Omega)$ như sau:

$$(u, v)_{S_k^2(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{N_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N_2} \left(|x|^k \frac{\partial u}{\partial y_i}, |x|^k \frac{\partial v}{\partial y_i} \right)_{L^2(\Omega)}.$$

Không gian $S_{k,0}^p(\Omega)$ định nghĩa như là bao đóng của $C_0^1(\Omega)$ trong không gian $S_k^p(\Omega)$ với $C_0^1(\Omega)$ là tập các hàm trong $C^1(\Omega)$ có giá compact trong Ω .

Dễ dàng chứng minh được $S_k^p(\Omega)$ và $S_{k,0}^p(\Omega)$ là các không gian Banach, các không gian $S_k^2(\Omega)$ và $S_{k,0}^2(\Omega)$ là các không gian Hilbert. Đặt

$$\nabla_k u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_{N_1}}, |x|^k \frac{\partial u}{\partial y_1}, \dots, |x|^k \frac{\partial u}{\partial y_{N_2}} \right).$$

Định nghĩa 1.1.4. Chúng ta định nghĩa không gian $S_k^2(\mathbb{R}^N)$ là bao đóng của không gian $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ với chuẩn

$$\|u\|_{S_k^2(\mathbb{R}^N)} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \left(|u|^2 + |\nabla_k u|^2 \right) dX \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Khi đó không gian $S_k^2(\mathbb{R}^N)$ là không gian Hilbert với tích vô hướng như sau:

$$(u, v)_{S_k^2(\mathbb{R}^N)} = (u, v)_{L^2(\mathbb{R}^N)} + (\nabla_k u, \nabla_k v)_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

1.1.3 Một số tính chất

Từ Mệnh đề 3.2 và Định lí 3.3 trong [35] chúng ta có:

Mệnh đề 1.1.5. *Giả sử $\tilde{N} > 2$. Khi đó phép nhúng*

$$S_{\gamma,0}^2(\Omega) \hookrightarrow L^{2_k^*}(\Omega), \text{ trong đó } 2_k^* = \frac{2N_k}{N_k - 2}, N_k = N_1 + (1+k)N_2.$$

là liên tục. Hơn nữa, phép nhúng $S_{\gamma,0}^2(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ là compact với mỗi $q \in [1, 2_k^)$.*

Mệnh đề 1.1.6 ([2], Bổ đề 2.1). *Giả sử $N_k > 2$. Khi đó ta có*

$$S_k^2(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \text{ trong đó } 2 \leq p \leq 2_k^*.$$

Lưu ý 1.1.7. Chúng ta có hai chuẩn $\|u\|_{S_{\gamma,0}^2(\Omega)}$ và

$$|||u|||_{S_{\gamma,0}^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla_{\gamma} u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

là tương đương.

1.2 Tập hút toàn cục và tính chất

1.2.1 Một số định nghĩa

Định nghĩa 1.2.1. [52] Giả sử H là một không gian Banach và $S(t) : H \rightarrow H$, với $t \geq 0$ là một họ các ánh xạ thỏa mãn

- i) $S(0) = Id$, với Id là phép đồng nhất.
- ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, với mọi $t, s \geq 0$,
- iii) Với mỗi $t \geq 0$, $S(t) \in C(H, H)$;
- iv) Với mỗi $u \in H$, $t \mapsto S(t)u \in C((0, +\infty), H)$.

Khi đó $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ được gọi là nửa nhóm (phi tuyến) liên tục trên H .

Định nghĩa 1.2.2. [49] Họ ánh xạ $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ được gọi là một nửa nhóm tuyến tính liên tục mạnh trên H (hoặc đơn giản là C_0 - nửa nhóm trên H) nếu $S(t) : H \rightarrow H$ là ánh xạ tuyến tính bị chặn trên H với mọi $t \geq 0$, và

i) $S(0) = Id$, với Id là phép đồng nhất.

ii) $S(t + s) = S(t)S(s)$, với mọi $t, s \geq 0$,

iii) Với mỗi $u \in H, t \mapsto S(t)u \in C([0, +\infty), H)$.

Định nghĩa 1.2.3. Giả sử $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ là một C_0 - nửa nhóm trên H . Ta định nghĩa toán tử sinh A của nó như sau:

$$D(A) = \left\{ u \in H : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \text{ tồn tại trong } H \right\},$$

$$Au = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} = \left. \frac{d^+(S(t)u)}{dt} \right|_{t=0}, \quad \forall u \in D(A).$$

Định nghĩa 1.2.4. [52] Giả sử $S(t)$ là một nửa nhóm trên H .

1. Hàm $\Phi \in C(H, \mathbb{R})$ được gọi là hàm Lyapunov nếu

$$\Phi(S(t)u) \leq \Phi(u), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall u \in H.$$

2. Hàm Lyapunov Φ được gọi là hàm Lyapunov ngặt nếu $\Phi(S(t)u) = \Phi(u)$ với mọi $t \geq 0$, kéo theo u là điểm cân bằng, tức là $S(t)u = u$ với mọi $t \geq 0$.

3. Nửa nhóm $S(t)$ được gọi là hệ gradient liên tục nếu nó có hàm Lyapunov ngặt, và nửa nhóm $S(t)$ là nửa nhóm liên tục.

Định nghĩa 1.2.5. Một tập con khác rỗng $\mathcal{A}$ của H gọi là một tập hút toàn cục đối với nửa nhóm $S(t)$ nếu:

1. $\mathcal{A}$ là một tập đóng và bị chặn;

2. $\mathcal{A}$ là tập bất biến, tức là $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$, với mọi $t \geq 0$;

3. $\mathcal{A}$ là hút mọi tập bị chặn, tức là với mọi tập bị chặn $\mathcal{B} \subset H$ thì $\text{dist}(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{A}) \rightarrow 0$ khi $t \rightarrow +\infty$, ở đây

$$\text{dist}(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{A}) = \sup_{a \in S(t)\mathcal{B}} \inf_{b \in \mathcal{A}} d(a, b).$$

Định nghĩa 1.2.6. Giả sử H là không gian Banach, nửa nhóm $S(t)$ gọi là compact tiệm cận nếu với mọi $t > 0$, $S(t)$ có thể biểu diễn được dưới dạng

$$S(t) = S^{(1)}(t) + S^{(2)}(t),$$

ở đó $S^{(1)}(t)$ và $S^{(2)}(t)$ thỏa mãn các tính chất sau

1. Với bất kỳ tập bị chặn $B \subset H$

$$\sup_{y \in B} \|S^{(1)}(t)y\|_H \rightarrow 0, \text{ khi } t \rightarrow +\infty.$$

2. Với bất kỳ tập bị chặn B trong H tồn tại t_0 sao cho bao đóng của

$$\bigcup_{t \geq t_0} S^{(2)}(t)B \text{ là compact trong } H.$$

Định nghĩa 1.2.7. Cho H là không gian metric đầy đủ.

a) Quỹ đạo dương của $x \in H$ là tập hợp $\gamma^+(x) = \{S(t)x : t \geq 0\}$.

Nếu $B \subset H$, thì quỹ đạo dương của B là tập hợp

$$\gamma^+(B) = \bigcup_{t \geq 0} S(t)B = \bigcup_{z \in B} \gamma^+(z).$$

Tổng quát hơn, với $\tau \geq 0$, ta định nghĩa quỹ đạo sau thời điểm τ của B bởi $\gamma_\tau^+(B) = \gamma^+(S(\tau)B)$.

b) Phần tử $u_0 \in H$ được gọi là điểm cân bằng nếu $S(t)u_0 = u_0$ với mọi $t \geq 0$.

c) Giả sử u_0 là điểm cân bằng khi đó tập

$$W^u(u_0) = \{y \in H : S(t)y \text{ xác định với mọi } t, S(-t)y \rightarrow u_0 \text{ khi } t \rightarrow +\infty\},$$

được gọi là đa tập không ổn định của u_0 .

d) Giả sử $A \subset H$, tập hợp

$$\omega(A) = \left\{ y \in H : \text{tồn tại } t_n \geq 0, y_n \in A \text{ sao cho } t_n \rightarrow +\infty \text{ và} \right. \\ \left. S(t_n)y_n \rightarrow y \text{ khi } n \rightarrow +\infty \right\},$$

được gọi là tập ω -giới hạn của A .

Định nghĩa 1.2.8. Cho $\mathcal{M}$ là một tập compact trong không gian metric H . Khi đó số chiều fractal của $\mathcal{M}$ được định nghĩa như sau:

$$\dim_{fr}^H \mathcal{M} = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln n(\mathcal{M}, \epsilon)}{\ln \frac{1}{\epsilon}},$$

trong đó $n(\mathcal{M}, \epsilon)$ là số tối thiểu các hình cầu đóng có bán kính ϵ cần thiết dùng để phủ tập $\mathcal{M}$.

Định nghĩa 1.2.9. [50] Giả sử H là một không gian Hilbert. Chúng ta nói ánh xạ $L : H \rightarrow H$ có “tính chất nén suy rộng” (“generalized squeezing property”) trên tập $\mathcal{A} \subset H$ viết tắt là (GSP) nếu tồn tại hằng số $C > 0, \theta \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ và một phép chiếu trực chuẩn hữu hạn chiều P trong không gian H sao cho mỗi cặp $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$, hoặc

$$\|Lx_1 - Lx_2\|_H \leq C \left(\|P(x_1 - x_2)\|_H^2 + \|P(Lx_1 - Lx_2)\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

hoặc

$$\|Lx_1 - Lx_2\|_H < \theta \|x_1 - x_2\|_H.$$

1.2.2 Một số tính chất

Định lí 1.2.10 ([52], Định lí 4.6). *Giả sử $S(t), t \geq 0$ là một hệ gradient compact tiệm cận, thỏa mãn với mỗi tập bị chặn $B \subset H$, với $\tau \geq 0$ ta có $\gamma_\tau^+(B)$ là bị chặn. Khi đó, nếu tập các điểm cân bằng E bị chặn thì $S(t)$ có một tập hút toàn cục compact $\mathcal{A}$ và $\mathcal{A} = W^u(E)$. Hơn nữa, nếu H là không gian Banach thì $\mathcal{A}$ là liên thông.*

Bổ đề 1.2.11 ([18], Bổ đề compact Aubin-Lions). *Giả sử H_0, H, H_1 là các không gian Banach sao cho H_0 nhúng compact trong H , H nhúng liên tục trong H_1 và H_0, H_1 là không gian phản xạ. Với $1 < p, q < \infty$, đặt*

$$W = \{u \in L^p(0, T; H_0), \frac{du}{dt} \in L^q(0, T; H_1)\},$$

với chuẩn

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^p(0, T; H_0)} + \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^q(0, T; H_1)}.$$

Khi đó W nhúng compact trong $L^p(0, T; H)$.

Định lí 1.2.12 ([49], Định lí Stone). *A là toán tử sinh của một C_0 nhóm các toán tử unita trên không gian Hilbert H khi và chỉ khi iA là toán tử tự liên hợp.*

Định lí 1.2.13 ([49], Định lí 2.2). *Giả sử $T(t) = e^{tA}$ là một C_0 nửa nhóm. Khi đó tồn tại các hằng số $\omega \geq 0$ và $M \geq 1$ thỏa mãn*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \in [0, \infty),$$

trong đó $\mathcal{L}(H)$ là tập các toán tử tuyến tính liên tục từ H vào H .

Bổ đề 1.2.14 ([50], Bổ đề 4.1). *Cho H là một không gian Hilbert và $\mathcal{A} \subset H$ là tập bị chặn. Giả sử ánh xạ $L : \mathcal{A} \rightarrow H$ thỏa mãn $L(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, L là liên tục Lipschitz và thỏa mãn tính chất GSP trên $\mathcal{A}$. Khi đó $\dim_{fr}^H \mathcal{A} < \infty$.*

Chương 2

TẬP HÚT TOÀN CỤC ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH HYPERBOLIC TẮT DẦN CHỨA TOÁN TỬ GRUSHIN TRONG MIỀN BỊ CHẶN

Nội dung của chương gồm ba phần:

- Phần thứ nhất: Sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân.
- Phần thứ hai: Sự tồn tại của tập hút toàn cục trong không gian $S_{k,0}^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.
- Phần thứ ba: Tính bị chặn của số chiều fractal của tập hút toàn cục.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo “Large - time behavior of solutions to damped hyperbolic equation involving strongly degenerate elliptic differential operators”, *Siberian Mathematical Journal*, Vol. 57, No. 4.

2.1 Sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân

2.1.1 Bài toán

$$\begin{cases} u_{tt} + \beta u_t = G_k u + f(X, u), & X \in \Omega, t > 0, \\ u(X, t) = 0, & X \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(X, 0) = u_0(X), & u_t(X, 0) = u_1(X), \end{cases} \quad (2.1)$$

trong đó β là hằng số dương, Ω là một miền bị chặn với biên trơn trong $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} = \mathbb{R}^N$, ($N_1, N_2 \geq 1, X = (x, y)$), $\Omega \cap \{x = 0\} \neq \emptyset$, $\Omega \cap \{y = 0\} \neq \emptyset$ và $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Chúng ta giả sử $f(X, \xi) : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\cdot, \xi)$ đo được trên Ω với mọi $\xi \in \mathbb{R}$ cố định, $f(X, \cdot)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ với mỗi $X \in \Omega$ và

$$|f(X, \xi_1) - f(X, \xi_2)| \leq C|\xi_1 - \xi_2| \left(g(X) + |\xi_1|^\rho + |\xi_2|^\rho \right), \quad (2.2)$$

với $0 \leq \rho \leq \frac{2}{N_k - 2}$, $N_k = N_1 + (1 + k)N_2 > 2$,

$$f(X, 0) = h(X) \in L^2(\Omega), \quad (2.3)$$

$$F(X, \xi) = \int_0^\xi f(X, \tau) d\tau \leq g_1(X) + g_2(X)\xi^2, \quad (2.4)$$

$$f(X, \xi)\xi \leq g_3(X) + g_4(X)\xi^2, \quad (2.5)$$

trong đó $\rho, C > 0$ là các hằng số, và các hàm thỏa mãn

$$g_1(X), g_3(X) \in L^1(\Omega), \quad g_2(X) \in L^{\frac{N_k}{2}}(\Omega), \quad g_4(X) \in L^{\frac{N_k}{2}}(\Omega),$$

$$\|g_2\|_{L^{\frac{N_k}{2}}(\Omega)} < \frac{1}{2C^2(2_k^*, \Omega)}, \quad \|g_4\|_{L^{\frac{N_k}{2}}(\Omega)} < \frac{1}{C^2(2_k^*, \Omega)},$$

ở đây $2_k^* = \frac{2N_k}{N_k - 2}$, $C(2_k^*, \Omega)$ là hằng số tốt nhất trong bất đẳng thức Sobolev

$$\|u\|_{L^{2_k^*}(\Omega)} \leq C(2_k^*, \Omega) \|u\|_{S_{k,0}^2(\Omega)},$$

và $g(X)$ là hàm không âm thỏa mãn, $g(X) \in L^{N_k}(\Omega)$ nếu $\rho = 0$, và $g(X) \in L^{\frac{2_k^*}{\rho}}(\Omega)$ nếu $\rho \neq 0$.

Đặt

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ G_k & 0 \end{pmatrix},$$

$$f^*(U)(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta v(X) + f(X, u(X)) \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

Khi đó Bài toán (2.1) trở thành bài toán sau:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = AU + f^*(U), & t > 0, \\ U(0) = U_0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Chúng ta đặt $H = S_{k,0}^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Khi đó H là không gian Hilbert cùng với tích vô hướng sau

$$(U, \bar{U})_H = \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} \right) = (\nabla_k u, \nabla_k \bar{u})_{L^2(\Omega)} + (v, \bar{v})_{L^2(\Omega)}.$$

Miền xác định của toán tử A là $D(A)$ xác định bởi

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, u, v \in S_{k,0}^2(\Omega); G_k u \in L^2(\Omega) \right\}.$$

2.1.2 Sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân

Bổ đề 2.1.1. *Toán tử liên hợp của toán tử A là toán tử A^* xác định như sau*

$$A^* = - \begin{pmatrix} 0 & Id \\ G_k & 0 \end{pmatrix}.$$

với

$$D(A^*) = \left\{ \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} : \chi, \psi \in S_{k,0}^2(\Omega); G_k \chi \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Chứng minh. Từ định nghĩa của toán tử liên hợp chúng ta có để $\begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} \in D(A^*)$ và $A^* \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) &= \left(\begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ G_k u \end{pmatrix} \right), \quad \forall \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A), \\ &\Leftrightarrow (\nabla_k p, \nabla_k u)_{L^2(\Omega)} + (q, v)_{L^2(\Omega)} = (\nabla_k \chi, \nabla_k v)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + (\psi, G_k u)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in S_{k,0}^2(\Omega), G_k u \in L^2(\Omega), \quad \forall v \in S_{k,0}^2(\Omega) \end{aligned}$$

khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} (\nabla_k p, \nabla_k u)_{L^2(\Omega)} &= (\psi, G_k u)_{L^2(\Omega)}, \\ \forall u \in S_{k,0}^2(\Omega), G_k u &\in L^2(\Omega), \end{aligned} \tag{2.7}$$

và

$$(q, v)_{L^2(\Omega)} = (\nabla_k \chi, \nabla_k v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in S_{k,0}^2(\Omega). \tag{2.8}$$

Từ công thức Gauss-Green chúng ta có

$$\begin{aligned}(\nabla_k p, \nabla_k u)_{L^2(\Omega)} &= -(p, G_k u)_{L^2(\Omega)}, \\ \forall u &\in S_{k,0}^2(\Omega), G_k u \in L^2(\Omega),\end{aligned}$$

và từ (2.7) ta có

$$(p + \psi, G_k u)_{L^2(\Omega)} = 0, \forall u \in S_{k,0}^2(\Omega), G_k u \in L^2(\Omega).$$

Do đó $p = -\psi$. Nhưng (2.8) đúng khi và chỉ khi $G_k \chi \in L^2(\Omega)$ và $q = -G_k \chi$.

Do đó ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bổ đề 2.1.2. *Giả sử $f(X, \xi)$ thỏa mãn các điều kiện (2.2), (2.3). Khi đó*

a) *Ánh xạ Nemytskii*

$$\begin{aligned}f : S_{k,0}^2(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ u &\longmapsto f(X, u(X))\end{aligned}$$

là Lipschitz trên mọi tập bị chặn của $S_{k,0}^2(\Omega)$.

b) *Ánh xạ*

$$\begin{aligned}f^* : H &\longrightarrow H \\ U &\longmapsto f^*(U) := \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta v + f(X, u) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

là Lipschitz trên mọi tập bị chặn của H .

Chứng minh. a) Từ (2.2) ta có

$$|f(X, u)|^2 \leq C \left(g^2(X) |u|^2 + |u|^{2(\rho+1)} + |h(X)|^2 \right).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(X, u)|^2 dX &\leq C \left\{ \int_{\Omega} \left(g^2(X) |u|^2 + |u|^{2(1+\rho)} \right) dX + \int_{\Omega} |h(X)|^2 dX \right\} \\ &\leq C \left(\|g\|_{L^{N_k}(\Omega)}^2 \|u\|_{L^{2_k^*}(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^{2(1+\rho)}(\Omega)}^{2(1+\rho)} + \|h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) < +\infty, \end{aligned}$$

với mọi $u \in S_{k,0}^2(\Omega)$.

Giả sử $u, v \in S_{k,0}^2(\Omega)$, $R > 0$ và $\|u\|_{S_{k,0}^2(\Omega)} \leq R$, $\|v\|_{S_{k,0}^2(\Omega)} \leq R$. Khi đó chúng ta có

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(X, u) - f(X, v)|^2 dX &\leq C \int_{\Omega} |u - v|^2 \left(g^2(X) + |u|^{2\rho} + |v|^{2\rho} \right) dX \\ &\leq C \int_{\Omega} g^2(X) |u - v|^2 dX + C \int_{\Omega} |u - v|^2 |u|^{2\rho} dX + C \int_{\Omega} |u - v|^2 |v|^{2\rho} dX. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder ta có

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g^2(X) |u - v|^2 dX &\leq \|g\|_{L^{N_k}(\Omega)}^2 \|u - v\|_{L^{2_k^*}(\Omega)}^2, \\ \int_{\Omega} |u - v|^2 |u|^{2\rho} dX &\leq \|u\|_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)}^{2\rho} \|u - v\|_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)}^2, \\ \int_{\Omega} |u - v|^2 |v|^{2\rho} dX &\leq \|v\|_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)}^{2\rho} \|u - v\|_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Do không gian $S_{k,0}^2(\Omega)$ là nhúng liên tục vào không gian $L^{2_k^*}(\Omega)$ và $1 < 2(\rho+1) \leq 2_k^*$, nên ta có

$$\begin{aligned} \|f(X, u) - f(X, v)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C_1 \|u - v\|_{S_{k,0}^2(\Omega)}^2 \\ &\quad \times \left(1 + \|u\|_{S_{k,0}^2(\Omega)}^{2\rho} + \|v\|_{S_{k,0}^2(\Omega)}^{2\rho} \right), \end{aligned}$$

hay

$$\|f(X, u) - f(X, v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C(R) \|u - v\|_{S_{k,0}^2(\Omega)}.$$

b) Giả sử $R > 0, U, \bar{U} \in H$ và $\|U\|_H \leq R, \|\bar{U}\|_H \leq R$. Chúng ta có

$$f^*(U) - f^*(\bar{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta\bar{v} - \beta v + f(X, u) - f(X, \bar{u}) \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \|f^*(U) - f^*(\bar{U})\|_H^2 &= \|\beta\bar{v} - \beta v + f(X, u) - f(X, \bar{u})\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq 2\|\beta\bar{v} - \beta v\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|f(X, u) - f(X, \bar{u})\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq 2C\|u - \bar{u}\|_{S_{k,0}^2(\Omega)}^2 \left(1 + \|u\|_{S_{k,0}^{2\rho}(\Omega)}^{2\rho} + \|\bar{u}\|_{S_{k,0}^{2\rho}(\Omega)}^{2\rho}\right) \\ &\quad + 2\beta^2\|\bar{v} - v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_1(R)\|U - \bar{U}\|_H^2. \end{aligned}$$

Do đó ta có điều phải chứng minh. $\square$

Từ Bổ đề 2.1.1 theo Định lí Stone chúng ta có A sinh ra một C_0 -nhóm e^{At} trên H .

Định nghĩa 2.1.3 ([54]). Giả sử $T > 0, T \in \mathbb{R}$. Một ánh xạ liên tục $U : [0, T) \rightarrow H$ được gọi là nghiệm tích phân của Bài toán (2.1) nếu nó là nghiệm của phương trình tích phân

$$U(X, t) = e^{At}U_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}f^*(U(s))ds, \quad t \in [0, T).$$

Nếu U khả vi hầu khắp nơi trên $[0, T)$ cùng với U_t và AU thuộc không gian $L_{loc}^1([0, T), H)$ và thỏa mãn phương trình vi phân

$$\frac{dU}{dt} = AU + f^*(U), \text{ hầu khắp nơi trên } (0, T), \text{ và } U(0) = U_0,$$

khi đó U được gọi là nghiệm mạnh của Bài toán (2.1).

Sử dụng Bổ đề 2.1.2 và chứng minh tương tự như Định lí 46.1 (p. 235), Định lí 46.2 (p. 236) trong [54] chúng ta có mệnh đề sau

Mệnh đề 2.1.4. *Giả sử $f(X, u)$ thỏa mãn các điều kiện (2.2), (2.3). Khi đó với mỗi $R > 0$ tồn tại $T = T(R) > 0$ đủ nhỏ sao cho với $U_0 \in H, \|U_0\|_H \leq R$, Bài toán (2.1) tồn tại duy nhất một nghiệm tích phân $U \in C([0, T]; H)$.*

Hơn nữa, nếu $U_0 \in D(A)$ thì U là nghiệm mạnh của Bài toán (2.1).

Từ (2.2), (2.3) chúng ta có

$$|F(X, u)| \leq C (g(X)|u|^2 + |u|^{2+\rho} + |f(X, 0)||u|).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |F(X, u)| dX &\leq C \int_{\Omega} (g(X)|u|^2 + |u|^{2+\rho} + |h(X)||u|) dX \\ &\leq C \left(\|g\|_{L^{\frac{N_k}{2}}(\Omega)} \|u\|_{L^{2^*_k}(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^{2+\rho}(\Omega)}^{2+\rho} + \|h\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \right) < +\infty, \end{aligned}$$

với mọi $u \in S_{k,0}^2(\Omega)$.

Vì thế ta định nghĩa hàm Lyapunov để tìm nghiệm trong Mệnh đề 2.1.4 là

$$\Phi(U) = \frac{1}{2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{S_{k,0}^2(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} F(X, u(X)) dX. \quad (2.9)$$

Nhân phương trình đầu của Bài toán (2.1) với u_t và tích phân trên Ω chúng ta có

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_k u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} F(X, u(X)) dX \right) = -\beta \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Do đó

$$\frac{d}{dt} \Phi(U(t)) = -\beta \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.10)$$

Định lí 2.1.5. *Giả sử $f(X, u)$ thỏa mãn các điều kiện (2.2)–(2.4) và $U_0 \in H$. Khi đó Bài toán (2.6) tồn tại nghiệm toàn cục duy nhất $U \in C([0, \infty); H)$. Hơn nữa, với mỗi t cố định ánh xạ $U_0 \rightarrow S(t)U_0 := U(t)$ là liên tục trên H .*

Chứng minh. Giả sử nghiệm $U(t)$ được xác định trên khoảng cực đại $[0, T_{\max})$.

Từ (2.2) chúng ta có

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} F(X, u(X)) dX &\leq \int_{\Omega} (g_1(X) + g_2(X)u^2) dX \\ &\leq \|g_1\|_{L^1(\Omega)} + \|g_2\|_{L^{\frac{N_k}{2}}(\Omega)} \|u\|_{L^{2_k^*}(\Omega)}^2 \\ &\leq \|g_1\|_{L^1(\Omega)} + C^2(2_k^*, \Omega) \|g_2\|_{L^{\frac{N_k}{2}}(\Omega)} \|u\|_{S_{k,0}^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Từ (2.10) chúng ta có nghiệm $U(t)$ tồn tại trên $[0, T_{\max})$ và thỏa mãn

$$\begin{aligned} \Phi(U(0)) &\geq \Phi(U(t)) \geq \frac{1}{2} \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\nabla_k u\|_{L^2(\Omega)}^2 - C^2(2_k^*, \Omega) \|g_2\|_{L^{\frac{N_k}{2}}(\Omega)} \|u\|_{S_{k,0}^2(\Omega)}^2 - \|g_1\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Suy ra với mọi t thuộc $[0, T_{\max})$ ta có

$$\|U\|_H^2 \leq \frac{2 \left(\Phi(U(0)) + \|g_1\|_{L^1(\Omega)} \right)}{\min \left\{ 1, 1 - 2C^2(2_k^*, \Omega) \|g_2\|_{L^{\frac{N_k}{2}}(\Omega)} \right\}} := \tilde{C}. \quad (2.11)$$

Từ (2.11) chúng ta có $T_{\max} = +\infty$. Thật vậy, giả sử ngược lại $T_{\max} < +\infty$ khi đó từ (2.11) ta có $\left\| U \left(T_{\max} - \frac{1}{n} \right) \right\|_H^2 \leq \tilde{C}$ với $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq \frac{1}{T_{\max}}$. Từ Mệnh đề 2.1.4 tồn tại hằng số $T^*(\tilde{C})$ (độc lập với n) sao cho Bài toán (2.6) có nghiệm duy nhất trên $\left[T_{\max} - \frac{1}{n}, T_{\max} - \frac{1}{n} + T^*(\tilde{C}) \right)$, tức là $U(t)$ là nghiệm của bài toán trên $\left[0, T_{\max} - \frac{1}{n} + T^*(\tilde{C}) \right)$. Nếu $n > \frac{1}{T^*(\tilde{C})}$ khi đó $T_{\max} - \frac{1}{n} + T^*(\tilde{C}) > T_{\max}$. Điều này mâu thuẫn với tính cực đại của $T_{\max}$.

Như vậy với $U_0 \in H$ thì Bài toán (2.6) có nghiệm duy nhất $U \in C([0, \infty); H)$.

Sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào điều kiện ban đầu.

Giả sử U, V là hai nghiệm tích phân của Bài toán (2.6) với điều kiện ban đầu tương ứng $U_0, V_0 \in H$. Đặt $W = U - V$ ta có

$$U(t) = e^{At}U_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f^*(U(s)) ds.$$

$$V(t) = e^{At}V_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f^*(V(s)) ds.$$

Áp dụng Định lí 1.2.13 chúng ta có

$$\begin{aligned} \|W(t)\|_H &= \left\| e^{At}W_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} (f^*(U(s)) - f^*(V(s))) ds \right\|_H \\ &\leq \left\| e^{At}W_0 \right\|_H + \int_0^t \left\| e^{A(t-s)} (f^*(U(s)) - f^*(V(s))) \right\|_H ds \\ &\leq M e^{\omega t} \|W_0\|_H + \int_0^t M e^{\omega(t-s)} \|f^*(U(s)) - f^*(V(s))\|_H ds. \end{aligned}$$

Sử dụng tính chất Lipschitz của hàm f^* và bất đẳng thức Gronwall dạng tích phân ta có sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào điều kiện ban đầu. $\square$

2.2 Sự tồn tại tập hút toàn cục trong $S_{k,0}^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$

Từ Định lí 2.1.5, chúng ta định nghĩa nửa nhóm liên tục $S(t) : H \rightarrow H$ như sau

$$S(t)U_0 := U(t),$$

trong đó $U(t)$ là nghiệm duy nhất của Bài toán (2.6), với điều kiện ban đầu U_0 . Trong chứng minh của Định lí 2.1.5, chúng ta có với mọi $R > 0$, $U_0 \in H$ cùng với $\|U_0\|_H \leq R$, tồn tại hằng số $M > 0$ chỉ phụ thuộc vào

R thỏa mãn $\|U(t)\|_H \leq M$ với mọi $t > 0$. Nói cách khác, quỹ đạo của các tập bị chặn là bị chặn.

Định lí 2.2.1. *Giả sử $f(X, u)$ thỏa mãn các điều kiện (2.2)–(2.5). Khi đó nửa nhóm $S(t)$ có một tập hút toàn cục liên thông compact $\mathcal{A} = W^u(E)$ trong H .*

Chứng minh. Đầu tiên từ (2.10) và chứng minh của Định lí 2.1.5, chúng ta có $\gamma^+(B)$ là bị chặn với mỗi tập bị chặn B trong H , và phiếm hàm Φ định nghĩa bởi (2.9) là hàm Lyapunov ngặt. Chúng ta ký hiệu

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \in H : G_k u + f(X, u) = 0 \right\}$$

là tập các điểm cân bằng của $S(t)$. Nếu $U \in E$, chúng ta có

$$\|\nabla_k u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} f(X, u) u dX = 0.$$

Do đó

$$\|u\|_{S_{k,0}^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} f(X, u) u dX \leq \int_{\Omega} (g_3(X) + g_4(X) u^2) dX.$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder và bất đẳng thức Sobolev, chúng ta có

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(X, u) u dX &\leq \|g_3\|_{L^1(\Omega)} + \|g_4\|_{L^{\frac{N_k}{2}}(\Omega)} \|u\|_{L^{2_k^*}(\Omega)}^2 \\ &\leq \|g_3\|_{L^1(\Omega)} + C^2(2_k^*, \Omega) \|g_4\|_{L^{\frac{N_k}{2}}(\Omega)} \|u\|_{S_{k,0}^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\|u\|_{S_{k,0}^2(\Omega)}^2 \leq \frac{\|g_3\|_{L^1(\Omega)}}{1 - C^2(2_k^*, \Omega) \|g_4\|_{L^{\frac{N_k}{2}}(\Omega)}},$$

do đó

$$\|U\|_H^2 \leq \frac{\|g_3\|_{L^1(\Omega)}}{1 - C^2(2_k^*, \Omega) \|g_4\|_{L^{\frac{N_k}{2}}(\Omega)}},$$

tức là E là bị chặn trong H . Do đó để chứng minh tồn tại tập hút toàn cục, chúng ta chỉ cần chứng minh $S(t)$ là compact tiệm cận trong H .

Chúng ta xét phiếm hàm

$$I(U(t)) = \Phi(U(t)) + \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} uu_t dX,$$

$$H_0(u(t)) = \beta \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} f(X, u)u - F(X, u) \right) dX.$$

Nhân phương trình đầu của Bài toán (2.1) với u và tích phân trên Ω ta có

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} uu_t dX &= \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\nabla_k u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \beta \int_{\Omega} uu_t dX \\ &\quad + \int_{\Omega} f(X, u(X))u dX. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{d}{dt} I(U(t)) = -\beta I(U(t)) + H_0(u) \quad \text{hay} \quad \frac{d}{dt} [e^{\beta t} I(U(t))] = e^{\beta t} H_0(u),$$

nên với mỗi $T > 0$ ta có

$$I(U(T)) = e^{-\beta T} I(U(0)) + \int_0^T e^{\beta(t-T)} H_0(u(t)) dt. \quad (2.12)$$

Chúng ta giả sử $U_n(t) = S(t)U_n(0)$ với dãy $\{U_n(0)\}_{n=1}^{n=\infty}$ là bị chặn trong H , và $t_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow \infty$. Từ $\Phi(U(0)) \geq \Phi(U(t))$ ta có dãy $\{\Phi(U_n(t_n))\}_{n=1}^{n=\infty}$ là bị chặn trong H , kết hợp với (2.11) chúng ta có $\{U_n(t_n)\}_{n=1}^{n=\infty}$ là bị chặn trong H . Do đó dãy $\{U_n(t_n)\}_{n=1}^{n=\infty}$ có một dãy con hội tụ yếu, không mất tính tổng quát chúng ta giả sử $U_n(t_n) \rightharpoonup U$ trong H khi $n \rightarrow \infty$, và ta giả sử $U_n(t_n - T) \rightharpoonup U_T$ trong H , với $U, U_T \in H$. Với mỗi $t \geq 0$ dãy $\{U_n(t_n + t - T)\}_{n=1}^{n=\infty}$ có một dãy con hội tụ yếu, nên ta giả sử $\bar{U} = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \in H$ sao cho

$$U_n(t_n + t - T) \rightharpoonup \bar{U}(t) \text{ trong } H,$$

ở đó $\bar{U}(0) = U_T, \bar{U}(T) = U$.

Áp dụng (2.12) với $U_n(t_n + t - T) = \begin{pmatrix} u_n(t_n + t - T) \\ u_{nt}(t_n + t - T) \end{pmatrix}$, ta có

$$I(U_n(t_n)) = e^{-\beta T} I(U_n(t_n - T)) + \int_0^T e^{\beta(t-T)} H_0(u_n(t_n + t - T)) dt.$$

Chúng ta chứng minh

$$H_0(u_n(t_n + t - T)) \rightarrow H_0(u(t)).$$

Thật vậy, từ $U_n(t_n + t - T) \rightharpoonup \bar{U}(t)$ trong H , ta có $u_n(t_n + t - T) \rightharpoonup u(t)$ trong $S_{k,0}^2(\Omega)$ mà $S_{k,0}^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ nên $u_n(t_n + t - T) \rightarrow u(t)$ trong $L^2(\Omega)$.

Áp dụng bất đẳng thức Hölder và từ (2.2) chúng ta có

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |f(X, u_n)u_n - f(X, u)u| dX \\ & \leq \int_{\Omega} |f(X, u_n)u_n - f(X, u)u_n| dX + \int_{\Omega} |f(X, u)u_n - f(X, u)u| dX \\ & = \int_{\Omega} |f(X, u_n) - f(X, u)| |u_n| dX + \int_{\Omega} |u_n - u| |f(X, u)| dX \\ & \leq C \int_{\Omega} (g(X) + |u_n|^\rho + |u|^\rho) |u_n| |u_n - u| dX + \int_{\Omega} |u_n - u| |f(X, u)| dX \\ & \leq C \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \left(\|g\|_{L^{r_1}(\Omega)} + \|u_n\|_{L^{r_1\rho}(\Omega)}^\rho + \|u\|_{L^{r_1\rho}(\Omega)}^\rho \right) \|u_n\|_{L^{r_2}(\Omega)} \\ & \quad + \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \|f(X, u)\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

ở đây $r_1 = \frac{2N_k}{(N_k - 2)\rho}$ nếu $\rho \neq 0$, $r_1 = N_k$ nếu $\rho = 0$ và $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{2}$.

Mặt khác ta có $\{u_n(t_n + t - T)\}_{n=1}^{n=\infty}$ là bị chặn trong $S_{k,0}^2(\Omega)$ và $S_{k,0}^2(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}_k$, nên chúng ta có

$$\int_{\Omega} f(X, u_n(t_n + t - T)) u_n(t_n + t - T) dX \rightarrow \int_{\Omega} f(X, u(t)) u(t) dX \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Từ (2.2), chúng ta có

$$\begin{aligned}
\left| F(X, u_n) - F(X, u) \right| &= \left| \int_0^1 \frac{dF(X, u + \theta(u_n - u))}{d\theta} d\theta \right| \\
&= \left| \int_0^1 F'_\theta(X, u + \theta(u_n - u))(u_n - u) d\theta \right| \leq \int_0^1 \left| f(X, u + \theta(u_n - u)) \right| |u_n - u| d\theta \\
&\leq \int_0^1 \left\{ C \left(g(X) \left| u + \theta(u_n - u) \right| + \left| (u + \theta(u_n - u))^{\rho+1} \right| \right) + |f(X, 0)| \right\} |u_n - u| d\theta \\
&\leq C \left(g(X) |u| + g(X) |u_n| + |u|^{\rho+1} + |u_n|^{\rho+1} \right) |u_n - u| + |h(X)| |u_n - u|.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left| F(X, u_n) - F(X, u) \right| dX &\leq \int_{\Omega} |h(X)| |u_n - u| dX \\
&\quad + \int_{\Omega} \left(C \left(g(X) |u| + g(X) |u_n| + |u|^{\rho+1} + |u_n|^{\rho+1} \right) |u_n - u| \right) dX.
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder chúng ta có

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left| F(X, u_n) - F(X, u) \right| dX &\leq C \left\{ \|u\|_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)}^{\rho+1} + \|u_n\|_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)}^{\rho+1} \right. \\
&\quad \left. + \|h(X)\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^{N_k}(\Omega)} \left(\|u\|_{L^{2_k^*}(\Omega)} + \|u_n\|_{L^{2_k^*}(\Omega)} \right) \right\} \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Mặt khác ta có $\{u_n(t_n + t - T)\}_{n=1}^{n=\infty}$ là bị chặn trong $S_{k,0}^2(\Omega)$ và $S_{k,0}^2(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}$, nên chúng ta có

$$\int_{\Omega} F(X, u_n(t_n + t - T)) dX \rightarrow \int_{\Omega} F(X, u(t)) dX \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Do đó

$$H_0(u_n(t_n + t - T)) \rightarrow H_0(u(t)) \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Chúng ta áp dụng (2.12) với $\bar{U}$ ta có

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T e^{\beta(t-T)} H_0(u_n(t_n + t - T)) dt &= \int_0^T e^{\beta(t-T)} H_0(u(t)) dt \\ &= I(\bar{U}(T)) - e^{-\beta T} I(\bar{U}(0)). \end{aligned}$$

Mặt khác dãy $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ là bị chặn trong H , tồn tại $C > 0$ sao cho $I(U_n) \leq C$ với mọi $t \geq 0$. Do đó

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} I(U_n(t_n)) \leq C e^{-\beta T} + I(\bar{U}(T)) - e^{-\beta T} I(\bar{U}(0)).$$

Do I là nửa liên tục dưới yếu, nên ta cho $T \rightarrow \infty$ chúng ta có

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} I(U_n(t_n)) \leq I(U) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I(U_n(t_n))$$

do đó $I(U_n(t_n)) \rightarrow I(U)$. Nên $\|U_n(t_n)\|_H \rightarrow \|U\|_H$ mà H là không gian Hilbert do vậy $U_n(t_n) \rightarrow U$ trong H . Do đó $S(t)$ là compact tiệm cận. Áp dụng Định lý 1.2.10, chúng ta có điều phải chứng minh. $\square$

Định lý 2.2.2. *Giả sử $f(X, u)$ thỏa mãn điều kiện (2.2)–(2.5). Khi đó nửa nhóm $S(t)$ xác định bởi Bài toán 2.6, có tập hút cực tiểu toàn cục $\mathcal{M}$ trong không gian H , tức là, với mỗi $(u_0, u_1) \in H$ nghiệm tương ứng $(u(t), u_t(t)) = S(t)(u_0, u_1)$ dần tới tập E của các điểm cân bằng trong H khi $t \rightarrow +\infty$.*

Chứng minh. Vì $S(t)$ là hệ gradient nên tập hút cực tiểu toàn cục chính là tập các điểm cân bằng E . Thật vậy, từ chứng minh Định lý 2.2.1 chúng ta thấy tập các điểm cân bằng E bị chặn, khi đó $S(t)$ có tập hút toàn cục compact $\mathcal{A}$. Nếu tập hút toàn cục $\mathcal{A}$ tồn tại thì nó chứa một tập hút cực tiểu $\mathcal{M}$ trong H . Do vậy từ Định lý 2.2.1 suy ra sự tồn tại của tập hút toàn cục cực tiểu $\mathcal{M}$. Bây giờ ta chứng minh $\mathcal{M} = E$. Rõ ràng $E \subset \mathcal{M}$.

Ta còn phải chứng minh $\mathcal{M} \subset E$. Vì $\mathcal{M} = \bigcup_{U \in H} \omega(U)$, nên chỉ cần chỉ ra nếu $V \in \omega(U)$ thì $S(t)V = V$, $\omega(U) \in E$. Từ định nghĩa của $\omega(U)$ thì tồn tại một dãy t_n sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ và $S(t_n)U = U(t_n) \rightarrow V$ trong H khi $n \rightarrow \infty$. Do hàm Lyapunov bị chặn dưới nên

$$\Phi(V) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \Phi(S(t)U) = \Phi(U(t))$$

với $t > 0$. Tức Φ là hằng trên $\omega(U)$. Mặt khác nếu $V \in \omega(U)$ thì $S(t)V \in \omega(U)$. Vậy $\Phi(S(t)V)$ là không phụ thuộc vào t . Do vậy $\left\| \frac{d(S(t)V)}{dt} \right\|_H = 0$. Từ đó $S(t)V$ là không phụ thuộc vào t . Suy ra $V \in E$, hay $\mathcal{M} \subset E$. Do đó $\mathcal{M} = E$. $\square$

2.3 Đánh giá số chiều fractal của tập hút toàn cục

Trong mục này chúng tôi chứng minh số chiều fractal của tập hút toàn cục $\mathcal{A}$ sinh bởi Bài toán (2.1) là hữu hạn. Phương pháp mà chúng tôi sử dụng ở đây là phương pháp ℓ - quỹ đạo.

Chúng ta đặt

$$H_\ell := \{u \in L^2(0, \ell; S_{k,0}^2(\Omega)), u_t \in L^2(0, \ell; L^2(\Omega))\},$$

$$\mathcal{A}_\ell := \left\{ u \in H_\ell; u \text{ là nghiệm của (2.1) trên } [0, \ell], \text{ và } \begin{pmatrix} u(0) \\ u_t(0) \end{pmatrix} \in \mathcal{A} \right\},$$

trong đó ℓ là một hằng số cố định dương. Chuẩn trên H_ℓ được định nghĩa như sau

$$\|u\|_{H_\ell}^2 := \|u\|_{L^2(0, \ell; S_{k,0}^2(\Omega))}^2 + \|u_t\|_{L^2(0, \ell; L^2(\Omega))}^2,$$

khi đó H_ℓ là không gian Hilbert và phiếm hàm thời gian

$$E(u(\cdot, s)) := \left\| \begin{pmatrix} u(\cdot, s) \\ u_t(\cdot, s) \end{pmatrix} \right\|_H^2 = \|\nabla_k u(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_t(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Khi đó rõ ràng

$$\|u\|_{H_\ell}^2 = \int_0^\ell E(u(s))ds.$$

Chúng ta định nghĩa

$$e : \mathcal{A}_\ell \rightarrow H \quad \text{với} \quad e(u) := \begin{pmatrix} u(\ell) \\ u_t(\ell) \end{pmatrix},$$

$$L_t : \mathcal{A}_\ell \rightarrow H_\ell \quad \text{với} \quad (L_t(u))(s) := u_1(t+s), \quad s \in [0, \ell],$$

trong đó u_1 là nghiệm duy nhất của Bài toán (2.1) trên $[0, \ell+t]$ thỏa mãn $u_1|_{[0, \ell]} = u$.

Bổ đề 2.3.1. *Các khẳng định sau là đúng*

- a) L_t là liên tục Lipschitz trên $\mathcal{A}_\ell$ với mỗi $t \geq 0$.
- b) $L_t(\mathcal{A}_\ell) = \mathcal{A}_\ell$ với mọi $t \geq 0$,
- c) $e(\mathcal{A}_\ell) = \mathcal{A}$,
- d) e là liên tục Lipschitz trên $\mathcal{A}_\ell$.

Chứng minh. Giả sử $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$, $V_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ và

$$U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u_t(t) \end{pmatrix} = S(t)U_0, \quad V(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ v_t(t) \end{pmatrix} = S(t)V_0.$$

Đặt $w(t) = u(t) - v(t)$. Khi đó $w(X, t)$ là nghiệm của bài toán:

$$\begin{cases} w_{tt} + \beta w_t = G_k w + f(X, u) - f(X, v) \text{ trong } \Omega \times (0, \infty), \\ w(X, t) = 0 \text{ với } X \in \partial\Omega, t > 0, \\ w(X, 0) = u_0 - v_0, w_t(X, 0) = u_1 - v_1. \end{cases}$$

Nhân phương trình đầu với w_t và tích phân trên Ω chúng ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|w\|_{S_{k,0}^2(\Omega)}^2 + \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \beta \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \int_{\Omega} \left(f(X, u) - f(X, v) \right) (u_t - v_t) dX, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Từ Bổ đề 2.1.2 và áp dụng bất đẳng thức Hölder chúng ta có tồn tại $C_1(\mathcal{A}) > 0$, thỏa mãn

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \left(f(X, u) - f(X, v) \right) (u_t - v_t) dX \right| \\ & \leq \left(\int_{\Omega} |f(X, u) - f(X, v)|^2 dX \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |u_t - v_t|^2 dX \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C_1(\mathcal{A}) \|u - v\|_{S_{k,0}^2(\Omega)} \|u_t - v_t\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|w\|_{S_{k,0}^2(\Omega)}^2 + \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \beta \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C_1(\mathcal{A}) \|u - v\|_{S_{k,0}^2(\Omega)} \|u_t - v_t\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Do $\beta > 0$ nên chúng ta có

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\|w\|_{S_{k,0}^2(\Omega)}^2 + \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) & \leq 2C_1(\mathcal{A}) \|u - v\|_{S_{k,0}^2(\Omega)} \|u_t - v_t\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq C_1(\mathcal{A}) \left(\|w\|_{S_{k,0}^2(\Omega)}^2 + \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall chúng ta có

$$\|w\|_{S_{k,0}^2(\Omega)}^2 + \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^{C_1(\mathcal{A})t} \left(\|w(0)\|_{S_{k,0}^2(\Omega)}^2 + \|w_t(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$$

hay

$$\|S(t)(U_0 - V_0)\|_H^2 \leq e^{C_1(\mathcal{A})t} \|U_0 - V_0\|_H^2. \quad (2.14)$$

a) Giả sử $u_1, u_2 \in \mathcal{A}_\ell$. Khi đó theo định nghĩa của $\mathcal{A}_\ell$ tồn tại v_1, v_2 là nghiệm của Bài toán 2.1 thỏa mãn

$$u_1 = v_1|_{[0,\ell]}, L_t u_1(s) = v_1(s+t), u_2 = v_2|_{[0,\ell]}, L_t u_2(s) = v_2(s+t), s \in [0, \ell].$$

Đặt $w := v_1 - v_2$, chúng ta lấy $s \in (0, \ell)$ và sử dụng (2.14), ta có

$$E(w(t+s)) = E \left(S(t) \begin{pmatrix} v_1(s) \\ v_{1t}(s) \end{pmatrix} - S(t) \begin{pmatrix} v_2(s) \\ v_{2t}(s) \end{pmatrix} \right) \leq CE(w(s)).$$

Tích phân trên $(0, \ell)$ cùng với biến s ta có

$$\int_0^\ell E(w(t+s))ds \leq C \int_0^\ell E(w(s))ds,$$

từ đó suy ra

$$\|L_t u_1 - L_t u_2\|_{H_\ell}^2 \leq C \|u_1 - u_2\|_{H_\ell}^2.$$

Do đó L_t là liên tục Lipschitz trên $\mathcal{A}_\ell$.

b) Với mỗi $u \in L_t(\mathcal{A}_\ell)$ tồn tại $u_1 \in \mathcal{A}_\ell$ thỏa mãn $u(s) = (L_t u_1)(s) = u_2(t+s)$, u_2 là nghiệm của Bài toán (2.1) trên $[0, \ell+t]$ thỏa mãn $u_2|_{[0,\ell]} = u_1$. Mặt khác do $u_1 \in \mathcal{A}_\ell$ nên ta có $\begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_{1t}(0) \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$, do tính chất của tập hút toàn cục nên $\begin{pmatrix} u_2(\xi) \\ u_{2t}(\xi) \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ với mỗi $\xi \in [0, \ell+t]$. Nên chúng ta có $u \in \mathcal{A}_\ell$, do đó $L_t(\mathcal{A}_\ell) \subset \mathcal{A}_\ell$.

Ngược lại, với mỗi $u \in \mathcal{A}_\ell$. Từ Định nghĩa của $\mathcal{A}_\ell$ và tính chất của tập hút toàn cục, chúng ta có $\begin{pmatrix} u(s) \\ u_t(s) \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ với mỗi $s \in [0, \ell]$. Do $S(t)(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, nên tồn tại $\begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_{1t}(s) \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ sao cho

$$S(t) \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_{1t}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(s) \\ u_t(s) \end{pmatrix}$$

hay

$$\begin{pmatrix} u_1(t+s) \\ u_{1t}(t+s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(s) \\ u_t(s) \end{pmatrix}.$$

Và u_1 là nghiệm của (2.1) trên $[t, \ell+t]$, suy ra tồn tại u_2 là nghiệm của Bài toán (2.1) trên $[0, \ell+t]$ sao cho $u_2|_{[t, \ell+t]} = u_1$. Theo định nghĩa của L_t ta có $(L_t(u_2))(s) = u_1(t+s) = u(s)$. Do vậy $\mathcal{A}_\ell \subset L_t(\mathcal{A}_\ell)$. Nên ta có $\mathcal{A}_\ell = L_t(\mathcal{A}_\ell)$.

c) Với mỗi $U \in e(\mathcal{A}_\ell)$, tồn tại $u \in \mathcal{A}_\ell$ sao cho $U = e(u) = \begin{pmatrix} u(\ell) \\ u_t(\ell) \end{pmatrix}$.

Từ định nghĩa của $\mathcal{A}_\ell$ và tính chất của tập hút toàn cục chúng ta có,
 $\begin{pmatrix} u(\ell) \\ u_t(\ell) \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$. Suy ra $e(\mathcal{A}_\ell) \subset \mathcal{A}$.

Ngược lại, với mỗi $U \in \mathcal{A}$. Do $S(\ell)(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, nên tồn tại $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$
thỏa mãn $S(\ell) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = U$. Với mỗi $t \in [0, \ell]$, đặt

$$S(t) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

Khi đó ta có $u(t) \in \mathcal{A}_\ell$, và $e(u(t)) = \begin{pmatrix} u(\ell) \\ u_t(\ell) \end{pmatrix} = U$. Suy ra $\mathcal{A} \subset e(\mathcal{A}_\ell)$.

Do đó ta có $\mathcal{A} = e(\mathcal{A}_\ell)$.

d) Giả sử $u_1, u_2 \in \mathcal{A}_\ell$. Khi đó ta có $e(u_1) = \begin{pmatrix} u_1(\ell) \\ u_{1t}(\ell) \end{pmatrix}, e(u_2) = \begin{pmatrix} u_2(\ell) \\ u_{2t}(\ell) \end{pmatrix}$. Với $s \in [0, \ell]$, ta đặt $w(s) := u_1(s) - u_2(s)$. Sử dụng (2.14), chúng ta có

$$E(w(\ell)) = E \left(S(\ell - s) \begin{pmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ u_{1t}(s) - u_{2t}(s) \end{pmatrix} \right) \leq CE(w(s)).$$

Tích phân trên $(0, \ell)$ với biến s ta có

$$\int_0^\ell E(w(\ell)) ds \leq C \int_0^\ell E(w(s)) ds$$

hay

$$\|e(u_1) - e(u_2)\|_H^2 \leq C_1 \|u_1 - u_2\|_{H_\ell}^2.$$

Do đó ta có điều phải chứng minh

□

Từ c) và d) của Bổ đề 2.3.1 chúng ta có

$$\dim_{fr}^H \mathcal{A} \leq \dim_{fr}^{H_\ell} \mathcal{A}_\ell.$$

Bổ đề 2.3.2. Giả sử $r \in [2, 2_k^*)$ và $\mu > 0$. Khi đó tồn tại $K_\mu > 0$ và một phép chiếu trực chuẩn hữu hạn chiều P trong không gian H_ℓ thỏa mãn với mỗi $w \in H_\ell$, ta có

$$\int_0^\ell \|w(s)\|_{L^r(\Omega)}^2 ds \leq \mu \|w\|_{H_\ell}^2 + K_\mu \|P(w)\|_{H_\ell}^2. \quad (2.15)$$

Chứng minh. Do $r \in [2, 2_k^*)$ nên ta có

$$S_{k,0}^2(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),$$

áp dụng Bổ đề Aubin-Lions, chúng ta có

$$H_\ell \hookrightarrow L^2(0, \ell; L^r(\Omega)).$$

Để chứng minh bổ đề trên chúng ta sử dụng phương pháp phản chứng, ta giả sử (2.15) là sai. Khi đó tồn tại $\mu_0 > 0$ và một dãy phép chiếu trực chuẩn G_n trong không gian H_ℓ thỏa mãn $G_n \rightarrow I$ hội tụ mạnh trong H_ℓ và

$$\int_0^\ell \|w_n(s)\|_{L^r(\Omega)}^2 ds > \mu_0 + n \|G_n(w_n)\|_{H_\ell}^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.16)$$

với dãy $\{w_n\}_{n=1}^\infty \subset H_\ell$ cùng với tính chất $\|w_n\|_{H_\ell} = 1$.

Từ (2.16) chúng ta có $\|G_n(w_n)\|_{H_\ell} \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$. Chúng ta cũng giả sử $w_n \rightharpoonup w$ trong H_ℓ với $w \in H_\ell$. Do đó

$$G_n(w_n) \rightharpoonup 0, \text{ và } G_n(w - w_n) \rightharpoonup 0 \text{ trong } H_\ell,$$

suy ra

$$G_n w = G_n(w - w_n) + G_n(w_n) \rightharpoonup 0 \text{ trong } H_\ell,$$

nên $w = 0$. Do vậy $\int_0^\ell \|w_n(s)\|_{L^r(\Omega)}^2 ds \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$, mâu thuẫn với (2.16). Do đó ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bổ đề 2.3.3. Giả sử $0 < \rho < \frac{2}{N_k - 2}$. Khi đó với ℓ đủ lớn, L_ℓ có tính chất GSP trên $\mathcal{A}_\ell$.

Chứng minh. Giả sử $u_1, u_2 \in \mathcal{A}_\ell$. Khi đó tồn tại nghiệm v_1, v_2 của (2.1) thỏa mãn

$$u_1 = v_1|_{[0, \ell]}, L_\ell u_1 = v_1|_{[\ell, 2\ell]}, u_2 = v_2|_{[0, \ell]}, L_\ell u_2 = v_2|_{[\ell, 2\ell]}.$$

Đặt $w := v_1 - v_2$, chúng ta có

$$w_{tt} + \beta w_t = G_k w + f(X, v_1) - f(X, v_2). \quad (2.17)$$

Nhân phương trình (2.17) với w_t và tích phân trên Ω , chúng ta có

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (w_{tt} + \beta w_t) w_t dX &= \int_{\Omega} (G_k w + f(X, v_1) - f(X, v_2)) w_t dX \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(w) dX + \beta \int_{\Omega} |w_t|^2 dX &= \int_{\Omega} (f(X, v_1) - f(X, v_2)) w_t dX, \end{aligned}$$

từ giả thiết (2.2) ta có

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(w) + \beta \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_{\Omega} (g(X) + |v_1|^\rho + |v_2|^\rho) |w| |w_t| dX.$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder, chúng ta có

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (g(X) + |v_1|^\rho + |v_2|^\rho) |w| |w_t| dX \\ \leq C \left(\|g\|_{L^{r_1}(\Omega)} + \|v_1\|_{L^{r_1 \rho}(\Omega)}^\rho + \|v_2\|_{L^{r_1 \rho}(\Omega)}^\rho \right) \|w\|_{L^{r_2}(\Omega)} \|w_t\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

trong đó $r_1 = \frac{2N_k}{(N_k - 2)\rho}$ và $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{2}$.

Từ $\rho < \frac{2}{N_k - 2}$ suy ra $r_2 < 2_k^*$, nên ta có

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(w) + \beta \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|w\|_{L^{r_2}(\Omega)} \|w_t\|_{L^2(\Omega)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(w) + \beta \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_1 \|w\|_{L^{r_2}(\Omega)}^2 + \frac{\beta}{2} \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Suy ra

$$\frac{d}{dt} E(w) + \beta \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2C_1 \|w\|_{L^{r_2}(\Omega)}^2. \quad (2.18)$$

Chúng ta cố định $\tau \in (0, \ell)$ và tích phân (2.18) trên đoạn $(\tau, 2\ell)$ ta có

$$E(w(2\ell)) + \beta \int_{\tau}^{2\ell} \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq C_2 \int_{\tau}^{2\ell} \|w\|_{L^{r_2}(\Omega)}^2 dt + E(w(\tau)). \quad (2.19)$$

Tiếp theo ta nhân phương trình (2.17) với w và tích phân trên Ω , chúng ta có

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (w_{tt}w + \beta w_t) w dX &= \int_{\Omega} w G_k w dX + \int_{\Omega} (f(X, v_1) - f(X, v_2)) w dX \\ &\leq \int_{\Omega} w G_k w dX + C \int_{\Omega} (g(X) + |v_1|^\rho + |v_2|^\rho) |w|^2 dX. \end{aligned}$$

Mặt khác do

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w_{tt} w dX &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w_t w dX - \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ \int_{\Omega} w G_k w dX &= - \|\nabla_k w\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

áp dụng bất đẳng thức Cauchy và bất đẳng thức Hölder ta có

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} w_t w dX \right| &\leq \|w_t\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \left(\|w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \\ \int_{\Omega} (g(X) + |v_1|^\rho + |v_2|^\rho) |w|^2 dX \\ &\leq C \left(\|g\|_{L^{r_1}(\Omega)} + \|v_1\|_{L^{r_1\rho}(\Omega)}^\rho + \|v_2\|_{L^{r_1\rho}(\Omega)}^\rho \right) \|w\|_{L^{2r_3}(\Omega)}^2 \leq C_3 \|w\|_{L^{2r_3}(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

trong đó

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = 1.$$

Do vậy

$$\begin{aligned} \|\nabla_k w\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w_t w dX \\ &+ C_4 \|w\|_{L^{r_4}(\Omega)}^2, \quad \text{ở đây } r_4 := \max\{2, 2r_3\}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Tích phân (2.20) trên $(\tau, 2\ell)$ ta có

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{2\ell} \|\nabla_k w\|_{L^2(\Omega)}^2 dt &\leq \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) \int_{\tau}^{2\ell} \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt - \int_{\tau}^{2\ell} \left(\frac{d}{dt} \int_{\Omega} w_t w dX \right) dt \\ &+ C_4 \int_{\tau}^{2\ell} \|w\|_{L^{r_4}(\Omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

Do

$$\begin{aligned} \left| \int_{\tau}^{2\ell} \left(\frac{d}{dt} \int_{\Omega} w_t w dX \right) dt \right| &= \left| \int_{\Omega} w_t(2\ell) w(2\ell) dX - \int_{\Omega} w_t(\tau) w(\tau) dX \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega} w_t(2\ell) w(2\ell) dX \right| + \left| \int_{\Omega} w_t(\tau) w(\tau) dX \right| \\ &\leq C_5 \left(E(w(2\ell)) + E(w(\tau)) \right), \end{aligned}$$

nên ta có

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{2\ell} \|\nabla_k w\|_{L^2(\Omega)}^2 dt &\leq \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) \int_{\tau}^{2\ell} \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &+ C_4 \int_{\tau}^{2\ell} \|w\|_{L^{r_4}(\Omega)}^2 dt + C_5 (E(w(2\ell)) + E(w(\tau))). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Nhân hai vế của (2.21) với $\epsilon \in (0, 1)$, sau đó cộng với (2.19), chúng ta có

$$\begin{aligned} & \epsilon \int_{\tau}^{2\ell} \|\nabla_k w\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \left(\beta - \epsilon \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) \right) \int_{\tau}^{2\ell} \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ & + (1 - C_5 \epsilon) E(w(2\ell)) \leq C_6 \int_{\tau}^{2\ell} \|w\|_{L^r(\Omega)}^2 dt + (1 + C_5 \epsilon) E(w(\tau)), \end{aligned}$$

trong đó $r := \max \{r_2; r_4\}$. Ta chọn $\epsilon = \min \left\{ \frac{1}{2C_5}, \frac{\beta}{2+\beta} \right\}$ khi đó ta có

$$\begin{aligned} & (1 - C_5 \epsilon) E(w(2\ell)) + \left(\beta - \epsilon \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) \right) \int_{\tau}^{2\ell} \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ & + \epsilon \int_{\tau}^{2\ell} \|\nabla_k w\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \geq \eta \left(\int_{\tau}^{2\ell} \|\nabla_k w\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_{\tau}^{2\ell} \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right) \\ & = \eta \int_{\tau}^{2\ell} E(w) dt \geq \eta \int_{\ell}^{2\ell} E(w) dt, \end{aligned}$$

$$C_6 \int_{\tau}^{2\ell} \|w\|_{L^r(\Omega)}^2 dt + (1 + C_5 \epsilon) E(w(\tau)) \leq C_6 \int_0^{2\ell} \|w\|_{L^r(\Omega)}^2 dt + 2E(w(\tau)),$$

trong đó $\eta := \min \left\{ \epsilon, \beta - \epsilon \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) \right\}$. Do vậy

$$\eta \int_{\ell}^{2\ell} E(w) dt \leq C_6 \int_0^{2\ell} \|w\|_{L^r(\Omega)}^2 dt + 2E(w(\tau)).$$

Tích phân trên $(0, \ell)$ của bất đẳng thức trên ta có

$$\eta \ell \int_{\ell}^{2\ell} E(w) dt \leq C_6 \ell \int_0^{2\ell} \|w\|_{L^r(\Omega)}^2 dt + 2 \int_0^{\ell} E(w(\tau)) d\tau,$$

suy ra

$$\int_{\ell}^{2\ell} E(w) dt \leq \frac{C_6}{\eta} \int_0^{2\ell} \|w\|_{L^r(\Omega)}^2 dt + \frac{2}{\eta \ell} \int_0^{\ell} E(w(\tau)) d\tau.$$

Do đó

$$\|Lu_1 - Lu_2\|_{H_\ell}^2 \leq \frac{C_6}{\eta} \int_0^{2\ell} \|w\|_{L^r(\Omega)}^2 dt + \frac{2}{\eta\ell} \|u_1 - u_2\|_{H_\ell}^2, \quad (2.22)$$

trong đó $L := L_\ell$. Mặt khác chúng ta có

$$\begin{aligned} \int_0^{2\ell} \|w\|_{L^r(\Omega)}^2 dt &= \int_0^\ell \|w\|_{L^r(\Omega)}^2 dt + \int_\ell^{2\ell} \|w\|_{L^r(\Omega)}^2 dt \\ &= \int_0^\ell \|u_1 - u_2\|_{L^r(\Omega)}^2 dt + \int_0^\ell \|Lu_1 - Lu_2\|_{L^r(\Omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

Chúng ta chọn $\ell = \frac{128}{\eta}$ từ Bổ đề 2.3.2 và (2.22) ta có

$$\begin{aligned} \|Lu_1 - Lu_2\|_{H_\ell}^2 &\leq \frac{C_6}{\eta} \left(\int_0^\ell \|u_1 - u_2\|_{L^r(\Omega)}^2 dt + \int_0^\ell \|Lu_1 - Lu_2\|_{L^r(\Omega)}^2 dt \right) \\ &+ \frac{1}{64} \|u_1 - u_2\|_{H_\ell}^2 \leq \frac{C_6}{\eta} (\mu \|u_1 - u_2\|_{H_\ell}^2 + K_\mu \|P(u_1 - u_2)\|_{H_\ell}^2 \\ &+ \mu \|Lu_1 - Lu_2\|_{H_\ell}^2 + K_\mu \|P(Lu_1 - Lu_2)\|_{H_\ell}^2) + \frac{1}{64} \|u_1 - u_2\|_{H_\ell}^2, \end{aligned}$$

do đó

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|Lu_1 - Lu_2\|_{H_\ell}^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{C_6\mu}{\eta} \right) \|Lu_1 - Lu_2\|_{H_\ell}^2 \\ &\leq \frac{C_6K_\mu}{\eta} \left(\|P(u_1 - u_2)\|_{H_\ell}^2 + \|P(Lu_1 - Lu_2)\|_{H_\ell}^2 \right) \\ &+ \left(\frac{1}{64} + \frac{C_6\mu}{\eta} \right) \|u_1 - u_2\|_{H_\ell}^2. \end{aligned}$$

Chọn $\mu = \frac{\eta}{192C_6}$, chúng ta có

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|Lu_1 - Lu_2\|_{H_\ell}^2 + \frac{95}{192} \|Lu_1 - Lu_2\|_{H_\ell}^2 \\ &\leq K_0 \left(\|P(u_1 - u_2)\|_{H_\ell}^2 + \|P(Lu_1 - Lu_2)\|_{H_\ell}^2 \right) + \frac{1}{48} \|u_1 - u_2\|_{H_\ell}^2, \end{aligned}$$

ở đây $K_0 = \frac{C_6 K_\mu}{\eta}$. Suy ra, hoặc

$$\|Lu_1 - Lu_2\|_{H_\ell}^2 \leq \frac{192K_0}{95} \left(\|P(u_1 - u_2)\|_{H_\ell}^2 + \|P(Lu_1 - Lu_2)\|_{H_\ell}^2 \right),$$

hoặc

$$\|Lu_1 - Lu_2\|_{H_\ell}^2 < \frac{1}{24} \|u_1 - u_2\|_{H_\ell}^2,$$

do đó bổ đề được chứng minh. $\square$

Kết hợp các Bổ đề 2.3.1, Bổ đề 1.2.14 và Bổ đề 2.3.3, chúng ta có

Định lí 2.3.4. *Giả sử $f(X, u)$ thỏa mãn các điều kiện (2.2)–(2.5) với $0 < \rho < \frac{2}{N_k - 2}$. Khi đó số chiều fractal của tập hút toàn cục $\mathcal{A}$ là hữu hạn.*

Lưu ý 2.3.5. Nếu $\rho = 0$, $g(X) \in L^{N_k + \epsilon}(\Omega)$, với ϵ là số dương đủ nhỏ khi đó Định lí 2.3.4 vẫn đúng.

Chương 3

TẬP HÚT TOÀN CỤC ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH HYPERBOLIC TẮT DẦN CHỨA TOÁN TỬ GRUSHIN TRÊN TOÀN KHÔNG GIAN

Nội dung của chương gồm hai phần:

- Phần thứ nhất: Sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân.
- Phần thứ hai: Sự tồn tại của tập hút toàn cục trong không gian $S_k^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo “Global attractor of the Cauchy problem for a semilinear degenerate damped hyperbolic equation involving the Grushin operator”, *Annales Polonici Mathematici*, Vol. 117, No. 2, 141–162.

3.1 Sự tồn tại duy nhất của nghiệm tích phân

3.1.1 Bài toán

$$\begin{cases} u_{tt} + \beta u_t + u = G_k u + f(X, u), t > 0, \\ X = (x, y) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} := \mathbb{R}^N, \\ u(X, 0) = u_0(X), u_t(X, 0) = u_1(X), \end{cases} \quad (3.1)$$

trong đó β là hằng số dương, $u_0(X) \in S_k^2(\mathbb{R}^N)$, $u_1(X) \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Chúng ta giả sử $f(X, \xi) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục thỏa mãn

$$|f(X, \xi_1) - f(X, \xi_2)| \leq C_1 |\xi_1 - \xi_2| (g(X) + |\xi_1|^\rho + |\xi_2|^\rho) \quad (3.2)$$

$$\text{với } 0 \leq \rho \leq \frac{2}{N_k - 2}, N_k = N_1 + (1 + k)N_2 > 2, 2_k^* = \frac{2N_k}{N_k - 2},$$

$$f(X, 0) = h(X) \in L^2(\mathbb{R}^N), \quad (3.3)$$

$$F(X, \xi) \geq C_2 f(X, \xi) \xi + g_1(X), \quad \text{với mọi } X \in \mathbb{R}^N, \xi \in \mathbb{R}, \quad (3.4)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(X, u(X)) dX \leq 0, \quad \text{với mọi } u(X) \in S_k^2(\mathbb{R}^N), \quad (3.5)$$

ở đây ρ, C_1, C_2 là các hằng số dương, và $g(X) \in L^{N_k}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\frac{N_k}{2}}(\mathbb{R}^N)$, $g_1(X) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $F(X, \xi) = \int_0^\xi f(X, \tau) d\tau$.

Chúng ta đặt

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ G_k - Id & 0 \end{pmatrix},$$

$$f^*(U)(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta v(X) + f(X, u(X)) \end{pmatrix}, U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix},$$

Khi đó Bài toán (3.1) trở thành bài toán

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = \mathbb{A}U + f^*(U), & t > 0, \\ U(0) = U_0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Đặt $\mathcal{H} = S_k^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$. Khi đó $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert với tích vô hướng

$$(U, \bar{U})_{\mathcal{H}} = \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} \right) = (u, \bar{u})_{S_k^2(\mathbb{R}^N)} + (v, \bar{v})_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Miền xác định của toán tử $\mathbb{A}$ là $D(\mathbb{A})$ xác định bởi

$$D(\mathbb{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, u, v \in S_k^2(\mathbb{R}^N); G_k u - u \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

3.1.2 Sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân

Từ định nghĩa của toán tử $\mathbb{A}$ và không gian $\mathcal{H}$, chúng ta có

Bổ đề 3.1.1. *Toán tử liên hợp của toán tử $\mathbb{A}$ là toán tử $\mathbb{A}^*$ xác định như sau*

$$\mathbb{A}^* = - \begin{pmatrix} 0 & Id \\ G_k - Id & 0 \end{pmatrix},$$

với

$$D(\mathbb{A}^*) = \left\{ \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} : \chi, \psi \in S_k^2(\mathbb{R}^N); G_k \chi - \chi \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

Do $f(X, \xi)$ thỏa mãn các điều kiện (3.2), (3.3) nên ta có bổ đề sau

Bổ đề 3.1.2. *Giả sử $f(X, \xi)$ thỏa mãn các điều kiện (3.2), (3.3). Khi đó*

a) *Ánh xạ Nemytskii*

$$\begin{aligned} \widehat{f} : S_k^2(\mathbb{R}^N) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N) \\ u &\longmapsto \widehat{f}(u)(X) := f(X, u(X)) \end{aligned}$$

là Lipschitz trên mọi tập bị chặn của $S_k^2(\mathbb{R}^N)$.

b) *Ánh xạ*

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ U &\longmapsto f^*(U) := \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta v + f(X, u) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

là Lipschitz trên mọi tập bị chặn của $\mathcal{H}$.

Từ Bổ đề 3.1.1 theo Định lý Stone chúng ta có $\mathbb{A}$ sinh ra một C_0 -nhóm $e^{\mathbb{A}t}$ trên $\mathcal{H}$.

Định nghĩa 3.1.3 ([54]). Giả sử $T > 0, T \in \mathbb{R}$. Một ánh xạ liên tục $U : [0, T) \rightarrow \mathcal{H}$ được gọi là nghiệm tích phân của Bài toán (3.6) nếu nó

là nghiệm của phương trình tích phân

$$U(X, t) = e^{\mathbb{A}t}U_0 + \int_0^t e^{\mathbb{A}(t-s)} f^*(U(s)) ds, \quad t \in [0, T].$$

Nếu U khả vi hầu khắp nơi trên $[0, T)$ cùng với U_t và $\mathbb{A}U$ thuộc không gian $L^1_{loc}([0, T), \mathcal{H})$ và thỏa mãn phương trình vi phân

$$\frac{dU}{dt} = \mathbb{A}U + f^*(U), \text{ hầu khắp nơi trên } (0, T), \text{ và } U(0) = U_0,$$

khi đó U được gọi là nghiệm mạnh của Bài toán (3.6).

Sử dụng Bổ đề 3.1.2 và chứng minh tương tự như Định lí 46.1 (p.235), Định lí 46.2 (p. 236) trong [54] chúng ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 3.1.4. *Giả sử $f(X, u)$ thỏa mãn các điều kiện (3.2)–(3.5). Khi đó với mỗi $R > 0$ tồn tại $T = T(R) > 0$ đủ nhỏ sao cho với $U_0 \in \mathcal{H}, \|U_0\|_{\mathcal{H}} \leq R$, Bài toán (3.1) tồn tại duy nhất một nghiệm tích phân $U \in C([0, T); \mathcal{H})$.*

Hơn nữa, nếu $U_0 \in D(\mathbb{A})$ thì U là nghiệm mạnh của Bài toán (3.1).

Từ (3.2), (3.3) ta có

$$|F(X, \xi)| \leq C \left(g(X)|\xi|^2 + |\xi|^{2+\rho} + |f(X, 0)||\xi| \right).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |F(X, u)| dX &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} \left(g(X)|u|^2 + |u|^{2+\rho} + |h(X)||u| \right) dX \\ &\leq C \left(\|g\|_{L^{\frac{N_k}{2}}(\mathbb{R}^N)} \|u\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^2 + \|u\|_{L^{2+\rho}(\mathbb{R}^N)}^{2+\rho} + \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \right) < +\infty, \end{aligned}$$

với mọi $u \in S_1^2(\mathbb{R}^N)$.

Định lí 3.1.5. *Giả sử $f(X, u)$ thỏa mãn các điều kiện (3.2)–(3.5) và $U_0 \in \mathcal{H}$. Khi đó Bài toán (3.6) có nghiệm duy nhất toàn cục*

$U \in C([0, \infty); \mathcal{H})$. Hơn nữa, với mỗi t cố định ánh xạ $U_0 \rightarrow S(t)U_0 := U(t)$ là liên tục trên $\mathcal{H}$.

Chứng minh. Sử dụng Mệnh đề 3.1.4 và lí luận như trong Định lí 2.1.5 chúng ta có điều phải chứng minh. $\square$

3.2 Sự tồn tại tập hút toàn cục trong $S_k^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$

Từ Định lí 3.1.5, chúng ta định nghĩa nửa nhóm liên tục $S(t) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ như sau

$$S(t)U_0 := U(t),$$

trong đó $U(t)$ là nghiệm duy nhất của Bài toán (3.6), với điều kiện ban đầu U_0 .

Ta chứng minh sự tồn tại tập hấp thụ của $S(t)$ trong không gian $\mathcal{H}$.

Bổ đề 3.2.1. *Giả sử $f(X, u)$ thỏa mãn các điều kiện (3.2)–(3.5). Khi đó nửa nhóm $S(t)$ sinh bởi Bài toán (3.1) có một tập hấp thụ bị chặn trong $\mathcal{H}$, nghĩa là, tồn tại một hằng số dương M sao cho với mọi tập bị chặn $\mathcal{B}$ trong $\mathcal{H}$ tồn tại số $T = T(\mathcal{B})$ sao cho với mọi $t \geq T, U_0 \in \mathcal{B}$, ta có*

$$\|u\|_{S_k^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|u_t\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq M. \quad (3.7)$$

Chứng minh. Giả sử $U(t)$ là nghiệm của Bài toán (3.6) cùng với điều kiện ban đầu U_0 khi đó $\bar{u} = u_t + \delta u$ thỏa mãn phương trình:

$$\bar{u}_t + (\beta - \delta)\bar{u} + (\delta^2 - \beta\delta + 1)u = G_k u + f(X, u). \quad (3.8)$$

Đặt

$$\mathcal{A}(\bar{u}, u) = \|\bar{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + (\delta^2 - \delta\beta + 1)\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|\nabla_k u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2.$$

Chúng ta chọn $\delta \in (0, 1)$ đủ nhỏ sao cho

$$\beta - 2\delta > 0, \quad \delta^2 - \delta\beta + 1 > 0,$$

và tồn tại $C_1 > 0, C_2 > 0$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} & C_1 \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|u_t\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|\nabla_k u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right) \\ & \leq \mathcal{A}(\bar{u}, u) \leq C_2 \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|u_t\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|\nabla_k u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Nhân phương trình (3.8) với $\bar{u}$ và tích phân trên $\mathbb{R}^N$, chúng ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathcal{A}(\bar{u}, u)) &= -(\beta - \delta) \|\bar{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 - \delta(\delta^2 - \delta\beta + 1) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \\ &- \delta \|\nabla_k u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \int_{\mathbb{R}^N} f(X, u) \bar{u} dX = (2\delta - \beta) \|\bar{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \int_{\mathbb{R}^N} f(X, u) u_t dX \\ &+ \delta \int_{\mathbb{R}^N} f(X, u) u dX - \delta \mathcal{A}(\bar{u}, u). \end{aligned}$$

Từ (3.4), ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\mathcal{A}(\bar{u}, u) - 2 \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u) dX \right) &\leq -\delta \mathcal{A}(\bar{u}, u) + \delta \int_{\mathbb{R}^N} f(X, u) u dX \\ &\leq -\delta \mathcal{A}(\bar{u}, u) + \frac{\delta}{C_2} \int_{\mathbb{R}^N} (F(X, u) - g_1(X)) dX. \end{aligned}$$

Từ (3.5), chúng ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\mathcal{A}(\bar{u}, u) - 2 \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u) dX \right) \\ & \leq -\mu \left(\mathcal{A}(\bar{u}, u) - 2 \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u) dX \right) + C_3, \end{aligned}$$

trong đó

$$\mu = \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{2C_2} \right\} > 0, \quad C_3 = -\frac{\delta}{C_2} \int_{\mathbb{R}^N} g_1(X) dX.$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall ta có

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(\bar{u}, u) - 2 \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u) dX \\ & \leq e^{-2\mu t} \left(\mathcal{A}(\bar{u}_0, u_0) - 2 \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u_0) dX - \frac{C_3}{\mu} \right) + \frac{C_3}{\mu}, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Khi đó chúng ta có

$$\|u\|_{S_k^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|u_t\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq C e^{-2\mu t} \mathcal{T}(u_0, u_1) + \frac{C_5}{\mu}, \quad (3.10)$$

ở đây $\mathcal{T}(u_0, u_1) = \|u_0\|_{S_k^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + C_4$, nên

$$\|u\|_{S_k^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|u_t\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq \frac{2|C_5|}{\mu} \quad \text{với mọi } t \geq T_1,$$

trong đó

$$T_1 := \begin{cases} \frac{1}{2\mu} \ln \frac{C\mu\mathcal{T}(u_0, u_1)}{|C_5|} & \text{nếu } \frac{C\mu\mathcal{T}(u_0, u_1)}{|C_5|} > 1, \\ 0 & \text{nếu } \frac{C\mu\mathcal{T}(u_0, u_1)}{|C_5|} \leq 1. \end{cases}$$

Do đó ta có điều phải chứng minh với $M = \frac{2|C_5|}{\mu}$. $\square$

Bổ đề 3.2.2. *Giả sử $f(X, u)$ thỏa mãn điều kiện (3.2)–(3.5) và $U_0 \in \mathcal{B}$.*

Khi đó với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại hằng số dương $T(\epsilon)$ và $R(\epsilon)$ thỏa mãn

$$\int_{|X|_k \geq R} \left(|u|^2 + |u_t|^2 + |\nabla_k u|^2 \right) dX \leq \epsilon, \quad t \geq T(\epsilon), \quad R \geq R(\epsilon), \quad (3.11)$$

trong đó

$$|X|_k = \left[|x|^{2(1+k)} + (1+k)^2 |y|^2 \right]^{\frac{1}{2(1+k)}},$$

và $U(t)$ là nghiệm của Bài toán (3.6) với điều kiện ban đầu U_0 .

Chứng minh. Ta sử dụng kỹ thuật hàm cắt để chứng minh các ước lượng đuôi nghiệm. Giả sử ϑ là một hàm trơn thỏa mãn $0 \leq \vartheta(s) \leq 1$ với $s \in \mathbb{R}_+$ và

$$\vartheta(s) = 0 \quad \text{khi} \quad 0 \leq s \leq 1; \quad \vartheta(s) = 1 \quad \text{khi} \quad s \geq 2.$$

Khi đó tồn tại hằng số $C_\vartheta > 0$, thỏa mãn $|\vartheta'(s)| \leq C_\vartheta$ với mọi $s \in \mathbb{R}_+$.

Chúng ta có

$$\nabla_k \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) = \frac{1}{R^{2(1+k)}} \vartheta' \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) \nabla_k |X|_k^{2(1+k)},$$

trong đó

$$\begin{aligned} & \nabla_k |X|_k^{2(1+k)} \\ &= 2(1+k) \left(x_1 |x|^{2k}, \dots, x_{N_1} |x|^{2k}, (1+k) |x|^k y_1, \dots, (1+k) |x|^k y_{N_2} \right), \end{aligned}$$

suy ra

$$|\nabla_k |X|_k^{2(1+k)}| = 2(1+k) |x|^k |X|_k^{1+k}.$$

Nhân hai vế của phương trình (3.8) với $\vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) \bar{u}$ và tích phân trên $\mathbb{R}^N$, chúng ta có

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) \bar{u}_t \bar{u} dX + (\beta - \delta) \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) |\bar{u}|^2 dX \\ &+ (\delta^2 - \beta\delta + 1) \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) \bar{u} u dX = \int_{\mathbb{R}^N} G_k u \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) \bar{u} dX \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} f(X, u) \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) \bar{u} dX. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Nhưng

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}^N} G_k u \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) \bar{u} dX = \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) (\nabla_k u, \nabla_k \bar{u})_{\mathbb{R}^N} dX \\ &+ \frac{1}{R^{2(1+k)}} \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta' \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) \bar{u} (\nabla_k |X|_k^{2(1+k)}, \nabla_k u)_{\mathbb{R}^N} dX \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) (\nabla_k u, (\delta \nabla_k u + \nabla_k u_t))_{\mathbb{R}^N} dX \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{R^{2(1+k)}} \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta' \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) \bar{u} (\nabla_k |X|_k^{2(1+k)}, \nabla_k u)_{\mathbb{R}^N} dX \\
= & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) |\nabla_k u|^2 dX + \delta \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) |\nabla_k u|^2 dX \\
& + \frac{1}{R^{2(1+k)}} \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta' \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) \bar{u} (\nabla_k |X|_k^{2(1+k)}, \nabla_k u)_{\mathbb{R}^N} dX, \\
& \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) \bar{u}_t \bar{u} dX = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) |\bar{u}|^2 dX,
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
& \left(\delta^2 - \beta\delta + 1 \right) \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) \bar{u} u dX \\
= & \left(\delta^2 - \beta\delta + 1 \right) \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) u (u_t + \delta u) dX \\
= & \left(\delta^2 - \beta\delta + 1 \right) \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) |u|^2 dX \\
& + \delta \left(\delta^2 - \beta\delta + 1 \right) \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) |u|^2 dX.
\end{aligned}$$

Đặt

$$\mathcal{C}(\bar{u}, u) = \left(\delta^2 - \beta\delta + 1 \right) |u|^2 + |\nabla_k u|^2 + |\bar{u}|^2.$$

Khi đó (3.12) trở thành

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) \mathcal{C}(\bar{u}, u) dX = -\delta \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) \mathcal{C}(\bar{u}, u) dX \\
& - \left(\beta - 2\delta \right) \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) |\bar{u}|^2 dX + \int_{\mathbb{R}^N} f(X, u) \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) \bar{u} dX
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{R^{2(1+k)}} \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta' \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) \bar{u} (\nabla_k |X|_k^{2(1+k)}, \nabla_k u)_{\mathbb{R}^N} dX,$$

và từ (3.5) chúng ta có

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} f(X, u) \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) \bar{u} dX &= \int_{\mathbb{R}^N} f(X, u) \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) (u_t + \delta u) dX \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(X, u) \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) u_t dX + \delta \int_{\mathbb{R}^N} f(X, u) \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) u dX \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u) \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) dX + \delta \int_{\mathbb{R}^N} f(X, u) \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) u dX \\ &\leq \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u) \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) dX \\ &\quad + \frac{\delta}{C_2} \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) (F(X, u) - g_1(X)) dX. \end{aligned}$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) (\mathcal{C}(\bar{u}, u) - 2F(X, u)) dX \\ &\leq -\mu \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) (\mathcal{C}(\bar{u}, u) - 2F(X, u)) dX \\ &\quad - (\beta - 2\delta) \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) |\bar{u}|^2 dX - \frac{\delta}{C_2} \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) g_1(X) dX \\ &\quad - \frac{1}{R^{2(1+k)}} \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta' \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) \bar{u} (\nabla_k |X|_k^{2(1+k)}, \nabla_k u)_{\mathbb{R}^N} dX \\ &\leq - \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) \left[\mu (\mathcal{C}(\bar{u}, u) - 2F(X, u)) + \frac{\delta}{C_2} g_1(X) \right] dX \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{R^{2(1+k)}} \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta' \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) \bar{u}(\nabla_k |X|_k^{2(1+k)}, \nabla_k u)_{\mathbb{R}^N} dX,$$

trong đó $\mu = \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{2C_2} \right\} > 0$.

Mặt khác, do $g_1(X) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, tồn tại $R_1 > 0$ thỏa mãn với mọi $R \geq R_1$, chúng ta có

$$\begin{aligned} -\frac{\delta}{C_2} \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) g_1(X) dX &= -\frac{\delta}{C_2} \int_{|X|_k \geq R} \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) g_1(X) dX \\ &\leq C \int_{|X|_k \geq R} |g_1(X)| dX \leq \frac{\epsilon}{4}. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{R^{2(1+k)}} \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta' \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) \bar{u}(\nabla_k |X|_k^{2(1+k)}, \nabla_k u)_{\mathbb{R}^N} dX = \\ &= -\frac{1}{R^{2(1+k)}} \int_{|X|_k \leq 2R} \vartheta' \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) \bar{u}(\nabla_k |X|_k^{2(1+k)}, \nabla_k u)_{\mathbb{R}^N} dX \\ &\leq \frac{C}{R^{2(1+k)}} \left(\int_{|X|_k \leq 2R} |\bar{u}|^2 dX \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|X|_k \leq 2R} |\nabla_k |X|_k^{2(1+k)}|^2 |\nabla_k u|^2 dX \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{C}{R} \left(\int_{|X|_k \leq 2R} |\bar{u}|^2 dX \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|X|_k \leq 2R} |\nabla_k u|^2 dX \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\epsilon}{4}, \forall R \geq R_2. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall, chúng ta có

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) \left(\mathcal{C}(\bar{u}, u) - 2F(X, u) \right) dX \\ &\leq e^{-2\mu t} \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) \left(\mathcal{C}(\bar{u}_0, u_0) - 2F(X, u_0) \right) dX \end{aligned}$$

$$+ \epsilon \left(1 - e^{-2\mu t}\right), \quad \forall R \geq R(\epsilon).$$

Do $U_0 \in \mathcal{B}$ nên tồn tại hằng số $\mathcal{M} > 0$, thỏa mãn

$$\int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \left(\frac{|X|_k^{2(1+k)}}{R^{2(1+k)}} \right) \left(\mathcal{C}(\bar{u}_0, u_0) - 2F(X, u_0) \right) dX \leq \mathcal{M}.$$

Kết hợp với (3.9) và định nghĩa của hàm ϑ , chúng ta có điều phải chứng minh. $\square$

Từ Bổ đề 3.2.2, với mỗi $U = (u(t), u_t(t))$ là nghiệm của Bài toán (3.6), với điều kiện ban đầu $U_0 = (u_0, u_1) \in \mathcal{B}$, chúng ta có

$$\lim_{T, R \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_{|X|_k \geq R} \left(|u|^2 + |u_t|^2 + |\nabla_k u|^2 \right) dX ds = 0. \quad (3.13)$$

Bổ đề 3.2.3. *Giả sử $f(X, u)$ thỏa mãn các điều kiện (3.2)–(3.5) và $U_n \rightharpoonup U$ trong $\mathcal{H}$. Khi đó với mỗi $t \geq 0$ ta có*

$$S(t)U_n \rightharpoonup S(t)U \text{ trong } \mathcal{H}. \quad (3.14)$$

Chứng minh. Do $U_n \rightharpoonup U$ trong $\mathcal{H}$. Nên dãy $\{U_n\}$ là bị chặn trong không gian $\mathcal{H}$. Khi đó theo Bổ đề 3.2.1 ta có dãy $\{S(t)U_n\}$ bị chặn trong không gian $L^\infty(0, T; \mathcal{H})$ với mọi $T > 0$. Mà $f(X, u)$ thỏa mãn điều kiện (3.2) nên $\{f^*(S(t)U_n)\}$ cũng bị chặn trong không gian $L^\infty(0, T; \mathcal{H})$. Mặt khác $S(t)U_n$ là nghiệm của phương trình (3.6) nên $\left\{\frac{d}{dt}S(t)U_n\right\}$ bị chặn trong không gian $L^\infty(0, T; \mathcal{H}^{-1})$. Do đó có một dãy con $\{n_m\}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} S(t)U_{n_m} \rightharpoonup \Theta(t) & \text{trong } L^2(0, T; \mathcal{H}), \\ f^*(S(t)U_{n_m}) \rightharpoonup \chi & \text{trong } L^2(0, T; \mathcal{H}), \\ \frac{d}{dt}S(t)U_{n_m} \rightharpoonup \frac{d}{dt}\Theta(t) & \text{trong } L^2(0, T; \mathcal{H}^{-1}). \end{cases} \quad (3.15)$$

Giả sử $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, $\Theta(t) = \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix}$, khi đó $S(t)U_n = \begin{pmatrix} S(t)u_n \\ S(t)v_n \end{pmatrix}$,
nên

$$f^*(S(t)U_n) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta S(t)v_n + f(X, S(t)u_n) \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} S(t)u_{n_m} \rightharpoonup \theta_1(t) & \text{trong } L^2(0, T; S_k^2(\mathbb{R}^N)), \\ S(t)v_{n_m} \rightharpoonup \theta_2(t) & \text{trong } L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^N)), \end{cases} \quad (3.16)$$

và $\chi = \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta\theta_2(t) + \chi^* \end{pmatrix}$.

Chúng ta cần chứng minh $\chi^* = f(\cdot, \theta_1(t))$.

Thật vậy, với mọi $v \in S_k^2(\mathbb{R}^N)$, $t, t+a \in [0, T]$ chúng ta có

$$\begin{aligned} (S(t+a)u_{n_m} - S(t)u_{n_m}, v)_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \int_t^{t+a} ((S(\tau)u_{n_m})', v)_{L^2(\mathbb{R}^N)} d\tau \\ &\leq \|v\|_{S_k^2(\mathbb{R}^N)} \int_t^{t+a} \|(S(\tau)u_{n_m})'\|_{L^\infty(0, T; S_k^{-2}(\mathbb{R}^N))} d\tau \leq Ca \|v\|_{S_k^2(\mathbb{R}^N)}, \end{aligned}$$

ở đó C là hằng số độc lập với n_m . Chọn $v = S(t+a)u_{n_m} - S(t)u_{n_m}$, ta có

$$\limsup_{a \rightarrow 0} \sup_{n_m} \int_0^{T-a} \|S(t+a)u_{n_m} - S(t)u_{n_m}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 dt = 0, \quad \forall T > 0. \quad (3.17)$$

Giả sử $\phi \in C^1([0, +\infty), [0, +\infty))$ là hàm thỏa mãn

$$0 \leq \phi(s) \leq 1, \quad \phi(s) = 1, \quad \forall s \in [0, 1], \quad \phi(s) = 0, \quad \forall s \geq 2.$$

Với mỗi n_m và $\kappa \geq 1$, ta định nghĩa

$$\omega_{n_m, \kappa}(X, t) = \phi\left(\frac{|X|^2}{\kappa^2}\right) S(t)u_{n_m}.$$

Khi đó ta có với mọi $\kappa \geq 1$, dãy $\{\omega_{n_m, \kappa}\}_{n_m \geq 1}$ bị chặn trong không gian $L^2(0, T; S_{k,0}^2(\Omega_{2\kappa})) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega_{2\kappa}))$ với mọi $T > 0$. Hơn nữa, ta có

$$\limsup_{a \rightarrow 0} \sup_{n_m} \left(\int_0^a \|\omega_{n_m, \kappa}(X, t)\|_{L^2(\Omega_{2\kappa})}^2 dt + \int_{T-a}^T \|\omega_{n_m, \kappa}(X, t)\|_{L^2(\Omega_{2\kappa})}^2 dt \right) = 0,$$

trong đó $\Omega_{2\kappa} = \{X \in \mathbb{R}^N : |X| < 2\kappa\}$.

Mặt khác từ (3.17) ta có với mọi $\kappa \geq 1$,

$$\limsup_{a \rightarrow 0} \sup_{n_m} \int_0^{T-a} \|\omega_{n_m, \kappa}(X, t+a) - \omega_{n_m, \kappa}(X, t)\|_{L^2(\Omega_{2\kappa})}^2 dt = 0.$$

Hơn nữa, do $\Omega_{2\kappa}$ là tập bị chặn nên không gian $S_{k,0}^2(\Omega_{2\kappa})$ nhúng compact vào không gian $L^2(\Omega_{2\kappa})$. Khi đó, do Bổ đề compact trong [57], ta có $\{\omega_{n_m, \kappa}\}_{n_m \geq 1}$ là compact tương đối trong $L^2(0, T; L^2(\Omega_{2\kappa}))$.

Mặt khác $\omega_{n_m, \kappa}(X, t) = S(t)u_{n_m}$ với mọi $X \in \Omega_\kappa$, ta có với mọi $\kappa \geq 1$ dãy $\{S(t)u_{n_m}|_{\Omega_\kappa}\}$ là tiền compact trong $L^2(0, T; L^2(\Omega_\kappa))$. Nên tồn tại một dãy con của dãy $\{S(t)u_{n_m}\}$ ký hiệu là $\{S(t)u_{n_m}^{n_m}\}_{n_m \geq 1}$ thỏa mãn

$$S(t)u_{n_m}^{n_m} \rightarrow \theta_1 \text{ trong } \Omega_\kappa \times (0, +\infty) \text{ khi } n_m \rightarrow \infty, \forall \kappa \geq 1.$$

Khi đó, do $f(\cdot, \cdot)$ là liên tục nên $f(X, S(t)u_{n_m}^{n_m}) \rightarrow f(X, \theta_1)$ hầu khắp nơi trong $\Omega_\kappa \times (0, +\infty)$. Mà dãy $\{f(X, S(t)u_{n_m}^{n_m})\}$ là bị chặn trong $L^2(\Omega_\kappa \times (0, T))$. Nên ta có

$$f(X, S(t)u_{n_m}^{n_m}) \rightharpoonup f(X, \theta_1) \text{ trong } L^2(0, T; L^2(\Omega_\kappa)).$$

Từ tính duy nhất của giới hạn ta có

$$\chi^* = f(\cdot, \theta_1(t)) \text{ hầu khắp nơi trong } \Omega_\kappa \times (0, T), \quad \forall T > 0, \forall \kappa \geq 1,$$

mà $\bigcup_{\kappa=1}^{\infty} \Omega_\kappa = \mathbb{R}^N$, do vậy

$$\chi^* = f(\cdot, \theta_1(t)) \text{ hầu khắp nơi trong } \mathbb{R}^N \times (0, +\infty).$$

Do đó ta có

$$f^*(S(t)U_{n_m}) \rightharpoonup f^*(\Theta) \text{ trong } L^2(0, T; \mathcal{H}).$$

Do vậy ta có

$$e^{\mathbb{A}t}U_{n_m} + \int_0^t e^{\mathbb{A}(t-\tau)} f^*(S(\tau)U_{n_m}) d\tau \rightharpoonup e^{\mathbb{A}t}U + \int_0^t e^{\mathbb{A}(t-\tau)} f^*(\Theta) d\tau \text{ trong } \mathcal{H}.$$

Do tính duy nhất của giới hạn nên ta có

$$\Theta(t) = e^{\mathbb{A}t}U + \int_0^t e^{\mathbb{A}(t-\tau)} f^*(\Theta) d\tau,$$

do tính duy nhất của nghiệm do vậy $\Theta = S(t)U$. Do mỗi dãy con của dãy $\{S(t)U_n, \frac{d}{dt}S(t)U_n\}$ có một dãy con hội tụ trong không gian $L^2(0, T; \mathcal{H} \times \mathcal{H}^{-1})$ và giới hạn của mỗi dãy con này đều là $(S(t)U, \frac{d}{dt}S(t)U)$. Do vậy dãy $\{S(t)U_n, \frac{d}{dt}S(t)U_n\}$ hội tụ yếu đến $(S(t)U, \frac{d}{dt}S(t)U)$ trong $L^2(0, T; \mathcal{H} \times \mathcal{H}^{-1})$. Do đó với mỗi $t \in [0, T]$ ta có $S(t)U_n \rightharpoonup S(t)U$ trong $\mathcal{H}^{-1}$. Mặt khác do với mỗi $t \in [0, T]$ dãy $\{S(t)U_n\}$ là bị chặn trong $\mathcal{H}$. Nên ta có $S(t)U_n \rightharpoonup S(t)U$ trong $\mathcal{H}$. $\square$

Bổ đề 3.2.4. *Giả sử $f(X, u)$ thỏa mãn điều kiện (3.2) và Ω là một miền trơn bị chặn trong $\mathbb{R}^N$, $u_n \rightharpoonup u$ trong $S_k^2(\Omega)$, $v_n \rightarrow v$ trong $L^2(\Omega)$. Khi đó*

$$\int_{\Omega} f(X, u_n) v_n dX \rightarrow \int_{\Omega} f(X, u) v dX \text{ khi } n \rightarrow \infty,$$

và

$$\int_{\Omega} F(X, u_n) dX \rightarrow \int_{\Omega} F(X, u) dX \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega} f(X, u_n) v_n dX - \int_{\Omega} f(X, u) v dX \right| \\
&= \left| \int_{\Omega} \left(f(X, u_n) v_n - f(X, u_n) v + f(X, u_n) v - f(X, u) v \right) dX \right| \\
&\leq \int_{\Omega} \left| f(X, u_n) v_n - f(X, u_n) v \right| dX + \int_{\Omega} \left| f(X, u_n) v - f(X, u) v \right| dX \\
&= \int_{\Omega} \left| f(X, u_n) \right| \left| v_n - v \right| dX + \int_{\Omega} \left| v \right| \left| f(X, u_n) - f(X, u) \right| dX \\
&\leq \left(\int_{\Omega} \left| f(X, u_n) \right|^2 dX \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \left| v_n - v \right|^2 dX \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left(\int_{\Omega} \left| f(X, u_n) - f(X, u) \right|^2 dX \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \left| v \right|^2 dX \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Do $u_n \rightharpoonup u$ trong $S_k^2(\Omega)$, $v_n \rightarrow v$ trong $L^2(\Omega)$ và $f(X, u)$ thỏa mãn điều kiện (3.2). Do vậy dãy $\{u_n\}$ là bị chặn trong $S_k^2(\Omega)$ và $\{f(X, u_n)\}$ bị chặn trong $L^2(\Omega)$ nên

$$\left(\int_{\Omega} \left| f(X, u_n) \right|^2 dX \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \left| v_n - v \right|^2 dX \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Lý luận tương tự như Định lí 2.2.1 ta có

$$\left(\int_{\Omega} \left| f(X, u_n) - f(X, u) \right|^2 dX \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \left| v \right|^2 dX \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Do vậy

$$\int_{\Omega} f(X, u_n) v_n dX \rightarrow \int_{\Omega} f(X, u) v dX \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Chúng minh tương tự ta có

$$\int_{\Omega} F(X, u_n) dX \rightarrow \int_{\Omega} F(X, u) dX \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

□

Bổ đề 3.2.5. Giả sử $f(X, u)$ thỏa mãn các điều kiện (3.2)–(3.5), B là tập bị chặn trong $\mathcal{H}$ và ϵ là một số dương cố định. Khi đó tồn tại $T_0 = T_0(\epsilon, B)$ sao cho với mỗi dãy $\{U_n\}$ là dãy bị chặn trong B , hội tụ yếu về U trong $\mathcal{H}$ ta có

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|S(T)U_n\|_{\mathcal{H}} \leq \|S(T)U_0\|_{\mathcal{H}} + \epsilon \quad \text{với mọi } T \geq T_0. \quad (3.18)$$

Chứng minh. Chúng ta đặt

$$E(u(t), u_t(t)) := \frac{1}{2} \left(\|\nabla_k u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|u_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right),$$

$$[B(0, R)] = \{X \in \mathbb{R}^N, |X|_k \leq R\} \quad \text{với mỗi } R \in \mathbb{R}_+^*$$

và giả sử $S(t)U_n = (u_n(t), u_{nt}(t))$ là nghiệm của Bài toán (3.6) cùng với điều kiện ban đầu $U_n = (u_n(0), u_{nt}(0))$ và $S(t)U_0 = (u(t), u_t(t))$ là nghiệm của bài toán với điều kiện ban đầu $U_0 = (u(0), u_t(0))$. Từ Bổ đề 3.2.1 suy ra tồn tại $C > 0$ sao cho

$$\sup_{t \geq 0, n \geq 0} \|S(t)U_n\|_{\mathcal{H}} \leq C. \quad (3.19)$$

Nhân phương trình đầu của Bài toán (3.1) với $u_t + \frac{\beta}{2}u$ và tích phân trên $\mathbb{R}^N$, chúng ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(u_t + \frac{\beta}{2}u \right)^2 + \left(1 - \frac{\beta^2}{4} \right) u^2 + |\nabla_k u|^2 - 2F(X, u) \right] dX \\ &= -\frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(u_t + \frac{\beta}{2}u \right)^2 dX - \frac{\beta}{2} \left(1 - \frac{\beta^2}{4} \right) \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dX \\ & \quad - \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_k u|^2 dX + \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^N} f(X, u) u dX. \end{aligned}$$

Sử dụng tích chất của hàm $f(X, u)$, đánh giá tương tự như Bổ đề 3.2.1, chúng ta có

$$\left\| u_t + \frac{\beta}{2}u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \left(1 - \frac{\beta^2}{4} \right) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|\nabla_k u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u) dX$$

$$\leq e^{-\frac{\beta}{2}t} \left(\left\| u_t(0) + \frac{\beta}{2}u(0) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \left(1 - \frac{\beta^2}{4}\right) \|u(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right. \\ \left. + \|\nabla_k u(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u(0)) dX - C_1 \right) + C_1, \quad \forall t \geq 0.$$

Do đó tồn tại $C_2 > 0$, với mọi $t \geq 0$ ta có

$$\left\| u_t + \frac{\beta}{2}u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \left(1 - \frac{\beta^2}{4}\right) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|\nabla_k u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \\ - 2 \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u) dX \leq C_2.$$

Từ (3.10) suy ra

$$\left\| u_t + \frac{\beta}{2}u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \left(1 + \frac{\beta^2}{4}\right) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|\nabla_k u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \\ - 2 \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u) dX \leq C_3.$$

Nhân phương trình đầu của Bài toán (3.1) với $u_t + \frac{\beta}{2}u$ và tích phân trên $[0, T] \times \mathbb{R}^N$, chúng ta có

$$\frac{\beta}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} (|u_t|^2 + |u|^2 + |\nabla_k u|^2 - f(X, u)u) dX dt \\ = \frac{1}{2} \left[\left\| u_t(0) + \frac{\beta}{2}u(0) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \left(1 + \frac{\beta^2}{4}\right) \|u(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right. \\ \left. + \|\nabla_k u(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right] - \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u(0)) dX + \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u(T)) dX \\ - \frac{1}{2} \left[\left\| u_t(T) + \frac{\beta}{2}u(T) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \left(1 + \frac{\beta^2}{4}\right) \|u(T)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right. \\ \left. + \|\nabla_k u(T)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right].$$

Do đó

$$\left| \int_0^T \left[E(u(t), u_t(t)) - \int_{\mathbb{R}^N} f(X, u) u dX \right] dt \right| \leq C. \quad (3.20)$$

Tương tự như (3.20), do B là bị chặn trong $\mathcal{H}$ và $U_n \in B$, với mỗi $T \geq 0$ ta có

$$\left| \int_0^T \left[E(u_n(t), u_{nt}(t)) - \int_{\mathbb{R}^N} f(X, u_n) u_n dX \right] dt \right| \leq C. \quad (3.21)$$

Nhân phương trình một của Bài toán (3.1) với u_t và tích phân trên $[t, T] \times \mathbb{R}^N$, chúng ta có

$$\begin{aligned} & E(u(T), u_t(T)) - \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u(X, T)) dX + \beta \int_t^T \|u_\tau\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 d\tau \\ &= E(u(t), u_t(t)) - \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u(X, t)) dX. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Từ (3.20) và (3.22), ta có

$$\begin{aligned} & E(u(T), u_t(T)) - \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u(X, T)) dX + \frac{\beta}{T} \int_0^T \int_t^T \|u_\tau\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 d\tau dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[E(u(t), u_t(t)) - \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u(X, t)) dX \right] dt \\ &\geq \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left(-F(X, u(X, t)) + f(X, u) u \right) dX dt - \frac{C}{T}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Từ (3.21) và (3.22), chúng ta có

$$E(u_n(T), u_{nt}(T)) - \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u_n(X, T)) dX + \frac{\beta}{T} \int_0^T \int_t^T \|u_{n\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 d\tau dt$$

$$\leq \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left(-F(X, u_n(X, t)) + f(X, u_n)u_n \right) dX dt + \frac{C}{T}. \quad (3.24)$$

Từ (3.23) và (3.24), suy ra

$$\begin{aligned} E(u_n(T), u_{nt}(T)) &- \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u_n(X, T)) dX + \frac{\beta}{T} \int_0^T \int_t^T \|u_{n\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 d\tau dt \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left(F(X, u(X, t)) - F(X, u_n(X, t)) \right) dX dt \\ &+ \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left(f(X, u_n)u_n - f(X, u)u \right) dX dt + E(u(T), u_t(T)) \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u(X, T)) dX + \frac{\beta}{T} \int_0^T \int_t^T \|u_\tau\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 d\tau dt + \frac{2C}{T}, \end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned} E(u_n(T), u_{nt}(T)) &\leq \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left(F(X, u(X, t)) - F(X, u_n(X, t)) \right) dX dt \\ &+ \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left(f(X, u_n)u_n - f(X, u)u \right) dX dt + E(u(T), u_t(T)) \\ &+ \left(\int_{\mathbb{R}^N} F(X, u_n(X, T)) dX - \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u(X, T)) dX \right) + \frac{2C}{T} \\ &+ \frac{\beta}{T} \left(\int_0^T \int_t^T \|u_\tau\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 d\tau dt - \int_0^T \int_t^T \|u_{n\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 d\tau dt \right). \quad (3.25) \end{aligned}$$

Từ $U_n \rightharpoonup U$ suy ra $u_{nt} \rightharpoonup u_t$, và bởi tính nửa liên tục yếu của chuẩn, chúng ta có

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_{nt}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \geq \|u_t\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2,$$

khi đó với mỗi $\epsilon > 0$ tồn tại $N_0 > 0$ sao cho với mọi $N > N_0$, ta có

$$\int_0^T \int_t^T \|u_\tau\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 d\tau dt - \int_0^T \int_t^T \|u_{n\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 d\tau dt \leq \epsilon. \quad (3.26)$$

Từ Bổ đề 3.2.4, chúng ta có

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_{[B(0,R)]} \left(F(X, u(X, t)) - F(X, u_n(X, t)) \right) dX dt = 0, \quad (3.27)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_{[B(0,R)]} \left(f(X, u_n) u_n - f(X, u) u \right) dX dt = 0, \quad (3.28)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[B(0,R)]} \left(F(X, u_n(X, T)) - F(X, u(X, T)) \right) dX = 0. \quad (3.29)$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N \setminus [B(0,R)]} \left(F(X, u(X, t)) - F(X, u_n(X, t)) \right) dX dt \right| \\ & \leq \frac{C}{T} \int_0^T \left\{ \|u_n - u\|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus [B(0,R)])} \left[\left(\|u\|_{L^{2(\rho+1)}(\mathbb{R}^N \setminus [B(0,R)])}^{\rho+1} \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + \|u_n\|_{L^{2(\rho+1)}(\mathbb{R}^N \setminus [B(0,R)])}^{\rho+1} \right) + \|f(X, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus [B(0,R)])} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \|g\|_{L^{N_k}(\mathbb{R}^N \setminus [B(0,R)])} \left(\|u\|_{L^{\frac{2N_k}{N_k-2}}(\mathbb{R}^N \setminus [B(0,R)])} + \|u_n\|_{L^{\frac{2N_k}{N_k-2}}(\mathbb{R}^N \setminus [B(0,R)])} \right) \right] \right\} dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N \setminus [B(0,R)]} \left(f(X, u_n) u_n - f(X, u) u \right) dX dt \right| \\
& \leq \frac{C}{T} \int_0^T \left\{ \|u_n - u\|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus [B(0,R)])} \left(\|g\|_{L^{N_k}(\mathbb{R}^N \setminus [B(0,R)])} \|u_n\|_{L^{\frac{2N_k}{N_k-2}}(\mathbb{R}^N \setminus [B(0,R)])} \right. \right. \\
& \quad + \|u_n\|_{L^{r_1 \rho}(\mathbb{R}^N \setminus [B(0,R)])}^\rho \|u_n\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^N \setminus [B(0,R)])} + \|f(X, u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus [B(0,R)])}^2 \\
& \quad \left. \left. + \|u\|_{L^{r_1 \rho}(\mathbb{R}^N \setminus [B(0,R)])}^\rho \|u_n\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^N \setminus [B(0,R)])} \right) \right\} dt
\end{aligned}$$

trong đó $r_1 = \frac{2N_k}{(N_k - 2)\rho}$ nếu $\rho \neq 0$, $r_1 = N_k$ nếu $\rho = 0$ và $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{2}$.

Vì vậy, từ Bổ đề 3.2.2 và (3.13), ta có với mỗi số $\epsilon > 0$ tùy ý, tồn tại T_0 và R_0 thỏa mãn với mọi $T \geq T_0, R \geq R_0$, chúng ta có

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N \setminus [B(0,R)]} \left(F(X, u(X, t)) - F(X, u_n(X, t)) \right) dX dt \\
& + \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N \setminus [B(0,R)]} \left(f(X, u_n) u_n - f(X, u) u \right) dX dt \\
& + \int_{\mathbb{R}^N \setminus [B(0,R)]} \left(F(X, u_n(X, T)) - F(X, u(X, T)) \right) dX + \frac{C}{T} \leq \epsilon. \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Do đó từ (3.26), (3.27), (3.28), (3.29) và (3.30), sau đó chuyển qua giới hạn chúng ta có

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E(u_n(T), u_{nt}(T)) \leq E(u(T), u_t(T)) + \epsilon,$$

suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Bây giờ ta chứng minh tính compact tiệm cận của $S(t)$ trong $\mathcal{H}$.

Định lí 3.2.6. *Giả sử $f(X, u)$ thỏa mãn các điều kiện (3.2)–(3.5). Khi đó $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ là compact tiệm cận trong $\mathcal{H}$, nghĩa là, với mọi dãy bị chặn*

$\{U_n\}_{n=1}^\infty$ trong $\mathcal{H}$ và mọi dãy không âm $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ thỏa mãn $t_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, khi đó $\{S(t_n)U_n\}_{n=1}^\infty$ có một dãy con hội tụ trong $\mathcal{H}$.

Chứng minh. Từ Bổ đề 3.2.1, chúng ta có tồn tại một tập bị chặn $\mathcal{B}$ trong $\mathcal{H}$ thỏa mãn $S(t_n)U_n \subset \mathcal{B}, \forall n \in \mathbb{N}$, do đó tồn tại $U \in \mathcal{H}$ và một dãy con $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ sao cho

$$S(t_{n_k})U_{n_k} \rightharpoonup U \text{ trong } \mathcal{H},$$

nên

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \|S(t_{n_k})U_{n_k}\|_{\mathcal{H}} \geq \|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.31)$$

Bây giờ, chúng ta sẽ chứng minh tồn tại một dãy con của dãy $S(t_{n_k})U_{n_k}$ hội tụ mạnh tới U trong $\mathcal{H}$, bằng cách chúng ta sẽ xây dựng dãy con $S(t_{n_{k_j}})U_{n_{k_j}}$ của $S(t_{n_k})U_{n_k}$ thỏa mãn

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \|S(t_{n_{k_j}})U_{n_{k_j}}\|_{\mathcal{H}} \leq \|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Thật vậy, từ Bổ đề 3.2.5 ta có với mỗi $l > 0$ tồn tại $T_0 = T_0(l, \mathcal{B})$ sao cho với mỗi $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{B}, \varphi_i \rightharpoonup \varphi$ trong $\mathcal{H}$, chúng ta có

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \|S(T_0)\varphi_i\|_{\mathcal{H}} \leq \|S(T_0)\varphi\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{l}. \quad (3.32)$$

Vì $t_{n_k} \geq T_0$, khi đó ta có

$$S(t_{n_k} - T_0)U_{n_k} \subset \mathcal{B}.$$

Do đó có U_{T_0} và một dãy con $\{n_{k_{j(l)}}\}_{j(l)=1}^\infty$ của dãy $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ thỏa mãn

$$S(t_{n_{k_{j(l)}}} - T_0)U_{n_{k_{j(l)}}} \rightharpoonup U_{T_0} \text{ trong } \mathcal{H}, \quad (3.33)$$

nên sử dụng Bổ đề 3.2.3, suy ra

$$S(t_{n_{k_{j(l)}}})U_{n_{k_{j(l)}}} = S(T_0)S(t_{n_{k_{j(l)}}} - T_0)U_{n_{k_{j(l)}}} \rightharpoonup S(T_0)U_{T_0} \text{ trong } \mathcal{H}.$$

Do tính duy nhất của giới hạn nên $U = S(T_0)U_{T_0}$.

Lấy $\varphi_{k_{j(l)}} = S(t_{n_{k_{j(l)}}} - T_0)U_{n_{k_{j(l)}}}$ trong (3.32), chúng ta có

$$\limsup_{j(l) \rightarrow \infty} \left\| S(T_0)S(t_{n_{k_{j(l)}}} - T_0)U_{n_{k_{j(l)}}} \right\|_{\mathcal{H}} \leq \|S(T_0)U_{T_0}\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{l}.$$

Suy ra,

$$\limsup_{j(l) \rightarrow \infty} \left\| S(t_{n_{k_{j(l)}}})U_{n_{k_{j(l)}}} \right\|_{\mathcal{H}} \leq \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{l}. \quad (3.34)$$

Với $l = 1$ từ (3.34) tồn tại $j_1(1)$ thỏa mãn

$$\left\| S(t_{n_{k_{j_1(1)}}})U_{n_{k_{j_1(1)}}} \right\|_{\mathcal{H}} \leq \|U\|_{\mathcal{H}} + 2.$$

Ta định nghĩa $j_1(1)$ bởi j_1 .

Với $l = 2$ từ (3.34) tồn tại $j_2(2)$ thỏa mãn $n_{k_{j_1}} < n_{k_{j_2(2)}}$ và

$$\left\| S(t_{n_{k_{j_2(2)}}})U_{n_{k_{j_2(2)}}} \right\|_{\mathcal{H}} \leq \|U\|_{\mathcal{H}} + 1.$$

Ta định nghĩa $j_2(2)$ bởi j_2 .

Tương tự, với $l = m$ từ (3.34) tồn tại $j_m(m)$ thỏa mãn $n_{k_{j_{m-1}}} < n_{k_{j_m(m)}}$ và

$$\left\| S(t_{n_{k_{j_m(m)}}})U_{n_{k_{j_m(m)}}} \right\|_{\mathcal{H}} \leq \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{2}{m}.$$

Ta định nghĩa $j_m(m)$ bởi j_m .

Cứ làm như vậy ta có dãy $\{n_{k_{j_i}}\}_{i=1}^{\infty}$ là dãy con của dãy $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ và thỏa mãn

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \left\| S(t_{n_{k_{j_i}}})U_{n_{k_{j_i}}} \right\|_{\mathcal{H}} \leq \|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Do đó ta có điều phải chứng minh. $\square$

Ta chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục của nửa nhóm $S(t)$ trong $\mathcal{H}$.

Định lí 3.2.7. Giả sử $f(X, u)$ thỏa mãn điều kiện (3.2)–(3.5). Khi đó nửa nhóm $S(t)$ sinh ra bởi Bài toán (3.1) có một tập hút toàn cục $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ trong $\mathcal{H}$.

Chứng minh. Kí hiệu

$$\mathcal{B} = \left\{ U \in \mathcal{H} : \|U\|_{\mathcal{H}}^2 < M \right\},$$

ở đây M là hằng số trong (3.7). Khi đó $\mathcal{B}$ là tập hấp thụ của $S(t)$ trong $\mathcal{H}$. Hơn nữa, $S(t)$ là compact tiệm cận trong $\mathcal{H}$ do Định lí 3.2.6. Vì vậy, ta có sự tồn tại tập hút toàn cục $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ của $S(t)$ trong $\mathcal{H}$. $\square$

Ví dụ 3.2.8. Hãy chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục của bài toán Cauchy sau

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} + u = G_{\frac{1}{2}} u + f(X, u) \text{ với } X = (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = u_1(x, y) \text{ với } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

trong đó $u_0(x, y) \in S_{1/2}^2(\mathbb{R}^2)$, $u_1(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$, β là các hằng số dương

$$G_{\frac{1}{2}} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |x| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

và

$$f(X, u) = \begin{cases} \frac{-u(1-u^2)}{|X|^4+1} & \text{khi } |u| \leq 1, |X|^2 = x^2 + y^2, \\ \frac{u(1-u^2)}{|X|^4+1} & \text{khi } |u| \geq 1. \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$F(X, u) = \int_0^u f(X, \xi) d\xi.$$

Nếu $|u| \leq 1$ ta có

$$F(X, u) = \int_0^u \frac{-\xi(1-\xi^2)}{|X|^4+1} d\xi = -\frac{1}{|X|^4+1} \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4} \right).$$

Nếu $|u| \geq 1$ ta có

$$\begin{aligned}
F(X, u) &= \int_0^u f(X, \xi) d\xi = \int_0^1 f(X, \xi) d\xi + \int_1^u f(X, \xi) d\xi \\
&= \int_0^1 \frac{-\xi(1 - \xi^2)}{|X|^4 + 1} d\xi + \int_1^u \frac{\xi(1 - \xi^2)}{|X|^4 + 1} d\xi \\
&= \frac{1}{|X|^4 + 1} \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4} - \frac{1}{2} \right).
\end{aligned}$$

Do đó

$$F(X, u) = \begin{cases} \frac{-1}{|X|^4 + 1} \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4} \right) & \text{khi } |u| \leq 1, \\ \frac{1}{|X|^4 + 1} \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4} - \frac{1}{2} \right) & \text{khi } |u| \geq 1. \end{cases}$$

Bây giờ chúng ta sẽ đi kiểm tra các điều kiện (3.2)–(3.5) đối với hàm $f(X, u)$ trong điều kiện (3.2) là $C = 3, \rho = 4, g(X) = \frac{1}{|X|^4 + 1} + \frac{1}{(|X|^4 + 1)^2} \in L^{\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\frac{5}{4}}(\mathbb{R}^N)$ và $N_{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}$.

Thật vậy, nếu $|u|$ và $|v|$ cùng nhỏ hơn bằng 1 hoặc cùng lớn hơn bằng 1, khi đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned}
|f(X, u) - f(X, v)| &= \left| \frac{u(1 - u^2)}{|X|^4 + 1} - \frac{v(1 - v^2)}{|X|^4 + 1} \right| \\
&= \left| \frac{1}{|X|^4 + 1} \right| |u(1 - u^2) - v(1 - v^2)| \\
&\leq \left| \frac{1}{|X|^4 + 1} \right| |u - v| \left| 1 + \frac{3}{2}u^2 + \frac{3}{2}v^2 \right| \\
&\leq |u - v| \left| u^4 + v^4 + \frac{1}{|X|^4 + 1} + \left(\frac{1}{|X|^4 + 1} \right)^2 \right|.
\end{aligned}$$

Nếu $|u|$ và $|v|$ có một số lớn hơn 1 và một số nhỏ hơn 1 khi đó ta có

$$|u - 1| \leq |u - v|, |v - 1| \leq |u - v|,$$

$$\begin{aligned}
|f(X, u) - f(X, v)| &\leq |f(X, u) - f(X, 1)| + |f(X, 1) - f(X, v)| \\
&\leq \left| u - 1 \right| \left| u^4 + 1 + \frac{1}{|X|^4 + 1} + \left(\frac{1}{|X|^4 + 1} \right)^2 \right| \\
&\quad + \left| v - 1 \right| \left| 1 + v^4 + \frac{1}{|X|^4 + 1} + \left(\frac{1}{|X|^4 + 1} \right)^2 \right| \\
&\leq |u - v| \left(2 + u^4 + v^4 + \frac{2}{|X|^4 + 1} + 2 \left(\frac{1}{|X|^4 + 1} \right)^2 \right) \\
&\leq 3|u - v| \left(u^4 + v^4 + \frac{1}{|X|^4 + 1} + \left(\frac{1}{|X|^4 + 1} \right)^2 \right).
\end{aligned}$$

Vậy hàm $f(X, u)$ thỏa mãn điều kiện (3.2).

Ta có $f(X, 0) = 0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$, nên $f(X, u)$ thỏa mãn điều kiện (3.3).

Với điều kiện (3.4), ta chọn $C_1 = \frac{1}{4}$, $g_1(X) = -\frac{1}{4(|X|^4 + 1)} \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

Thật vậy, ta tìm C_1 và $g_2(X) = \frac{C_2}{|X|^4 + 1}$ thỏa mãn

$$\begin{aligned}
F(X, u) &\geq C_1 f(X, u) u + \frac{C_2}{|X|^4 + 1} \\
\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1}{|X|^4 + 1} \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4} \right) \geq C_1 \frac{-u(1-u^2)}{|X|^4 + 1} + \frac{C_2}{|X|^4 + 1} & \text{khi } |u| \leq 1, \\ \frac{1}{|X|^4 + 1} \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4} - \frac{1}{2} \right) \geq C_1 u (1 - u^2) + C_2 & \text{khi } |u| \geq 1, \end{cases} \\
\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4} \right) \geq -u C_1 (1 - u^2) + C_2 & \text{khi } |u| \leq 1, \\ \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4} - \frac{1}{2} \geq C_1 u (1 - u^2) + C_2 & \text{khi } |u| \geq 1, \end{cases} \\
\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{4} - C_1 \right) u^4 + \left(C_1 - \frac{1}{2} \right) u^2 \geq C_2 & \text{khi } |u| \leq 1, \\ \left(C_1 - \frac{1}{4} \right) u^4 + \left(\frac{1}{2} - C_1 \right) u^2 \geq C_2 + \frac{1}{2} & \text{khi } |u| \geq 1, \end{cases}
\end{aligned}$$

ta chọn $C_1 = \frac{1}{4}$ khi đó C_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}u^2 \geq C_2 & \text{khi } |u| \leq 1, \\ \frac{1}{4}u^2 \geq C_2 + \frac{1}{2} & \text{khi } |u| \geq 1, \end{cases}$$

nên ta chọn $C_2 = -\frac{1}{4}$. Khi đó ta có

$$F(X, u) \geq \frac{1}{4} f(X, u) u - \frac{1}{4(|X|^4 + 1)}, \quad \forall X \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{-1}{|X|^4+1} \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4} \right) &\leq 0, \quad \forall X \in \mathbb{R}^2, \forall |u| \leq 1, \\ \frac{1}{|X|^4+1} \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4} - \frac{1}{2} \right) &\leq 0, \quad \forall X \in \mathbb{R}^2, \forall |u| \geq 1.\end{aligned}$$

Nên $F(X, u(X)) \leq 0$, với mọi $u \in S_{1/2}^2(\mathbb{R}^2)$. Vậy hàm $f(X, u)$ thỏa mãn điều kiện (3.5).

Do đó $f(X, u)$ thỏa mãn các điều kiện (3.2)–(3.5). Nên áp dụng Định lí 3.2.7, chúng ta có Ví dụ 3.2.8 tồn tại một tập hút toàn cục $\mathcal{A}_{S_{1/2}^2(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)}$ trong $S_{1/2}^2(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$ đối với nửa nhóm $S(t)$ sinh bởi Ví dụ 3.2.8.

KẾT LUẬN

Các kết quả đạt được

1. Đối với phương trình hyperbolic tắt dần chứa toán tử Grushin trong miền bị chặn: Chứng minh được sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân. Chứng minh được sự tồn tại của tập hút toàn cục liên thông compact trong không gian $S_{k,0}^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ và chứng minh được số chiều fractal của tập hút là hữu hạn.
2. Đối với phương trình hyperbolic tắt dần chứa toán tử Grushin trong toàn không gian: Chứng minh được sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân. Chứng minh được sự tồn tại của tập hút toàn cục trong không gian $S_k^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$.
3. Đưa ra được ví dụ minh họa cho các bài toán về sự tồn tại nghiệm yếu và tồn tại tập hút toàn cục trong các không gian tương ứng.

Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh các kết quả đạt được trong đề tài, một số vấn đề mở liên quan cần được tiếp tục nghiên cứu như:

1. Nghiên cứu điều kiện tồn tại nghiệm của các bài toán biên nói trên trong miền không bị chặn, trong miền bị chặn với điều kiện biên Dirichlet không thuần nhất.
2. Nghiên cứu các tính chất của tập hút toàn cục như: số chiều, sự phụ thuộc liên tục vào các tham số, tính trơn,

3. Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm và dáng điệu tiệm cận nghiệm của các phương trình hyperbolic suy biến với các điều kiện biên khác nhau, chẳng hạn điều kiện biên không thuần nhất, điều kiện biên Neumann, điều kiện biên hỗn hợp, điều kiện biên phi tuyến, ... Để làm được điều này cần xây dựng được không gian có trọng tương ứng, định lí nhúng kiểu Sobolev.
4. Nghiên cứu sự tồn tại tập hút khi hàm phi tuyến phụ thuộc thời gian như tập hút lùi, tập hút đều.

Tài liệu tham khảo

- [1] C. T. Anh (2010), Pullback attractors for non-autonomous parabolic equations involving Grushin operator. *Electron. J. Differential Equations*, no. 11, 1–14.
- [2] C. T. Anh (2014), Global attractor for a semilinear strongly degenerate parabolic equation on $\mathbb{R}^N$. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 21, no. 5, 663–678.
- [3] C. T. Anh; P. Q. Hung; T. D. Ke; T. T. Phong (2008), Global attractor for a semilinear parabolic equation involving the Grushin operator. *Electron. J. Differential Equations*, no. 32, 1–11.
- [4] C. T. Anh; T. D. Ke (2009), Existence and continuity of global attractors for a degenerate semilinear parabolic equation. *Electron. J. Differential Equations*, no. 61, 1–13.
- [5] C. T. Anh; B. K. My (2016), Existence of solutions to Δ_λ –Laplace equations without the Ambrosetti-Rabinowitz condition. *Complex Var. Elliptic Equ.* 61, no. 1, 137–150.
- [6] C. T. Anh; B. K. My (2016), Liouville-type theorems for elliptic inequalities involving the Δ_λ –Laplace operator. *Complex Var. Elliptic Equ.* 61, no. 7, 1002–1013.
- [7] C. T. Anh; N. V. Quang (2011), Uniform attractors for a non-autonomous parabolic equation involving Grushin operator. *Acta Math. Vietnam.* 36, no. 1, 19–33.

- [8] C. T. Anh; V. M. Toi (2013), Null controllability of a parabolic equation involving the Grushin operator in some multi-dimensional domains. *Nonlinear Anal.* 93, 181–196.
- [9] C. T. Anh; V. M. Toi (2016), Null controllability in large time of a parabolic equation involving the Grushin operator with an inverse-square potential. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 23, no. 2, Art. 20, 26 pp.
- [10] J. M. Arrieta; A. N. Carvalho; J. K. Hale (1992), A damped hyperbolic equation with critical exponent. *Comm. Partial Differential Equations* 17, no. 5–6, 841–866.
- [11] A. V. Babin; M. I. Vishik (1992), *Attractors of Evolution Equations*. Translated and revised from the 1989 Russian original by Babin. Studies in Mathematics and its Applications, 25. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1992. x+532 pp.
- [12] J. M. Ball (2004), Global attractor for damped semilinear wave equations. *Partial differential equations and applications. Discrete Contin. Dyn. Syst.* 10, no. 1–2, 31–52.
- [13] K. Beauchard; P. Cannarsa; R. Guglielmi (2014), Null controllability of Grushin-type operators in dimension two. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 16, no. 1, 67–101.
- [14] T. Bieske (2002), Viscosity solutions on Grushin type planes. *Illinois J. Math.* 46, no. 3, 893–911.
- [15] H. Brezis; L. Nirenberg (1983), Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Comm. Pure Appl. Math.* 36, no. 4, 437–477.

- [16] A. Carvalho; J. A. Langa; J. C. Robinson (2013), *Attractors for Infinite Dimensional Non-Autonomous Dynamical Systems*. Applied Mathematical Sciences, 182. Springer, New York. xxxvi+409 pp.
- [17] V. V. Chepyzhov; M. I. Vishik (2002), *Attractors for Equations of Mathematical Physics*. American Mathematical Society Colloquium Publications, 49. American Mathematical Society, Providence, RI. xii+363 pp.
- [18] I. D. Chueshov (1999), *Introduction to the theory of infinite - dimensional dissipative systems*. [University Lectures in Contemporary Mathematics] AKTA, Kharkiv. 436 pp.
- [19] N. M. Chuong; T. D. Ke; N. V. Thanh; N. M. Tri (1999), Non - existence theorem for boundary value problem for some classes of semilinear degenerate elliptic operators. *Proceeding of the conference on PDEs and their applications*, Hanoi Dec, 185–190.
- [20] N. M. Chuong; T. D. Ke (2004), Existence of solutions for a nonlinear degenerate elliptic system. *Electron. J. Differential Equations*, no. 93, 15 pp.
- [21] N. M. Chuong; T. D. Ke (2005), Existence results for a semilinear parametric problem with Grushin type operator. *Electron. J. Differential Equations*, no. 107, 12 pp.
- [22] Fall Djiby (2005), *Longtime dynamics of hyperbolic evolutionary equations in ubounded domains and lattice systems*. Graduate Theses and Dissertations, University of South Florida, <http://scholarcommons.usf.edu/etd/2875>.

- [23] E. Feireisl (1994), Attractors for semilinear damped wave equations on $\mathbb{R}^3$. *Nonlinear Anal.* 23, no. 2, 187–195.
- [24] Friedman (1958), On the regularity of the solutions of nonlinear elliptic and parabolic systems of partial differential equations. *J. Math. Mech.* 7, 43–59.
- [25] V. V. Grushin (1970), A certain class of hypoelliptic operators. (Russian) *Mat. Sb.(N.S.)* 83 (125), 456–473.
- [26] V. V. Grushin (1971), A certain class of elliptic pseudodifferential operators that are degenerate on a submanifold. (Russian) *Mat. Sb. (N.S.)* 84 (126), 163–195.
- [27] H. B. Xiao (2009), Global attractors for semilinear damped wave equations with critical exponent on $\mathbb{R}^N$. *Chaos Solitons Fractals* 41, no. 5, 2546–2552.
- [28] J. K. Hale, Asymptotic behaviour and dynamics in infinite dimensions. *Nonlinear differential equations* (Granada, 1984), 1–42, *Res. Notes in Math.*, 132, Pitman, Boston, MA, 1985.
- [29] J. K. Hale; G. Raugel, Attractors for dissipative evolutionary equations. *International Conference on Differential Equations*, Vol. 1, 2 (Barcelona, 1991), 3–22, *World Sci. Publ., River Edge, NJ*, 1993.
- [30] A. Haraux, Two remarks on hyperbolic dissipative problems. (French summary) *Nonlinear partial differential equations and their applications*. Collège de France seminar, Vol. VII (Paris, 1983–1984), 6, 161–179, *Res. Notes in Math.*, 122, Pitman, Boston, MA, 1985

- [31] B. Helffer; J. Nourrigat (1985), *Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs*. (French) [Maximal hypoellipticity for polynomial operators of vector fields] Progress in Mathematics, 58. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA. x+278pp.
- [32] L. Hörmander (1966), Psedo-differential operators and non-elliptic boundary problems. *Ann. of Math.*(2) 83, 129–209.
- [33] D. S. Jerison; J. M. Lee (1987), The Yamabe problem on CR manifolds. *J. Differential Geom.* 25, no. 2, 167–197.
- [34] T. T. Khanh; N. M. Tri (2010), On the analyticity of solutions to semilinear differential equations degenerated on a submanifold. *J. Differential Equations* 249, no. 10, 2440–2475.
- [35] A. E. Kogoj; E. Lanconelli (2012), On semilinear Δ_λ –Laplace equation. *Nonlinear Anal.* 75, no. 12, 4637–4649.
- [36] A. E. Kogoj; S. Sonner (2013), Attractors for a class of semi-linear degenerate parabolic equations. *J. Evol. Equ.* 13, no. 3, 675–691.
- [37] A. E. Kogoj; S. Sonner (2014), Attractors met X –elliptic operators. *J. Math. Anal. Appl.* 420, no. 1, 407–434.
- [38] A. E. Kogoj; S. Sonner (2016), Hardy type inequalities for Δ_λ –Laplacians. *Complex Var. Elliptic Equ.* 61, no. 3, 422–442.
- [39] E. Lanconelli; A. E. Kogoj (2000), X –elliptic operators and X –control distances. *Contributions in honor of the memory of Ennio De Giorgi (Italian)*. *Ricerche Mat.* 49, suppl., 223–243.
- [40] D. T. Luyen and N. M. Tri (2012), *On boundary value problem for*

- semilinear degenerate elliptic differential equations*, AIP Conf. Proc. 1450, 13–17.
- [41] D. T. Luyen and N. M. Tri (2015), *Existence of solutions to boundary value problems for semilinear Δ_γ differential equations*, Mathematical Notes, Vol. 97, No. 1, 73–84.
 - [42] D. T. Luyen and N. M. Tri (2016), *Large - time behavior of solutions to damped hyperbolic equation involving strongly degenerate elliptic differential operators*, Siberian Mathematical Journal, Vol. 57, No. 4, 632–649.
 - [43] D. T. Luyen and N. M. Tri (2016), *Global attractor of the Cauchy problem for a semilinear degenerate damped hyperbolic equation involving the Grushin operator*, Annales Polonici Mathematici, Vol. 117, No. 2, 141–162.
 - [44] D. T. Luyen and N. M. Tri, *Multiple solutions to boundary value problems for semilinear elliptic equations*, submitted.
 - [45] D. T. Luyen and N. M. Tri, *On the existence of multiple solutions to boundary value problems for semilinear elliptic degenerate operators*, submitted.
 - [46] D. T. Luyen, *Two nontrivial solutions of boundary value problems for semilinear Δ_γ differential equations*, Math. Notes **101** (2017), no. 5, 64–72.
 - [47] J. Málek; D. Pražák (2002), *Large time behavior via the method of ℓ –trajectories*. *J. Differential Equations* 181, no. 2, 243–279.

- [48] A. Miranville; S. Zelik (2008), *Attractors for dissipative partial differential equations in bounded and unbounded domains*. Handbook of differential equations: evolutionary equations. Vol. IV, 103–200, Handb. Differ. Equ., Elsevier/North-Holland, Amsterdam.
- [49] A. Pazy (1983), *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Applied Mathematical Sciences, 44. Springer-Verlag, New York, 1983. viii+279 pp.
- [50] D. Pražák (2002), On finite fractal dimension of the global attractor for the wave equation with nonlinear damping. *J. Dynam. Differential Equations* 14, no. 4, 763–776.
- [51] D. T. Quyet; L. T. Thuy; N. X. Tu (2016), Semilinear strongly degenerate parabolic equation with a new class of nonlinearities. *Vietnam J. Math.* doi:10.1007/s10013-016-0228-5.
- [52] G. Raugel (2002), *Global Attractors in Partial Differential Equations*. Handbook of dynamical systems, Vol. 2, 885–982, North-Holland, Amsterdam.
- [53] J. C. Robinson (2001), *Infinite-Dimensional Dynamical Systems*. An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, xviii+461 pp.
- [54] G. R. Sell; Y. You (2002), *Dynamics of Evolutionary Equations*. Applied Mathematical Sciences, 143. Springer-Verlag, New York, 2002. xiv+670 pp.

- [55] D. Tartakoff; L. Zanghirati (2005), Local real analyticity of solutions for sums of squares of non-linear vector fields. *J. Differential Equations*, 213, no. 2, 341–351.
- [56] R. Temam (1988), *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*. Applied Mathematical Sciences, 68. Springer-Verlag, New York. xvi+500 pp.
- [57] R. Temam (1995), *Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis*. Second edition. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 66. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA. xiv+141 pp.
- [58] N. T. C. Thuy; N. M. Tri (2002), Some existence and nonexistence results for boundary value problems for semilinear elliptic degenerate operators. *Russ. J. Math. Phys.* 9, no. 3, 365–370.
- [59] P. T. Thuy; N. M. Tri (2012), Nontrivial solutions to boundary value problems for semilinear strongly degenerate elliptic differential equations. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 19, no. 3, 279–298.
- [60] P. T. Thuy; N. M. Tri (2013), Long time behavior of solutions to semilinear parabolic equations involving strongly degenerate elliptic differential operators. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 20, no. 3, 1213–1224.
- [61] F. Trèves, Symplectic geometry and analytic hypo-ellipticity. Differential equations: La Pietra 1996 (Florence), 201–219, *Proc. Sympos. Pure Math.*, 65, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

- [62] N. M. Tri (1998), On the Grushin equation. *Mat. Zametki* 63, no. 1, 95–105; translation in *Math. Notes* 63, no. 1–2, 84–93.
- [63] N. M. Tri (1998), Critical Sobolev exponent for degenerate elliptic operators. *Acta Math. Vietnam.* 23, no. 1, 83–94.
- [64] N. M. Tri (1999), Semilinear perturbation of powers of the Mizohata operators. *Comm. Partial Differential Equations* 24, no. 1–2, 325–354.
- [65] N. M. Tri (2008), Semilinear hypoelliptic differential operators with multiple characteristics. *Trans. Amer. Math. Soc.* 360, no. 7, 3875–3907.
- [66] N. M. Tri (2010), *Semilinear Degenerate Elliptic Differential Equations, Local and global theories*. Lambert Academic Publishing, 271p.
- [67] N. M. Tri (2014), *Recent Progress in the Theory of Semilinear Equations Involving Degenerate Elliptic Differential Operators*. Publishing House for Science and Technology of the Vietnam Academy of Science and Technology, 380p.
- [68] B. Wang (1999), Attractors for reaction-diffusion equation in unbounded domains. *Phys. D* 128, no. 1, 41–52.
- [69] C. J. Xu (1992), Regularity for quasilinear second-order subelliptic equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 45, no. 1, 77–96.