

TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ
KHOA TỰ NHIÊN

NGUYỄN THỊ YẾN

KỸ THUẬT CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC
BẰNG PHƯƠNG PHÁP DỒN BIẾN

KHÓA LUẬN TỐT NGHIỆP ĐẠI HỌC
NGÀNH SƯ PHẠM TOÁN - TIN

Hệ đào tạo: Chính quy

Khóa: 2012 - 2016

NINH BÌNH - 2016

TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ
KHOA TỰ NHIÊN

NGUYỄN THỊ YẾN

KỸ THUẬT CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC
BẰNG PHƯƠNG PHÁP DỒN BIẾN

KHÓA LUẬN TỐT NGHIỆP ĐẠI HỌC
NGÀNH SƯ PHẠM TOÁN - TIN

Hệ đào tạo: Chính quy

Khóa: 2012 - 2016

Người hướng dẫn Ths. Dương Trọng Luyện

NINH BÌNH - 2016

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM

Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

.....

**BIÊN BẢN XÁC NHẬN
CHỈNH SỬA KHÓA LUẬN TỐT NGHIỆP**

Họ và tên tác giả: Nguyễn Thị Yến.

Đề tài luận văn: Kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp dồn biến.

Chuyên ngành: Sư phạm Toán - Tin.

Tác giả và người hướng dẫn khoa học, xác nhận tác giả đã sửa chữa, bổ sung luận văn theo biên bản họp Hội đồng ngày 10 tháng 6 năm 2016.

Ninh Bình, ngày 11 tháng 6 năm 2016

Giảng viên hướng dẫn

Tác giả khóa luận

Dương Trọng Luyện

Nguyễn Thị Yến

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của thầy Dương Trọng Luyện. Em xin gửi đến thầy sự kính trọng và lòng biết ơn sâu sắc.

Em xin bày tỏ lòng biết ơn đến quý thầy cô giáo đã giảng dạy lớp D5 Toán khoá 2012 - 2016 của trường Đại Học Hoa Lư, đặc biệt là các thầy cô trong Bộ môn Toán - Khoa Tự Nhiên đã giảng dạy tận tình và quan tâm, động viên em trong suốt quá trình học tập và thực hiện đề tài.

Em cũng xin gửi lời cảm ơn những người thân trong gia đình, bạn bè, tập thể lớp D5 Toán đã luôn ủng hộ, động viên và nhiệt tình giúp đỡ em trong suốt thời gian vừa qua.

Tác giả

Nguyễn Thị Yến

Mục lục

Mở đầu	1
1 Một số kiến thức cơ bản	4
1.1 Tổng quan về phương pháp dồn biến	4
1.2 Định lí dồn biến tổng quát	6
2 Kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp dồn biến	11
2.1 Một số phương pháp dồn biến thông dụng	11
2.2 Một số bất đẳng thức đơn giản dùng phương pháp dồn biến	41
Kết luận	64
Tài liệu tham khảo	64

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Trong chương trình Toán THPT, bất đẳng thức ngày càng được quan tâm đúng mức, nó có sức hấp dẫn mạnh mẽ nhờ vẻ đẹp và tính độc đáo của phương pháp cũng như kỹ thuật giải chúng.

Bất đẳng thức là một trong những dạng toán hay và khó đối với học sinh trong quá trình học tập và các kì thi nói chung và các kì thi học sinh giỏi ở các cấp tỉnh, quốc gia, Olympic nói riêng.

Các bài toán bất đẳng thức không những rèn luyện tư duy sáng tạo, trí thông minh mà còn đem lại say mê và yêu thích môn Toán ở người học.

Hiện nay có nhiều tài liệu viết về các phương pháp chứng minh bất đẳng thức nhưng ít có tài liệu viết về kỹ thuật sử dụng các phương pháp để chứng minh bất đẳng thức, đặc biệt là kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp dồn biến.

Một bài tập chứng minh bất đẳng thức có thể giải theo nhiều cách khác nhau, tuy nhiên nên chọn theo cách nào để được lời giải ngắn gọn, xúc tích, hay nhất để có thể mở rộng, tổng quát thì cần hiểu sâu, nắm được một số kỹ thuật cơ bản để chứng minh bất đẳng thức.

Từ những lý do trên em lựa chọn nghiên cứu đề tài ***“Kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp dồn biến”***.

Ngoài phần mở đầu, tài liệu tham khảo, khóa luận chia làm 2 chương
Chương 1 *Một số kiến thức cơ bản.*

Chương 2 *Kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp dồn biến.*

Chương 1 được giành cho việc trình bày các kiến thức cơ bản của phương pháp dồn biến.

Chương 2 được giành cho việc trình bày các phương pháp dồn biến bằng kỹ thuật hàm số, dồn biến bằng hàm lồi, dồn biến về giá trị trung bình và các bất đẳng thức đơn giản dùng phương pháp dồn biến để chứng minh bất đẳng thức 3 biến với cực trị đạt được đối xứng, bất đẳng thức 3 biến với cực trị đạt được tại biên, bất đẳng thức 4 biến. Trong chương này luận văn trình bày chi tiết cho mỗi phương pháp dồn biến và cách chứng minh các bất đẳng thức vừa nêu, đưa ra hệ thống phong phú các ví dụ minh họa cho mỗi phương pháp và các bất đẳng thức đó.

2. Mục tiêu nghiên cứu

Nghiên cứu sâu về kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp dồn biến.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

- Đối tượng nghiên cứu: Phương pháp dồn biến và các bất đẳng thức sử dụng phương pháp dồn biến để chứng minh.

- Phạm vi nghiên cứu: Các bài toán chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp dồn biến trong chương trình Toán phổ thông và các kì thi.

4. Phương pháp nghiên cứu

- *Nghiên cứu lý luận*: Đọc và nghiên cứu các tài liệu liên quan đến đề tài.

- *Phương pháp phân tích, tổng hợp*: Các bất đẳng thức sử dụng phương pháp dồn biến để chứng minh.

- *Phương pháp lấy ý kiến chuyên gia*: Lấy ý kiến của giảng viên hướng dẫn và các giảng viên khác để hoàn thiện về mặt nội dung cũng như hình thức của đề tài.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Việc nghiên cứu nội dung "*Kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp dồn biến*" sẽ giúp tác giả nắm vững hơn nội dung và cách sử dụng phương pháp dồn biến vào chứng minh một số bất đẳng thức.

Đề tài nghiên cứu thành công sẽ cung cấp cho sinh viên và những ai yêu thích Toán học những kiến thức bổ ích, có hệ thống về phương pháp dồn biến trong chứng minh bất đẳng thức; Từ đó, có cái nhìn tổng quát và sử dụng linh hoạt phương pháp dồn biến. Đây cũng là tài liệu tham khảo cho sinh viên hoặc các bạn yêu thích môn Toán, đặc biệt là yêu thích bài toán chứng minh bất đẳng thức.

6. Bố cục của khóa luận

Ngoài phần mở đầu, tài liệu tham khảo, khóa luận chia làm 2 chương:

- Chương 1: *Một số kiến thức cơ bản*.

- Chương 2: *Kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp dồn biến*.

Chương 1

Một số kiến thức cơ bản

1.1 Tổng quan về phương pháp dồn biến

Đặc điểm của nhiều bất đẳng thức, đặc biệt là các bất đẳng thức đại số là dấu bằng xảy ra khi tất cả hoặc một vài biến số bằng nhau. Phương pháp dồn biến dựa vào đặc điểm này để làm giảm số biến của bất đẳng thức, đưa bất đẳng thức về dạng đơn giản hơn có thể chứng minh trực tiếp bằng cách khảo sát hàm một biến hoặc chứng minh bằng quy nạp.

Để chứng minh bất đẳng thức

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0. \quad (1.1)$$

Ta có thể chứng minh

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, \dots, x_n\right), \quad (1.2)$$

hoặc

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f(\sqrt{x_1 x_2}, \sqrt{x_1 x_2}, \dots, x_n). \quad (1.3)$$

Sau đó chuyển việc chứng minh (1.1) về chứng minh bất đẳng thức

$$f(x_1, x_1, \dots, x_n) \geq g(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \geq 0, \quad (1.4)$$

tức là một bất đẳng thức với số biến ít hơn.

Tóm lại, trong các bất đẳng thức mà ta gặp, có các trường hợp dấu bằng xảy ra rất thường gặp, đó là trường hợp tất cả các biến bằng nhau (ta gọi là “cực trị đạt được tại tâm”), tổng quát hơn là trường hợp có một số biến bằng nhau (ta gọi là “cực trị đạt được có tính đối xứng”), một trường hợp khác là dấu bằng xảy ra khi có một biến có giá trị trên biên (ta gọi là “cực trị đạt được tại biên”). Phương pháp dồn biến được đặt ra để giải quyết các bất đẳng thức có dạng như trên. Ý tưởng chung là nếu ta đưa được về trường hợp có hai biến bằng nhau, hoặc là một biến có giá trị tại biên thì số biến sẽ giảm đi. Do đó bất đẳng thức mới đơn giản hơn bất đẳng thức ban đầu, đặc biệt nếu bất đẳng thức mới chỉ còn một biến thì bằng cách khảo sát hàm một biến số ta sẽ chứng minh bất đẳng thức khá đơn giản.

Ví dụ 1.1.0.1. *(Bất đẳng thức có cực trị tại tâm) Cho $x, y, z > 0$ khi đó ta có*

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}.$$

(Bất đẳng thức Cauchy cho 3 số)

Ví dụ 1.1.0.2. *(Bất đẳng thức có cực trị đối xứng) Cho x, y, z là các số thực và $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Khi đó, ta có*

$$2(x + y + z) - xyz \leq 10.$$

Ví dụ 1.1.0.3. *(Bất đẳng thức có cực trị tại biên) Cho a, b, c là 3 số thực không âm và có tối đa một số bằng 0. Khi đó ta luôn có*

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}.$$

1.2 Định lí dồn biến tổng quát

1.2.1 Định lí về dồn biến

Định lý 1.2.1. Cho D là tập đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ và giả sử $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục và đối xứng với tất cả n biến $x_1, x_2, \dots, x_n$ xác định trên một miền liên thông $([a, b], [a, b), (a, b], (b, +\infty), (-\infty, a), \dots)$ thỏa mãn điều kiện sau

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, x_3, \dots, x_n\right). \quad (1.5)$$

Khi đó ta có bất đẳng thức sau

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f(x, x, \dots, x),$$

trong đó

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Điều kiện (1.5) có thể biến đổi thành một số dạng khác, chẳng hạn

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &\geq f(\sqrt{x_1 x_2}, \sqrt{x_1 x_2}, x_3, \dots, x_n), \\ f(x_1, x_2, \dots, x_n) &\geq f\left(\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}, \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}, x_3, \dots, x_n\right), \dots, \end{aligned}$$

và còn rất nhiều dạng khác nữa tùy theo yêu cầu bài toán.

1.2.2 Định lí dồn biến mạnh (*Stronger Mixing Variable – SMV*)

Bổ đề 1.2.2. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là dãy số thực tùy ý. Ta thực hiện liên tiếp phép biến đổi sau

- Chọn $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ là 2 chỉ số sao cho

$$a_i = \min \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \quad a_j = \max \{a_1, a_2, \dots, a_n\};$$

- Thay a_i và a_j bởi

$$\frac{a_i + a_j}{2}$$

(nhưng vẫn giữ đúng thứ tự của chúng trong dãy số).

Khi đó sau vô hạn lần thực hiện biến đổi nói trên thì mỗi số a_i đều tiến tới giới hạn $a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

(Gọi phép biến đổi trên là phép biến đổi Δ).

Chứng minh. Kí hiệu dãy ban đầu là $\{a_1^1, a_2^1, \dots, a_n^1\}$. Sau một phép biến đổi ta thu được dãy mới $\{a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2\}$. Làm tương tự, từ dãy $\{a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k\}$ ta thu được dãy mới kí hiệu là $\{a_1^{k+1}, a_2^{k+1}, \dots, a_n^{k+1}\}$. Khi đó, với mọi số nguyên $i = \overline{1, n}$ ta phải chứng minh

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_i^k = a, a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Giả sử $m_k = \min \{a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k\}$ và $M_k = \max \{a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k\}$.

Dễ thấy phép biến đổi Δ không làm tăng giá trị của M_k và không làm giảm giá trị của m_k .

Vì m_k và M_k đều là các dãy bị chặn nên $\exists m = \lim_{k \rightarrow \infty} m_k$ và $M = \lim_{k \rightarrow \infty} M_k$. Ta phải chứng minh $m = M$. Phản chứng, giả sử $M > m$. Đặt $d_k = M_k - m_k$.

Nhận xét 1.2.3. Giả sử sau một số phép biến đổi Δ dãy $\{a_1^1, a_2^1, \dots, a_n^1\}$ trở thành dãy $\{a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k\}$ sao cho $m_k = \frac{M_1 + m_1}{2}$ thì ta có $m_2 = \frac{M_1 + m_1}{2}$.

Như vậy, không mất tính tổng quát của bài toán giả sử

$$M_1 = a_1^1 \geq a_2^1 \geq \dots \geq a_n^1 = m_1.$$

(Để cho gọn ta kí hiệu a_i thay cho a_i^1).

Nếu $m_k = \frac{a_1 + a_n}{2}$, $\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$ là một số hạng nào đó của dãy $(a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2)$ và k là chỉ số nhỏ nhất thỏa mãn $a_i^2 \geq m_k, \forall i = \overline{1, n}$.

Giả sử

$$\begin{aligned} S &= \left\{ k \mid \exists l > k \mid m_k + M_k = 2m_l \right\} \Rightarrow S = \left\{ k \mid m_k + M_k = 2m_{k+1} \right\}, \\ P &= \left\{ k \mid \exists l > k \mid m_k + M_k = 2M_l \right\} \Rightarrow P = \left\{ k \mid m_k + M_k = 2M_{k+1} \right\}. \end{aligned}$$

Nếu S hoặc P có vô hạn phần tử, giả sử $|S| = \infty$ thì với mỗi $k \in S$, ta có

$$d_{k+1} = M_{k+1} - m_{k+1} = M_{k+1} - \frac{M_k + m_k}{2} \leq \frac{M_k - m_k}{2} = \frac{d_k}{2}.$$

Vì d_k là dãy giảm nên $|S| = \infty$ thì $|S| = \infty$ và do đó $m = M$. $\square$

Từ bổ đề trên ta suy ra một kết quả sau

Định lý 1.2.4. (*Stronger Mixing Variable – SMV*) Cho $I = [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \times \dots \times [\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, và $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục đối xứng thỏa mãn điều kiện $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f(b_1, b_2, \dots, b_n)$, với $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ là dãy thu được từ dãy $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ theo phép biến đổi Δ . Khi đó ta có

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f(a, a, \dots, a) \text{ với } a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Ngoài ra, phép biến đổi Δ có thể khác hơn, chẳng hạn thay thành $\sqrt{ab}$, $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ hoặc bất kì một dạng trung bình nào khác. Tùy theo giả thiết của bài toán mà ta cần chọn cách dồn biến cho phù hợp.

1.2.3 Định lí dồn biến tổng quát

Định lý 1.2.5. Cho D là tập đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ và Δ là một tập con đóng của D . Ánh xạ $T : D \rightarrow D$ là một phép biến đổi bất kì và $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục thỏa mãn $f(x) > f(T(x))$, $\forall x \in D \setminus \Delta$.

Khi đó giá trị nhỏ nhất của f đạt được trên Δ , tức là

$$f(x) \geq \min_{y \in \Delta} f(y), \quad \forall x \in D \setminus \Delta.$$

Chứng minh. Do D là tập đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ và $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục nên $\exists x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) \leq f(x), \forall x \in D$. Nếu $x_0 \notin \Delta$ thì $f(x_0) > f(T(x_0))$ (mâu thuẫn). Vậy $x_0 \in \Delta$. $\square$

Định lý 1.2.6. (*GMV – General Mixing Variables*) Cho D là tập đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ và Δ là một tập con đóng của D . Ánh xạ $T_j : D \rightarrow D$ là các phép biến đổi sao cho tồn tại các hàm số h_j liên tục $D \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $h(T_j(x)) < h_j(x), \forall x \in D \setminus \Delta, \forall j \in \{1, \dots, k\}$ và $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn $f(x) \geq \min_{j \in \{1, \dots, k\}} f(T_j(x)), \forall x \in D$.

Khi đó ta có

$$f(x) \geq \min_{y \in \Delta} f(y), \quad \forall x \in D.$$

Chứng minh. Từ giả thiết ta có tồn tại $y_0 \in \Delta$ sao cho $f(y_0) \geq \min_{y \in \Delta} f(y)$. Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng tức là giả sử tồn tại $\exists z \in D$ sao cho $f(z) < f(y_0)$ và $h_j(x) \geq 0, \forall x \in D, \forall j = \overline{1, k}$. Chọn $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ ta có $f(z) + \varepsilon h_j(z) < f(y_0), \forall j = \overline{1, k}$.

Đặt $g_j(x) = f(z) + \varepsilon h_j(z) < f(y_0), \forall x \in D, \forall j = \overline{1, k}$ và $g(x) = \min\{g_1(x), g_2(x), \dots, g_k(x)\}, \forall x \in D$ thì $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục, $g(x) > g(T(x)), \forall x \in D \setminus \Delta$ và $g(z) < f(y_0) \leq \min_{y \in \Delta} \{g(y)\}$ (mâu thuẫn với định lý 1.2.4).

Suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Hệ quả 1.2.7. (*Undefined Mixing Variables – UMV*) Giả sử D là tập đóng và bị chặn trong không gian $\mathbb{R}^n$ thỏa mãn $D \subset \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_i \geq 0, \forall i = \overline{1, n}\}$. Gọi Δ là tập các phần tử trong D

có t thành phần bằng 0 và $n-t$ thành phần bằng nhau ($t \geq 0$). Hai phép biến đổi $T_1, T_2 : D \rightarrow D$ thỏa mãn với mỗi phần tử $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D \setminus \Delta$, chọn ra 2 chỉ số $i \neq j$ sao cho $a_i = \min\{a_t > 0, t = 1, \dots, n\}$ và $a_j = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, sau đó thay a_i, a_j bởi $\alpha, \beta \in (a_i, a_j)$ (ứng với T_1) và $\alpha' < a_i < a_j < \beta'$ (ứng với T_2), và ánh xạ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn

$$f(a) \geq \min \left\{ f(T_1(a)), f(T_2(a)) \right\}, \quad \forall a \in D.$$

Khi đó

$$f(x) \geq \min_{y \in \Delta} f(y), \quad \forall x \in D.$$

Chứng minh. Chọn

$$\begin{aligned} h_1(a) &= \max \{a_1, a_2, \dots, a_n\} - \min \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \\ h_2(a) &= -h_1(a), \quad \forall a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D. \end{aligned}$$

Thay T_1 bởi $T_1^* = T_1^n$ và $T_2^* = T_2^n$ để có $h_1(a) > h_1(T_1^*(a)), h_2(a) > h_2(T_2^*(a)), \forall a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$.

Áp dụng định lý GMV ta có điều phải chứng minh. □

Chương 2

Kĩ thuật chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp dồn biến

2.1 Một số phương pháp dồn biến thông dụng

2.1.1 Dồn biến bằng kỹ thuật hàm số

Phương pháp: Để chứng minh $f(x, y, z) \geq f(x, t, t)$ với $t = \frac{y+z}{2}$ ta xét hàm $g(s) = f(x, t+s, t-s)$ với $s \geq 0$. Sau đó chứng minh g tăng với $s \geq 0$. Suy ra $g(s) \geq g(0), \forall s \geq 0$ và ta có điều cần chứng minh.

Đây là một kĩ thuật khó, bởi nó chứa đựng những nét tinh tế của phương pháp dồn biến. Những bài toán sau đây thể hiện rất rõ vẻ đẹp và sức mạnh của phương pháp dồn biến.

Ví dụ 2.1.1.1. Cho $k \geq 0$ và a, b, c là các số không âm và chỉ có tối đa một số bằng 0. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \min\left\{2, \frac{3}{2^k}\right\}.$$

Nhận xét 2.1.1. Ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức đúng khi $2 = \frac{3}{2^k} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1$. Với k như trên thì đẳng thức xảy ra tại 2 chỗ là $a = b = c$

hoặc $a = b, c = 0$ (và các hoán vị).

Chứng minh. Không mất tổng quát, giả sử $a + b + c = 1$ và $b \geq c \geq a$.

Đặt $t = \frac{b+c}{2}$ và $m = \frac{b-c}{2}$, suy ra $b = t + m, c = t - m, a = 1 - 2t$.

Khi đó vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh là

$$f(m) = \left(\frac{1-2t}{2t}\right)^k + \left(\frac{t+m}{1-t-m}\right)^k + \left(\frac{t-m}{1+m-t}\right)^k.$$

Vì $c \geq a$ nên

$$t - m \geq 1 - 2t \geq 0 \Leftrightarrow 3t - 1 \geq m \geq 0.$$

Và $1 \geq b + c = 2t$ nên

$$\frac{1}{2} \geq t \geq \frac{1}{3}.$$

Khảo sát hàm $f(m)$ trên miền $m \in [0; 3t - 1]$ với $t \in \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$ là hằng số.

Ta có

$$f'(m) = \frac{k(t+m)^{k-1}}{(1-t-m)^{k+1}} - \frac{k(t-m)^{k-1}}{(1+m-t)^{k+1}}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} f'(m) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(t+m)^{k-1}}{(1-t-m)^{k+1}} &\geq \frac{(t-m)^{k-1}}{(1+m-t)^{k+1}} \\ \Leftrightarrow (\ln[t-m] - \ln[t+m]) - \frac{k+1}{1-k} (\ln[1-t-m] - \ln[1+m-t]) &\geq 0. \end{aligned}$$

Giả sử

$$g(m) = (\ln[t-m] - \ln[t+m]) - \frac{k+1}{1-k} (\ln[1-t-m] - \ln[1+m-t]) \geq 0.$$

Tiếp tục khảo sát hàm $g(m)$ ta có

$$\begin{aligned} g(m) &= -\left(\frac{1}{t-m} + \frac{1}{t+m}\right) + \frac{k+1}{1-k} \left(\frac{1}{1-t-m} + \frac{1}{1+m-t}\right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-2t}{(t-m)(t+m)} + \frac{k+1}{1-k} \frac{2(1-t)}{(1-t-m)(1+m-t)} &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Mà $\frac{k+1}{1-k} \geq 2$ nên để chứng minh (2.1) ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} & \frac{-t}{t^2 - m^2} + \frac{2(1-t)}{(1-t)^2 - m^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow u(m) &= -3t^3 + 4t^2 - t + 3tm^2 - 2m^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Thật vậy, vì $u'(m) = 6tm - 4m < 0, \forall t \in \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right], \forall m \in [0; 3t - 1]$. Suy ra $u(m)$ nghịch biến. Mà $m \leq 3t - 1$ nên $u(m) \geq u(3t - 1) = 2(3t - 1)(2t - 1)^2 \geq 0$. Vậy $g(m)$ đồng biến. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} g(m) &\geq g(0) = 0 \\ \Rightarrow f'(m) &\geq 0 \\ \Rightarrow f(m) &\geq 0. \end{aligned}$$

Khi $m = 0$ thì ta có $b = c = t$. Cuối cùng, ta cần chứng minh $h(t) \geq 2$, trong đó

$$h(t) = \left(\frac{1-2t}{2t}\right)^k + 2\left(\frac{t}{1-t}\right)^k.$$

Khảo sát hàm $h(t)$ trên miền $t \in [0; \frac{1}{3}]$. Ta có

$$\begin{aligned} h'(t) &= -\frac{k}{2^k} \frac{(1-2t)^{k-1}}{t^{k+1}} + \frac{2kt^{k-1}}{(1-t)^{k+1}} \leq 0, \quad \forall t \in \left[0; \frac{1}{3}\right] \\ \Leftrightarrow 2^{k-1}t^{2k} &\leq (1-t)^{k+1}(1-2t)^{k-1}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Trong bất đẳng thức (2.2), vế trái là hàm đồng biến theo t và vế phải là hàm nghịch biến theo t , ở đây $t \leq \frac{1}{3}$ nên để chứng minh (2.2) ta cần

$$2^{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k} \leq \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{k+1} \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{k-1}.$$

Bất đẳng thức này luôn đúng nên $h(t)$ nghịch biến. Suy ra

$$h(t) \geq h\left(\frac{1}{3}\right) = 2.$$

□

Ta sẽ đưa ra một số trường hợp riêng của ví dụ 2.2.1.1.

a. Trường hợp $k = 1$, ta thu được bất đẳng thức Nesbit

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Chứng minh. Cách 1.

Đặt

$$f(a, b, c) = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

Giả sử $z = \min \{a, b, c\}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & f(a, b, c) - f(a, b, \sqrt{ab}) \\ &= \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{a}{b+\sqrt{ab}} - \frac{b}{a+\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \\ &= \frac{a(\sqrt{ab}-c)}{(b+c)(b+\sqrt{ab})} + \frac{b(\sqrt{ab}-c)}{(c+a)(a+\sqrt{ab})} + \frac{c-\sqrt{ab}}{a+b} \\ &= (\sqrt{ab}-c) \left(\frac{a}{(b+c)(b+\sqrt{ab})} + \frac{b}{(c+a)(a+\sqrt{ab})} - \frac{1}{a+b} \right) \\ &\geq \frac{a}{(b+a)(b+\sqrt{ab})} + \frac{b}{(b+a)(a+\sqrt{ab})} - \frac{1}{a+b} \\ &= \frac{1}{a+b} \left(\frac{a}{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})} + \frac{b}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{(a+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \left(\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} - \sqrt{a} - \sqrt{b} \right) \\ &= \frac{1}{(a+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \left(\frac{a-b}{\sqrt{b}} + \frac{b-a}{\sqrt{a}} \right) \\ &= \frac{1}{(a+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})} (a-b) \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(a+b)\sqrt{ab}} \geq 0. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
f(a, b, \sqrt{ab}) &= \frac{a}{b + \sqrt{ab}} + \frac{b}{a + \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a + b} \\
&= \frac{1}{\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b}{a}}} + \frac{\frac{b}{a}}{1 + \sqrt{\frac{b}{a}}} + \frac{\sqrt{\frac{b}{a}}}{\frac{b}{a} + 1} \\
&= \frac{1}{t^2 + t} + \frac{t^2}{1 + t} + \frac{t}{t^2 + 1} \\
&= (t - 1)^2 \frac{2t^2 - t + 2}{2t(t^2 - 1)} + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2},
\end{aligned}$$

trong đó $t = \sqrt{\frac{b}{a}}$, ($t > 0$).

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nên ta có điều phải chứng minh.

Cách 2

Đặt

$$f(a, b, c) = \frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&f(a, b, c) - f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) \\
&= \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \left(\frac{a+b}{a+b+2c} + \frac{a+b}{a+b+2c} + \frac{c}{a+b}\right) \\
&= \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} - \frac{2(a+b)}{a+b+2c} \\
&= \frac{(a^2 + b^2 + ac + bc)(a+b+2c) - 2(a+b)(b+c)(c+a)}{(b+c)(c+a)(a+b+2c)} \\
&= \frac{a^3 + ca^2 + cb^2 + b^3 - 2abc - ab^2 - a^2b}{(b+c)(c+a)(a+b+2c)}.
\end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{aligned} a^3 + ca^2 + cb^2 + b^3 &= \frac{3a^3}{3} + \frac{3b^3}{3} + ca^2 + cb^2 \\ &= \frac{a^3 + a^3 + b^3}{3} + \frac{a^3 + b^3 + b^3}{3} + ca^2 + cb^2 \\ &\geq a^2b + ab^2 + 2abc. \end{aligned}$$

Suy ra

$$a^3 + ca^2 + cb^2 + b^3 - (a^3 + ca^2 + cb^2 + b^3) \geq 0.$$

Suy ra

$$f(a, b, c) - f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) \geq 0,$$

hay

$$f(a, b, c) \geq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right).$$

Do đó theo định lí SMV thì

$$f(t, t, c) \geq \frac{3}{2}, \quad \text{với } t = \frac{a+b}{2}.$$

Ta có

$$f(t, t, c) \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{t}{t+c} + \frac{t}{t+c} + \frac{c}{2t} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2(t-c)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức trên luôn đúng.

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$.

□

b. Trường hợp $k = \frac{1}{2}$, ta thu được bất đẳng thức sau

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2.$$

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{2a}{2\sqrt{a(b+c)}} \geq \frac{2a}{a+b+c}.$$

$$\sqrt{\frac{b}{a+c}} = \frac{2b}{2\sqrt{b(a+c)}} \geq \frac{2b}{a+b+c}.$$

$$\sqrt{\frac{c}{a+b}} = \frac{2c}{2\sqrt{c(a+b)}} \geq \frac{2c}{a+b+c}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{b+a}} &\geq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} \\ &= \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} \\ &= \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} \\ &= 2. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2.1.1.2. Cho $k > 0, a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$(ab)^k + (bc)^k + (ca)^k \leq \max \left\{ 3, \left(\frac{3}{2} \right)^k \right\}.$$

Chứng minh. Không mất tổng quát, giả sử $b \geq c$.

Đặt $t = \frac{b+c}{2}$ và $m = \frac{b-c}{2}$, suy ra $b = t + m$ và $c = t - m$. Khi đó vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$f(m) = a^k \left[(t+m)^k + (t-m)^k \right] + (t^2 - m^2)^k.$$

Ta khảo sát hàm $f(m)$ trên miền $m \in [0, t]$.

Ta có

$$f'(m) = ka^k \left([t+m]^{k-1} - [t-m]^{k-1} \right) - 2km(t^2 - m^2)^{k-1}.$$

$$f'(m) \geq 0 \Leftrightarrow g(m) = a^k \left([t+m]^{1-k} - [t-m]^{1-k} \right) - 2m \geq 0.$$

$$g''(m) = a^k k(k-1) \left([t-m]^{-k-1} - [t+m]^{-k} \right) > 0.$$

Suy ra $g'(m)$ đồng biến, do đó có tối đa một nghiệm trên $(0, t)$.

Vì $g(0) = 0, g(t) = +\infty$ nên chỉ có hai khả năng $g(m)$ đồng biến hoặc $g(m)$ đổi dấu từ âm sang dương tại 0 nên cực đại đạt ở biên.

Do đó

$$f(m) \leq \max \{f(0), f(t)\}.$$

Khi $m = 0$ suy ra $b = c = t$ và $m = t$ kéo theo $c = 0$.

Để thấy khi $c = 0$ thì

$$f(t) = 2(ab)^k \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{2k}.$$

Xét trường hợp $b = c = t$. Đặt

$$h(t) = f(0) = 2t^k a^k + t^{2k} = 2t^k(3 - 2t)^k + t^{2k}.$$

Ta có

$$h'(t) = -4k(3 - 2t)^{k-1}t^k + 2k(3 - 2t)^k b^{k-1} + 2kb^{2k-1}.$$

$$h'(t) \geq 0 \Leftrightarrow -2\left(\frac{3 - 2t}{t}\right)^{k-1} + \left(\frac{3 - 2t}{t}\right)^k + 1 \geq 0.$$

Đặt $x = \frac{3 - 2t}{t}$, suy ra $u(x) = -2x^{k-1} + x^k + 1 = x^k - 2x^{k-1} + 1 \geq 0$.

Ta có

$$u'(x) = kx^{k-1} - 2(k - 1)x^{k-2} = [kx - 2(k - 1)]x^{k-2}.$$

Vì $u'(x)$ có tối đa một nghiệm trên tập số thực dương nên $u(x)$ có tối đa hai nghiệm trên tập số thực dương, trong đó một nghiệm là $x = 1$.

Từ đó, giả sử $a = \min \{a, b, c\}$. Khi đó, xét $t \geq 1$ tương ứng với $x \leq 1$. Vì $u(x)$ có tối đa một nghiệm trong $(0, 1)$ nên $h'(x)$ chỉ có tối đa một nghiệm

trong $\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

Ta có

$$h'(1) = 0, h'\left(\frac{3}{2}\right) > 0.$$

Do đó chỉ có hai khả năng $h(t)$ đồng biến hoặc $h(t)$ đổi dấu từ âm sang dương tại 0 nên cực đại đạt tại biên, suy ra

$$h(t) \leq \max \left\{ f(1), f\left(\frac{3}{2}\right) \right\} = \max \left\{ 3, \left(\frac{3}{2}\right)^{2k} \right\}.$$

□

Ví dụ 2.1.1.3. Cho $a, b, c \geq 0, a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{3+c^2} + \frac{bc}{3+a^2} + \frac{ca}{3+b^2} \leq \frac{11\sqrt{33}-45}{24}.$$

Chứng minh. Giả sử $a \geq b \geq c$.

Đặt $a = s + t, b = s - t$. Khi đó, ta có

$$f'(t) = \frac{-c}{3+(s+t)^2} - \frac{2c(s^2-t^2)}{(3+[s+t]^2)^2} + \frac{c}{3+(s-t)^2} + \frac{2c(s^2-t^2)}{(3+[s-t]^2)^2} - \frac{2t}{3+c^2}.$$

Đặt $u = 3 + (s+t)^2, v = 3 + (s-t)^2$. Khi đó ta có

$$f'(t) = \frac{4cst}{uv} + \frac{8cst(s^2-t^2)(u+v)}{u^2v^2} - \frac{2t}{3+c^2} < 0, \forall t \in (0, s-c). \quad (2.3)$$

Thật vậy, ta sẽ chỉ ra với $t \in (0, s-c)$ thì

$$\frac{4cs}{uv} < \frac{1}{3+c^2}. \quad (2.4)$$

Và

$$\frac{8cst(s^2-t^2)(u+v)}{u^2v^2} \leq \frac{1}{3+c^2}. \quad (2.5)$$

Chứng minh (2.4).

Vì $c + 2s = 1$ và $s > 1$ nên $cs < 1$.

Hơn nữa

$$u = 3 + (s + t)^2 > 4, v = 3 + (s - t)^2 > 3 + c^2.$$

Suy ra

$$\frac{uv}{4} > 3 + c^2.$$

Vậy

$$\frac{4cs}{uv} < \frac{1}{3 + c^2}.$$

Chứng minh (2.5).

Dùng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$u^2v^2 = \left((3 + [s + t]^2)(3 + [s - t]^2) \right)^2 \geq 16(s^2 - t^2)$$

và

$$\begin{aligned} 2cs(u + v)(3 + c^2) &= 2cs(3 + [s + t]^2 + 3 + [s - t]^2)(3 + c^2) \\ &= 4cs(3 + s^2 + t^2)(3 + c^2) \\ &\leq \left(\frac{4cs + 3 + s^2 + t^2 + 3 + c^2}{3} \right)^3. \end{aligned}$$

Ta có $c = 3 - 2s$ và $t \leq s - c = 3s - 3$.

Suy ra

$$\begin{aligned} 4cs + 3 + s^2 + t^2 + 3 + c^2 &= 4(3 - 2s)s + 6 + s^2 + t^2 + (3 - 2s)^2 \\ &\leq 4(3 - 2s)s + 6 + s^2 + (3s - 3)^2 + (3 - 2s)^2 \\ &= 6s^2 - 18s + 24 \\ &= 12 + 6(s - 1)(s - 2) \leq 12. \end{aligned}$$

Suy ra

$$2cs(u + v)(3 + c^2) \leq 4^3.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\frac{8cst(s^2 - t^2)(u + v)}{u^2v^2} &= 4\frac{s^2 - t^2}{u^2v^2}\frac{2cs(u + v)(3 + c^2)}{3 + c^2} \\ &\leq 4\frac{s^2 - t^2}{16(s^2 - t^2)}\frac{4^3}{3 + c^2} = 4\frac{1}{4^4}\frac{4^3}{3 + c^2} = \frac{1}{3 + c^2}.\end{aligned}$$

Vậy $\forall t \in [0, s - c]$ thì

$$\begin{aligned}f(t) \leq f(0) &= \frac{2sc}{3 + s^2} + \frac{s^2}{3 + c^2} \\ &= \frac{2s(3 - 2s)}{3 + s^2} + \frac{s^2}{3 + (3 - 2s)^2}.\end{aligned}$$

Giả sử

$$g(s) = \frac{2s(3 - 2s)}{3 + s^2} + \frac{s^2}{3 + (3 - 2s)^2}. \quad (2.6)$$

Khi đó, xét $g(s)$ với $s \in [1, \frac{3}{2}]$.

Ta có

$$\begin{aligned}g'(s) &= \frac{(2[3 - 2s] - 4s)(3 + s^2) - 4s(3 - 2s)}{(3 + s^2)^2} + \\ &\quad + \frac{2s(3 + [3 - 2s]^2) + 4s^2(3 - 2s)}{3 + (3 - 2s)^2} \\ &= \frac{18 - 24s - 6s^2}{(3 + s^2)^2} + \frac{24s - 12s^2}{(3 + [3 - 2s]^2)^2} \\ &= \frac{108(s^2 - 3s + 4)(s - 1)^2(-s^2 - 3s + 6)}{(3 + [3 - 2s]^2)^2(3 + s^2)^2}.\end{aligned}$$

Dễ thấy

$$\begin{aligned}s^2 - 3s + 4 &= s^2 - 2\frac{3}{2}s + \frac{9}{4} + \frac{7}{4} = \left(s - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0, \\ -s^2 - 3s + 6 &= \left(s - \frac{\sqrt{33} - 3}{2}\right)\left(s + \frac{\sqrt{33} + 3}{2}\right).\end{aligned}$$

Suy ra $g'(s)$ dương trên $\left(\frac{\sqrt{33}-3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ và âm trên $\left(0, \frac{\sqrt{33}-3}{2}\right)$.

Ta có

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\sqrt{33}-3}{2}\right) &= \frac{2\frac{\sqrt{33}-3}{2}\left(3-2\frac{\sqrt{33}-3}{2}\right)}{3+\left(\frac{\sqrt{33}-3}{2}\right)^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{33}-3}{2}\right)^2}{3+\left(3-2\frac{\sqrt{33}-3}{2}\right)^2} \\ &= \frac{4(\sqrt{33}-3)(6-\sqrt{33})}{12+(\sqrt{33}-3)^2} + \frac{(\sqrt{33}-3)^2}{4(3+[6+\sqrt{33}]^2)} \\ &= \frac{11\sqrt{33}-45}{24}. \end{aligned}$$

Vậy $\forall s \in [1; \frac{3}{2}]$ thì

$$g(s) \leq g\left(\frac{\sqrt{33}-3}{2}\right) = \frac{11\sqrt{33}-45}{24}. \quad (2.7)$$

Trong (2.6) và (2.7) dấu “=” xảy ra đồng thời tại $t = 0$ và $s = \frac{\sqrt{33}-3}{2}$.

Tức là $a = b = \frac{\sqrt{33}-3}{2}$ và $c = 3 - 2\frac{\sqrt{33}-3}{2} = 6 - \sqrt{33}$.

Vậy $\frac{ab}{3+c^2} + \frac{bc}{3+a^2} + \frac{ca}{3+b^2} \leq \frac{11\sqrt{33}-45}{24}$ tại $a = b = \frac{\sqrt{33}-3}{2}$ và $c = 3 - 2\frac{\sqrt{33}-3}{2} = 6 - \sqrt{33}$. $\square$

Bài tập áp dụng

Bài tập 2.1.1.1. Cho các số thực dương a, b, c có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$81(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \leq 8(a+b+c)^4.$$

Bài tập 2.1.1.2. Cho các số thực dương a, b, c có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$64(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \leq (a+b+c)^6.$$

Bài tập 2.1.1.3. Cho $k \geq \frac{2}{3}$ và a, b, c là các số không âm và chỉ có tối đa một số bằng 0. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \frac{3}{2^k}.$$

Bài tập 2.1.1.4. Cho x, y, z là 3 số thực thuộc $[1, 4]$ và $x \geq y, y \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}.$$

Bài tập 2.1.1.5. Cho x, y, z là 3 số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz}\right) + y\left(\frac{y}{z} + \frac{1}{zx}\right) + z\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy}\right).$$

2.1.2 Dồn biến bằng hàm lồi

Một trong những công cụ chính để dồn biến trong các bất đẳng thức “dạng cổ điển” là hàm lồi.

Định nghĩa 2.1.2. Giả sử I là một tập lồi trên $\mathbb{R}$. Hàm số $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là hàm lồi trên khoảng I nếu

$$f(tx + [1 - ty]) \leq tf(x) + (1 - t)f(y), \quad \forall x, y \in [a, b], \quad \forall t \in [0, 1].$$

Định lý 2.1.3. Cho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi. Khi đó ta có

$$f(a) + f(b) \geq f(x) + f(a + b - x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Chứng minh. Vì $x \in [a, b]$, x bất kì nên $x = ta + (1 - t)b$ với $t \in [0, 1]$. Khi đó

$$a + b - x = (1 - t)a + tb.$$

Mặt khác, f là hàm lồi nên ta có

$$\begin{aligned} & f(x) + f(a + b - x) \\ &= f(ta + [1 - t]b) + f([1 - t]a + tb) \\ &\leq (tf(a) + [1 - t]f(b)) + ([1 - t]f(a) + tf(b)) = f(a) + f(b). \end{aligned}$$

Suy ra

$$f(a) + f(b) \geq f(x) + f(a + b - x), \forall x \in [a, b].$$

□

Định lý 2.1.4. Cho I là tập lồi trên $\mathbb{R}$, và f là hàm khả vi trên I . Khi đó f là hàm lồi khi và chỉ khi f' là hàm không giảm trên I .

Hệ quả 2.1.5. Cho I là tập lồi trên $\mathbb{R}$, và f là hàm khả vi cấp 2 trên I . Khi đó f là hàm lồi trên I khi và chỉ khi $f'' \geq 0$, với mọi $x \in I$.

Định lý 2.1.6. Cho I là tập lồi trên $\mathbb{R}$, và f là hàm liên tục trên I thỏa mãn điều kiện

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}, \forall x, y \in I.$$

Khi đó f hàm lồi trên I .

Định lý 2.1.7. (Bất đẳng thức Jensen) Cho I là tập lồi trên $\mathbb{R}$ và f là hàm lồi trên I . Khi đó ta có

$$\sum_{i=1}^n f(\alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i), \forall x_i \in I, \forall \alpha_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, n, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

Hệ quả 2.1.8. Cho I là tập lồi trên $\mathbb{R}$ và f là hàm lồi trên I . Khi đó ta có

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n m_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \forall x_i \in I, m_i > 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

Ví dụ 2.1.2.1. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \quad \forall a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0.$$

Chứng minh. Cách 1.

Rõ ràng bất đẳng thức đúng với $n = 2$.

Nếu bất đẳng thức đúng với n số thì cũng đúng với $2n$ số, vì

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} &\geq n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + n \sqrt[n]{a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{2n}} \\ &\geq 2n \sqrt[2n]{a_1 a_2 \dots a_{2n}}. \end{aligned}$$

Do đó, bất đẳng thức cũng đúng khi n là một lũy thừa của 2.

Mặt khác, nếu bất đẳng thức đúng với n số thì cũng đúng với $n - 1$ số.

Thật vậy, ta chỉ cần chọn

$$a_n = \frac{s}{n-1}, \quad s = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}.$$

Suy ra

$$s + \frac{s}{n-1} \geq n \sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \dots a_{n-1} s}{n-1}},$$

hay

$$s \geq (n-1) \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Cách 2.

+ Nếu $\min \{a_1, a_2, \dots, a_n\} = 0$ thì $a_1 a_2 \dots a_n = 0$. Do đó bất đẳng thức trên là đúng.

+ Xét trường hợp còn lại

Đặt $f(x) = -\ln x$, $\forall x > 0$. Khi đó $f(x)$ là hàm lồi với $x > 0$.

Ta có

$$\begin{aligned}f'(x) &= -\frac{1}{x}, \\f''(x) &= \frac{1}{x^2} > 0, \quad \forall x > 0.\end{aligned}$$

Ta có

$$-\ln \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq -\frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n}{n} = -\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Do đó

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \quad \forall a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0.$$

□

Ví dụ 2.1.2.2. Chứng minh rằng $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x.$$

Chứng minh. Xét $f(x) = -\ln x$. Khi đó $f(x)$ là hàm lồi trên $(0, +\infty)$.

Ta có

$$-\ln \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) \leq -\frac{\ln a_1 + \ln a_2}{2} = -\ln \sqrt{a_1 a_2}.$$

Chọn $a_1 = \left(\frac{12}{5}\right)^x$, $a_2 = \left(\frac{15}{4}\right)^x$. Khi đó, ta có

$$-\ln \left(\frac{\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x}{2}\right) \leq -\ln \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x \left(\frac{15}{4}\right)^x}.$$

Khi đó

$$\frac{\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x \left(\frac{15}{4}\right)^x}.$$

Suy ra

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x \geq 2.3^x. \quad (2.8)$$

Chọn $a_1 = \left(\frac{12}{5}\right)^x$, $a_2 = \left(\frac{20}{3}\right)^x$. Khi đó, ta có

$$-\ln \left(\frac{\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x}{2} \right) \leq -\ln \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x \left(\frac{20}{3}\right)^x}.$$

Do đó

$$\frac{\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x \left(\frac{20}{3}\right)^x}.$$

Suy ra

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2.4^x. \quad (2.9)$$

Chọn $a_1 = \left(\frac{15}{4}\right)^x$, $a_2 = \left(\frac{20}{3}\right)^x$. Khi đó, ta có

$$-\ln \left(\frac{\left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x}{2} \right) \leq -\ln \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^x \left(\frac{20}{3}\right)^x}.$$

Do đó

$$\frac{\left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^x \left(\frac{20}{3}\right)^x}.$$

Suy ra

$$\left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2.5^x. \quad (2.10)$$

Từ (2.8),(2.9) và (2.10) cộng về theo về ta được

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \\
& \geq 2.3^x + 2.4^x + 2.5^x \\
& \Leftrightarrow 2 \left[\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \right] \geq 2(3^x + 4^x + 5^x) \\
& \Leftrightarrow \left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x.
\end{aligned}$$

□

Ví dụ 2.1.2.3. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c, \quad \forall a, b, c \geq 0.$$

Chứng minh. Xét $f(x) = -\ln x$. Khi đó $f(x)$ là hàm lồi trên $(0, +\infty)$.

Ta có

$$-\ln \frac{a_1 + a_2}{2} \leq -\frac{\ln a_1 + \ln a_2}{2} = -\ln \sqrt{a_1 a_2}. \quad (2.11)$$

Chọn $a_1 = \frac{a^2}{b}, a_2 = b, (a, b > 0)$ thay vào (2.11) ta được

$$-\ln \frac{\frac{a^2}{b} + b}{2} \leq -\ln \sqrt{\frac{a^2}{b} b}.$$

Do đó

$$\frac{\frac{a^2}{b} + b}{2} \geq \sqrt{\frac{a^2}{b} b} \Leftrightarrow \frac{a^2}{b} + b \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b} b} = 2a. \quad (2.12)$$

Chọn $a_1 = \frac{b^2}{c}, a_2 = c, (b, c > 0)$ thay vào (2.11) ta được

$$-\ln \frac{\frac{b^2}{c} + c}{2} \leq -\ln \sqrt{\frac{b^2}{c} c}.$$

Do đó

$$\frac{\frac{b^2}{c} + c}{2} \geq \sqrt{\frac{b^2}{c}c} \Leftrightarrow \frac{b^2}{c} + c \geq 2\sqrt{\frac{b^2}{c}c} = 2b. \quad (2.13)$$

Chọn $a_1 = \frac{c^2}{a}, a_2 = a, (a, c > 0)$ thay vào (2.11) ta được

$$-\ln \frac{\frac{c^2}{a} + a}{2} \leq -\ln \sqrt{\frac{c^2}{a}a}.$$

Do đó

$$\frac{\frac{c^2}{a} + a}{2} \geq \sqrt{\frac{c^2}{a}a} \Leftrightarrow \frac{c^2}{a} + a \geq 2\sqrt{\frac{c^2}{a}a} = 2. \quad (2.14)$$

Từ (2.12), (2.13) và (2.14) ta có

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{b} + b + \frac{b^2}{c} + c + \frac{c^2}{a} + a \geq 2a + 2b + 2c \\ \Leftrightarrow & \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + (a + b + c) \geq 2(a + b + c) \\ \Leftrightarrow & \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2.1.2.4. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$.

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z} \leq 1.$$

Chứng minh. Xét $f(x) = \frac{1}{x}$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{x^2}, \\ f''(x) &= \frac{2}{x^3} > 0, \quad \forall x \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

Suy ra $f(x)$ là hàm lồi trên khoảng $(0, +\infty)$. Khi đó, ta có

$$f\left(\frac{2a_1 + a_2 + a_3}{4}\right) \leq \frac{1}{4}\left(2f(a_1) + f(a_2) + f(a_3)\right).$$

Thay (a_1, a_2, a_3) lần lượt bởi ba bộ số $(x, y, z); (y, x, z); (z, x, y)$ ta được các bất đẳng thức

$$\frac{1}{2x + y + z} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{x + 2y + z} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{2}{y} + \frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{x + y + 2z} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{2}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \quad (2.17)$$

Từ (2.15), (2.16) và (2.17) cộng về theo về ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z} &\leq \frac{1}{16}\left(\frac{4}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z}\right) \\ &\leq \frac{4}{16}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1 \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2.1.2.5. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{ax + by + cz} \leq \frac{1}{(a + b + c)^2}\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right), \forall a, b, c > 0, \forall x, y, z > 0.$$

Chứng minh. Xét $f(x) = \frac{1}{x}$. Khi đó $f(x)$ là hàm lồi trên khoảng $(0, +\infty)$.

Ta có

$$f\left(\frac{ax + by + cz}{a + b + c}\right) \leq \frac{1}{a + b + c}(af(x) + bf(y) + cf(z)).$$

Suy ra

$$\frac{1}{a + b + c}\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) \geq \frac{a + b + c}{ax + by + cz}.$$

Do đó

$$\frac{1}{ax + by + cz} \leq \frac{1}{(a + b + c)^2} \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right).$$

□

Nhận xét 2.1.9. Trong ví dụ 2.1.2.5, nếu $a = b = c = 1$ thì ta được bất đẳng thức

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x + y + z}, \quad \forall x, y, z > 0.$$

Ví dụ 2.1.2.6. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a + 3b + 2c} + \frac{bc}{b + 3c + 2a} + \frac{ca}{c + 3a + 2b} \leq \frac{a + b + c}{6}, \quad \forall a, b, c > 0.$$

Chứng minh. Từ nhận xét

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x + y + z}, \quad \forall x, y, z > 0.$$

Thay x, y, z bằng 3 bộ số

$$(a + c, b + c, 2b); (a + b, a + c, 2c); (b + c, a + b, 2a).$$

Khi đó, ta được

$$\frac{1}{a + c} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{2b} \geq \frac{9}{a + 3b + 2c},$$

$$\frac{1}{a + b} + \frac{1}{a + c} + \frac{1}{2c} \geq \frac{9}{2a + b + 3c},$$

$$\frac{1}{b + c} + \frac{1}{a + b} + \frac{1}{2a} \geq \frac{9}{3a + 2b + c}.$$

Do đó, ta có

$$\frac{ab}{9} \left(\frac{1}{a + c} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{2b} \right) \geq \frac{ab}{a + 3b + 2c},$$

$$\frac{bc}{9} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{2c} \right) \geq \frac{bc}{2a+b+3c},$$

$$\frac{ac}{9} \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{2a} \right) \geq \frac{ac}{3a+2b+c}.$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} & \frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{2a+b+3c} + \frac{ac}{3a+2b+c} \\ \leq & \frac{1}{9} \left(\frac{bc+ac}{a+b} + \frac{ab+ac}{b+c} + \frac{ab+bc}{a+c} + \frac{ab+bc+ac}{2a+2b+2c} \right) \\ = & \frac{1}{9} \left(\frac{bc+ac}{a+b} + \frac{ab+ac}{b+c} + \frac{ab+bc}{a+c} + \frac{a+b+c}{2} \right) \\ = & \frac{1}{9} \left(\frac{c(b+a)}{a+b} + \frac{a(b+c)}{b+c} + \frac{b(a+c)}{a+c} + \frac{a+b+c}{2} \right) \\ = & \frac{1}{9} \left(c+a+b + \frac{a+b+c}{2} \right) \\ = & \frac{a+b+c}{9} \left(1 + \frac{1}{2} \right) \\ = & \frac{a+b+c}{6}. \end{aligned}$$

□

Bài tập áp dụng

Bài tập 2.1.2.1. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{9}{10}.$$

Bài tập 2.1.2.2. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^3 + 2b^3 + 3c^3.$$

Bài tập 2.1.2.3. Cho các số $a, b, c \in [1, 2]$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 \leq 5abc.$$

Bài tập 2.1.2.4. (Olympic 30 - 4 - 2001) Cho $x, y, z \in [1, 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right).$$

Bài tập 2.1.2.5. Cho $0 < p < q$ và n số thực $x_i \in [p, q]$. Chứng minh rằng

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right) \leq n^2 + \left[\frac{n^2}{4} \right] \frac{(p - q)^2}{pq}.$$

2.1.3 Đồn biến về giá trị trung bình

Kỹ thuật đồn biến về giá trị trung bình phát huy tác dụng tốt nhất khi số biến tăng lên, cụ thể là trường hợp n biến tổng quát. Khi sử dụng kỹ thuật đồn biến về giá trị trung bình thì sau mỗi lần đồn biến số lượng biến có giá trị cố định tăng lên. Do đó chỉ cần hữu hạn lần đồn biến ta sẽ đưa được tất cả các biến về các giá trị cố định và bài toán sẽ đơn giản hơn.

Ví dụ 2.1.3.1. Cho n số thực không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{3n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \geq n + 3, \quad \forall n \geq 4.$$

Chứng minh. Không mất tổng quát ta có thể giả sử $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$.

Đặt

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{3n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

Ta sẽ chứng minh

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f(a_1, \sqrt{a_2 a_n}, \sqrt{a_2 a_n}, a_3, a_4, a_{n-1}). \quad (2.18)$$

Thật vậy, khẳng định trên tương đương với

$$\begin{aligned} & f(a_1, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, \sqrt{a_2 a_n}, \sqrt{a_2 a_n}, a_3, a_4, a_{n-1}) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{a_2}} - \frac{1}{\sqrt{a_n}} \right)^2 - \frac{3n(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_n})^2}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(a_1 + 2\sqrt{a_2 a_n} + a_3 + \dots + a_{n-1})} \end{aligned}$$

Do đó, ta phải chứng minh

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(a_1 + 2\sqrt{a_2 a_n} + a_3 + \dots + a_{n-1}) \geq 3na_2 a_n.$$

Vì $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ nên

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(a_1 + 2\sqrt{a_2 a_n} + a_3 + \dots + a_{n-1}) \\ & \geq (2a_2 + (n-2)a_n)(a_2 + 2\sqrt{a_2 a_n} + (n-3)a_n) \\ & \geq (2 + 2\sqrt{n-3})2\sqrt{2(n-2)}a_2 a_n \\ & \geq 3na_2 a_n, \quad \forall n \geq 4. \end{aligned}$$

Suy ra bất đẳng thức (2.18) được chứng minh.

Từ định lí SMV suy ra

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f(a_1, b, b, \dots, b), \quad b = \sqrt[n-1]{a_2 a_3 \dots a_n}.$$

Tiếp theo (thay n bằng $n+1$ cho gọn) ta phải chứng minh $g(b) \geq n+4$.

$$\begin{aligned} g(b) &= b^n + \frac{n}{b} + \frac{3(n+1)}{nb + \frac{1}{b^n}} = b^n + \frac{n}{b} + \frac{3(n+1)b^n}{nb^{n+1} + 1}. \\ g'(b) &= nb^{n-1} - \frac{n}{b^2} + \frac{3(n+1)(nb^{n-1}[nb^{n+1} + 1] - [n+1]nb^{2n})}{(nb^{n+1} + 1)^2} \\ &= nb^{n-1} - \frac{n}{b^2} + \frac{3n(n+1)}{(nb^{n+1} + 1)^2}(b^{n-1} - b^{2n}). \end{aligned}$$

Do đó

$$g'(b) = 0 \Leftrightarrow (b^{n+1} - 1) \left([nb^{n+1} + 1]^2 - 3[n+1]b^{n+1} \right) = 0.$$

Theo bất đẳng thức AM - GM thì

$$(nb^{n+1} + 1)^2 \geq 4nb^{n+1} \geq 3(n+1)b^{n+1}.$$

Vậy $g'(b) \leq 0, \forall b \leq 1$ và $g'(1) = 0$. Suy ra $g(b) \geq g(1) = n+4$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$. $\square$

Ví dụ 2.1.3.2. Cho các số dương a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$.

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2}(a+b+c+d) \leq \sqrt[3]{(abcd+1) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)}.$$

Chứng minh. Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng

$$9(a+b+c+d) \leq 4abcd + 32.$$

Thật vậy, giả sử $d = \min\{a, b, c, d\} \Rightarrow 1 \geq d > 0$, đặt

$$P(a, b, c, d) = 9(a+b+c+d) - 4abcd + 32.$$

và

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}, p = a + b + c \\ \Rightarrow 2\sqrt{3} &\geq 3x \geq p \geq x\sqrt{3}, \quad x \geq 1. \end{aligned}$$

Ta chứng minh

$$\begin{aligned} P(a, b, c, d) &\leq P(x, x, x, d) \\ \Leftrightarrow 9(3x - p) &\geq 4d(x^3 - abc). \end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức Schur bậc

$$\sum_{cyc} a^2 (a - b) (a - c) \geq 0$$

$$\Rightarrow abc \geq \frac{(p^2 - 6x^2)(p^2 + 3x^2)}{12p}.$$

Ta cần chứng minh

$$p(3x - p) \geq 4d \left(x^3 - \frac{[p^2 - 6x^2][p^2 + 3x^2]}{12p} \right)$$

$$\Leftrightarrow (3x - p) \left(27 - \frac{d[p^3 + 3p^2x + 6px^2 + 6x^3]}{p} \right) \geq 0.$$

Do $3x \geq p \geq x\sqrt{3}$ nên

$$81 - \frac{3d(p^3 - 3p^2x + 6px^2 + 6x^3)}{p} \geq 81 - 78x^2d$$

$$= 81 - 26d(4 - d^2)$$

$$= 3 + 26(1 - d)(3 - d - d^2) \geq 0.$$

Ta còn phải chứng minh

$$P(x, x, x, d) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 9(3x + d) - 4x^3d \leq 32$$

$$\Leftrightarrow (9 - 4x^3)d \leq 32 - 27x$$

$$\Leftrightarrow (9 - 4x^3)\sqrt{4 - 3x^2} \leq 32 - 27x$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{32 - 27x}{(9 - 4x^3)\sqrt{4 - 3x^2}} \geq 1.$$

Ta có

$$f'(x) = \frac{12(x - 1)(81x^4 - 47x^3 - 119x^2 + 9x + 81)}{(9 - 4x^3)^2(4 - 3x^2)^{\frac{3}{2}}} \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(1) = 1.$$

Trở lại bài toán, sử dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có

$$x^4 = abcd \leq 1, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{4}{\sqrt[4]{abcd}} = \frac{4}{x}.$$

Do đó, kết hợp với bất đẳng thức ở trên, ta chỉ cần chứng minh được

$$\begin{aligned} 2(x^4 + 8) &\leq 9\sqrt[3]{\frac{4(x^4 + 1)}{x}} \\ \Leftrightarrow g(x) &= \frac{x(x^4 + 8)^3}{x^4 + 1} \leq \frac{729}{2}. \\ g' &= \frac{(x^4 + 8)^2(9x^8 - 11x^4 + 8)}{(x^4 + 1)^2} \\ \Rightarrow g(x) &\leq g(1) = \frac{729}{2}. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$. □

Ví dụ 2.1.3.3. Cho $a, b, c \in [0, \sqrt{3} - 1]$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$.
Chứng minh rằng

$$3(a + b + c) \geq 4(1 + abc).$$

Chứng minh. Do tính đối xứng, giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow \sqrt{3} - 1 \geq a \geq \frac{1}{2}$. Đặt $f(a, b, c) = 3(a + b + c) - 4(1 + abc)$, ta sẽ chứng minh

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &\geq f\left(a, \sqrt{\frac{1-a}{2}}, \sqrt{\frac{1-a}{2}}\right) \\ \Leftrightarrow 3(b + c - \sqrt{2[1-a]}) + 2a(1 - a - 2bc) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3([b+c]^2 + 2a - 2)}{b + c + \sqrt{2(1-a)}} + 2a(1 - a - 2bc) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3([b-c]^2 + 2[2bc + a - 1])}{b + c + \sqrt{2(1-a)}} + 2a(1 - a - 2bc) &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(b-c)^2}{b+c+\sqrt{2(1-a)}} + 2(1-a-2bc) \left[a - \frac{3}{b+c+\sqrt{2(1-a)}} \right] \geq 0.$$

Chú ý rằng $(1+a)(1-a-2bc) = (b-c)^2$, bất đẳng thức tương đương

$$\begin{aligned} & \frac{3(b-c)^2}{b+c+\sqrt{2(1-a)}} + \frac{2(b-c)^2}{1+a} \left[a - \frac{3}{b+c+\sqrt{2(1-a)}} \right] \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{3(a+1)}{b+c+\sqrt{2(1-a)}} + 2a - \frac{6}{b+c+\sqrt{2(1-a)}} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 2a \geq \frac{3(1-a)}{b+c+\sqrt{2(1-a)}} \end{aligned}$$

Do $a \leq 1$ nên

$$\begin{aligned} a^2 + (b+c)^2 & \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1 \\ \Rightarrow b+c & \geq \sqrt{1-a^2} \geq \sqrt{1-a}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} 2a - \frac{3(1-a)}{b+c+\sqrt{2(1-a)}} & \geq 2a - \frac{3(1-a)}{\sqrt{1-a} + \sqrt{2(1-a)}} \\ & = 2a - \frac{3}{\sqrt{2}+1} \sqrt{1-a} > 0. \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & f\left(a, \sqrt{\frac{1-a}{2}}, \sqrt{\frac{1-a}{2}}\right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 3\left(a + \sqrt{2[1-a]}\right) - 2a(1-a) - 4 \geq 0. \end{aligned}$$

Đặt $t^2 = 2(1-a)$, ($t \geq 0$) $\Rightarrow 1 \geq t \geq \sqrt{3}-1$, $a = \frac{2-t^2}{2}$, bất đẳng thức trở thành

$$\begin{aligned} & 3\left(\frac{2-t^2}{2} + t\right) - t^2 \frac{2-t^2}{2} - 4 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}(1-t^2)(t^2+2t-2) \geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$ hoặc $b = c = \frac{\sqrt{2}-1}{2}, a = \sqrt{3}-1$ hoặc các hoán vị tương ứng. $\square$

Nhận xét 2.1.10. Đặt $a = \sin \frac{A}{2}, b = \sin \frac{B}{2}, c = \sin \frac{C}{2}$ thì A, B, C là 3 góc của một tam giác và $A, B, C \leq 2\arcsin(\sqrt{3}-1)$, ta được bất đẳng thức Jack Garfunkel với một giả thiết "lỏng" hơn là

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \geq \frac{4}{3} \left(1 + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right).$$

Ví dụ 2.1.3.4. Cho các số không âm $x_1, x_2, \dots, x_n$, ($n \geq 3$) thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^3 x_2^2 + x_2^3 x_3^2 + \dots + x_n^3 x_1^2 + n^{2(n-1)} x_1^3 x_2^3 \dots x_n^3.$$

Chứng minh. Giả sử $x_1 = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Ta chứng minh

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq P(x_1, x_2 + x_3 + \dots + x_n, 0, \dots, 0).$$

Thật vậy,

$$\begin{aligned} & P(x_1, x_2 + x_3 + \dots + x_n, 0, \dots, 0) \\ &= x_1^3 (x_2 + x_3 + \dots + x_n)^2 \\ &\geq 2(x_1^3 x_2 x_3 + x_1^3 x_3 x_4 + \dots + x_1^3 x_{n-1} x_n) + x_1^3 x_2^2 + x_1^3 x_n^2 \\ &\geq (x_1^3 x_2 x_3 + x_1^3 x_3 x_4 + \dots + x_1^3 x_{n-1} x_n) + (x_2^3 x_3^2 + x_3^3 x_4^2 + \dots + x_{n-1}^3 x_n^2) + \\ &\quad + x_1^3 x_2^2 + x_1^3 x_n^2 \\ &\geq x_1^3 x_2^2 + x_2^3 x_3^2 + \dots + x_n^3 x_1^2 + x_1^3 x_2 x_3. \end{aligned}$$

Ta chứng minh

$$\begin{aligned} x_1^2 x_2 x_3 &\geq n^{2(n-1)} x_1^3 x_2^3 \dots x_n^3 \\ \Leftrightarrow x_2^2 x_3^2 x_4^3 \dots x_n^3 &\leq \frac{1}{n^{2(n-1)}}. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}x_2^2 x_3^2 x_4^3 \dots x_n^3 &\leq (x_2 x_3 x_4 \dots x_n)^2 \\&\leq \left(\frac{x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n-1} \right)^{2(n-1)} \\&\leq \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \right)^{2(n-1)} = \frac{1}{n^{2(n-1)}}.\end{aligned}$$

Do đó

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq P(x_1, x_3 + x_3 + \dots + x_n, 0, \dots, 0).$$

Lại có

$$\begin{aligned}P(x_1, x_3 + x_3 + \dots + x_n, 0, \dots, 0) &= x_1^3 (x_2 + x_3 + \dots + x_n)^2 \\&= x_1^3 (1 - x_1)^2 \\&= 108 \left(\frac{x_1}{3} \right)^2 \left(\frac{1 - x_1}{2} \right)^2 \\&\leq 108 \left(\frac{x_1 + 1 - x_1}{5} \right)^2 = \frac{108}{3125}.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = \frac{2}{5}$, $x_3 = x_4 = \dots = x_n = 0$.

Vậy

$$P_{max} = \frac{108}{3125}.$$

□

Bài tập áp dụng

Bài tập 2.1.3.1. Cho x, y, z là 3 số thực dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}.$$

Bài tập 2.1.3.2. Cho tam giác ABC . Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$(1 + \cos^2 A)(1 + \cos^2 B)(1 + \cos^2 C).$$

Bài tập 2.1.3.3. Cho n số thực không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{4(n-1)}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \geq n + \frac{4(n-1)}{n}.$$

Bài tập 2.1.3.4. Cho n số thực không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. Chứng minh rằng

$$(1 + a_1^2)(1 + a_2^2) \dots (1 + a_n^2) \leq \frac{2^n}{n^{2n-2}} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^{2n-2}.$$

Bài tập 2.1.3.5. Cho các số không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 3$) thỏa mãn $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \geq a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_1.$$

2.2 Một số bất đẳng thức đơn giản dùng phương pháp dồn biến

2.2.1 Bất đẳng thức 3 biến với cực trị đạt được đối xứng

Phương pháp: Giả sử ta cần chứng minh $f(x, y, z) \geq 0$ (hoặc $f(x, y, z) \leq 0$), với x, y, z là 3 biến số thực thỏa mãn các tính chất nào đây ta thực hiện như sau

Bước 1. Đánh giá $f(x, y, z) \geq f(x, t, t)$ với t là một biến mới sao cho bộ số (x, t, t) thỏa mãn tính chất của bộ số (x, y, z) .

Thông thường ta hay đặt t là các đại lượng trung bình để không làm mất đi các tính chất cho trước, chẳng hạn $t = \frac{x+y}{2}, t = \sqrt{xy}, t = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}, \dots$

Bước 2. Đánh giá $f(x, t, t) \geq 0$.

Việc khó nhất là ta đi đánh giá $f(x, y, z) \geq f(x, t, t)$. Điều đó sử dụng nhiều kỹ thuật, còn ở bước thứ 2 hầu hết là đơn giản vì bất đẳng thức khi đó chỉ còn lại 2 biến số.

Ví dụ 2.2.1.1. (Bất đẳng thức Cauchy cho 3 số). Cho x, y, z là 3 số thực không âm. Chứng minh rằng

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}.$$

Chứng minh. Đặt $f(x, y, z) = x + y + z - 3\sqrt[3]{xyz}$ và $t = \frac{x + y}{2}$.

Khi đó, ta có

$$t^2 = \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 \geq xy.$$

Suy ra

$$f(x, y, z) - f(t, t, z) = 3\left(\sqrt[3]{t^2z} - \sqrt[3]{xyz}\right) \geq 0.$$

Ta đi chứng minh

$$f(t, t, z) = 2t + z - 3\sqrt[3]{t^2z} \geq 0.$$

Thật vậy

$$2t + z - 3\sqrt[3]{t^2z} \geq 0 \Leftrightarrow (2t + z)^3 - 27t^2z \geq 0 \Leftrightarrow (t - z)^2(8t + z) \geq 0.$$

Vậy

$$f(x, y, z) \geq f(t, t, z) \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} t = z \\ t^2 = xy \end{cases} \Rightarrow x = y = z.$$

□

Nhận xét 2.2.1. Ngoài ra ta còn có thể giải quyết bài toán trên bằng cách chuẩn hóa, giả sử $xyz = 1$ và chứng minh $f(x, y, z) \geq 0$ với $f(x, y, z) = x + y + z - 3$. Khi đó, bước dồn biến sẽ là chứng minh $f(x, y, z) \geq f(t, t, z) \geq 0$ với $t = \sqrt{xy}$.

Ví dụ 2.2.1.2. (Bất đẳng thức Schur) Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(b + a).$$

Chứng minh. Xét $f(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - a^2(b + c) - b^2(c + a) - c^2(b + a)$.

Đặt $t = \frac{b + c}{2}$. Khi đó, ta có

$$f(a, t, t) = a^3 + t^3 + t^3 + 3at^2 - 2ta^2 - t^2(t + a) - t^2(t + a).$$

Ta chứng minh

$$f(a, b, c) \geq f(a, t, t).$$

$$\text{Xét } d = f(a, b, c) - f(a, t, t) = \left[b + c - \frac{5}{4}a \right] (b - c)^2.$$

Giả sử $a = \min\{a, b, c\}$. Khi đó, ta có

$$d \geq 0.$$

Mặt khác

$$f(a, t, t) = a(a - t)^2 \geq 0.$$

□

Nhận xét 2.2.2. Việc giả sử $a = \min\{a, b, c\}$ (hoặc $a = \max\{a, b, c\}$) là một thủ thuật thường gặp áp dụng để dồn biến đối với bất đẳng thức 3 biến hoán vị vòng quanh.

Ví dụ 2.2.1.3. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Chứng minh rằng

$$2(x + y + z) - xyz \leq 10.$$

Chứng minh. Đặt $f(x, y, z) = 2(x + y + z) - xyz$ và $t = \sqrt{\frac{y^2 + z^2}{2}}, t \geq 0$.
Ta có

$$f(x, t, t) = 2(x + 2t) - xt^2. \quad (2.19)$$

Đặt

$$\begin{aligned} d &= f(x, y, z) - f(x, t, t) \\ &= 2(x + y + z) - xyz - 2(x + 2t) + xt^2 \\ &= 2(y + z - 2t) - x(z - t^2). \end{aligned}$$

Dễ thấy $y + z - 2t \leq 0$ và $yz - t^2 \leq 0$. Suy ra $d \leq 0$ khi $x \leq 0$. Giả sử $x = \min \{x, y, z\}$.

Trường hợp 1. Xét $x \leq 0$. Khi đó, ta chứng minh

$$f(x, t, t) \leq 10$$

Ta có $t^2 = \frac{9 - x^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{9 - x^2}{2}}$, thay vào (2.19) ta được

$$g(x) = f(x, t, t) = 2x + 2\sqrt{2(9 - x^2)} - x\frac{9 - x^2}{2}.$$

Ta có

$$g(x) = \frac{3x^2 - 5}{2} - \frac{4x}{\sqrt{18 - 2x^2}}.$$

Ta thấy $g'(x) = 0$ có một nghiệm $x = -1$.

Mặt khác, $g'(x)$ liên tục và $g'(-2) > 0 > g(0)$ nên suy ra $g'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm $x = -1$.

Vậy $\forall x \leq 0$ thì $g(x) \leq g(-1) = 10$.

Trường hợp 2. Xét $x > 0$ suy ra $x, y, z > 0$.

Nếu $x \geq \frac{3}{4}$ thì

$$f(x, y, z) = 2(x + y + z) - xyz \leq 2\sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} - \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 2\sqrt{27} - \frac{27}{64} < 10.$$

Nếu $x \leq \frac{3}{4}$ thì

$$f(x, y, z) = 2(x + y + z) - xyz \leq 2(\sqrt{2(y^2 + z^2)} + \frac{3}{4}) = 2(\sqrt{18} + \frac{3}{4}) < 10.$$

□

Ví dụ 2.2.1.4. Cho x, y, z là 3 số thực dương thay đổi thỏa mãn

$$x(x + y + z) = 3yz.$$

Chứng minh rằng

$$(x + z)^3 + (x + y)^3 + 3(x + y)(x + z)(y + z) \leq 5(y + z)^3.$$

Chứng minh. Cách 1.

Đặt

$$a = x + y, b = x + z, c = y + z.$$

Khi đó điều kiện bài toán trở thành

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $a^3 + b^3 + 3abc \leq 5c^3$ thỏa mãn điều kiện

$$\begin{aligned} c^2 = a^2 + b^2 - ab &= (a + b)^2 - 3ab \geq (a + b)^2 - \frac{3}{4}(a + b)^2 \\ &= \frac{1}{4}(a + b)^2. \end{aligned}$$

Suy ra

$$(a + b)^2 \leq 4c^2 \Leftrightarrow a + b \leq 2c. \quad (2.20)$$

Ta có

$$\begin{aligned}a^3 + b^3 + 3abc &\leq 5c^3 \\ \Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3abc &\leq 5c^3 \\ \Leftrightarrow (a+b)c^2 + 3abc &\leq 5c^3 \\ \Leftrightarrow (a+b)c + 3ab &\leq 5c^2.\end{aligned}$$

Từ (2.20) suy ra $(a+b)c \leq 2c^2$ và $3ab \leq \frac{3}{4}(a+b)^2 \leq 3c^2$. Suy ra

$$(a+b)c + 3ab \leq 5c^2.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hay $x = y = z$.

Cách 2.

Nhận xét 2.2.3. Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh ta thấy hai biến y và z có vai trò như nhau và dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ nên đặt $t = \frac{y+z}{2}$.

Đặt

$$f(x, y, z) = (x+z)^3 + (x+y)^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z) - 5(y+z)^3.$$

Khi đó, theo giả thiết ta có

$$x(x+2t) = 3yz \leq \frac{3}{4}(y+z)^2 = 3t^2.$$

Vì vậy $x^2 + 2tx + t^2 \leq 4t^2$ hay $(x+t)^2 \leq (2t)^2 \Rightarrow x \leq t$.

Ta có

$$f(x, t, t) = 2(x+t)^3 + 6t(x+t)^2 - 5(y+z)^3.$$

$$f(x, y, z) - f(x, t, t) = (x+z)^3 + (x+y)^3 - 2(x+t)^3 - 6t(y-z)^2.$$

Xét hàm số

$$g(x) = (x+z)^3 + (x+y)^3 - 2(x+t)^3 - 6t(y-z)^2, x \in [0, t].$$

Ta có

$$\begin{aligned}g'(x) &= 3[(x+z)^2 + (x+y)^2 - 2(x+t)^2]. \\g''(x) &= 6[(x+z) + (x+y) - 2(x+t)] = 0.\end{aligned}$$

Vậy

$$g'(x) = g'(0) = \frac{3}{2}(y-z)^2 \geq 0.$$

Do đó

$$\begin{aligned}g(x) &\leq g(t) = (t+y)^3 + (t+z)^3 - 2(2t)^3 - 6t(y-z)^2, \\(t+y)^3 &= t^3 + 3t^2y + 3ty^2 + y^3, \\(t+z)^3 &= t^3 + 3t^2z + 3tz^2 + z^3,\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}(t+y)^3 + (t+z)^3 &= 2t^3 + 3t^2(y+z) + 3t(y^2+z^2) + y^3 + z^3 \\&= 8t^3 + t(3y^2 + 3z^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2yz) \\&= 8t^3 + t(5y^2 + 5z^2 - 2yz).\end{aligned}$$

Nên

$$g(t) = t(5y^2 + 5z^2 - 2yz - 2[y+z]^2 - 6[y-z]^2) = -3t(y+z)^2 \leq 0.$$

Do đó

$$f(x, y, z) - f(x, t, t) \leq 0 \Leftrightarrow f(x, y, z) \leq f(x, t, t).$$

Ta cần chứng minh

$$f(x, t, t) = 2(x+t)^3 + 6t(x+t)^2 - 40t^3 \leq 0, \quad x \leq t.$$

Thật vậy, vì $f(x, t, t) \leq 2(t+t)^3 + 6t(t+t)^2 - 40t^3 = 0$. Vậy

$$f(x, y, z) \leq f(x, t, t) \leq 0,$$

hay

$$(x+z)^3 + (x+y)^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z) \leq 5(y+z)^3.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = t \\ 3yz = \frac{3}{4}(y+z)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z.$$

□

Ví dụ 2.2.1.5. Cho x, y, z là 3 số thực thỏa mãn $x + y + z \leq 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}.$$

Chứng minh. Đặt $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}}$.

Do vai trò của x, y, z là như nhau nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x \leq y \leq z$.

Đặt $t = \sqrt{yz}$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương y, z ta được

$$\frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz} \Leftrightarrow 2\sqrt{yz} \leq y+z.$$

Suy ra

$$2t \leq y+z \Leftrightarrow x+2t \leq x+y+z \leq 1.$$

Ta có

$$f(x, t, t) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + 2\sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f(x, y, z) - f(x, t, t) &= \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} - 2\sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}} \\ &= \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} - \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} - \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{y^2 + \frac{1}{y^2} - \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)}{\sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}}} + \frac{z^2 + \frac{1}{z^2} - \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)}{\sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} + \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}}} \\
&= \frac{(y^2 - t^2) + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{t^2}\right)}{\sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}}} + \frac{(z^2 - t^2) + \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{t^2}\right)}{\sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}}} \\
&= \frac{(y^2 - t^2) \left(\frac{y^2 t^2 - 1}{y^2 t^2}\right)}{\sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}}} + \frac{(z^2 - t^2) \left(\frac{z^2 t^2 - 1}{z^2 t^2}\right)}{\sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}}},
\end{aligned}$$

hay

$$f(x, y, z) - f(x, t, t) = \frac{(y - z) \left(\frac{y^2 t^2 - 1}{y t^2}\right)}{\sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}}} + \frac{(z - y) \left(\frac{z^2 t^2 - 1}{z t^2}\right)}{\sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}}}.$$

Vì $g(u) = u^2 + \frac{1}{u^2}$ giảm khi $0 < u < 1$ nên $\sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} \geq \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}}$.

Suy ra

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) - f(x, t, t) &\geq \frac{(y - z) \left(\frac{y^2 t^2 - 1}{y t^2} - \frac{z^2 t^2 - 1}{z t^2}\right)}{\sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}}} \\
&= \frac{\frac{y - z}{y^2 z^2} [y^3 z^2 - z - (y^2 z^3 - y)]}{\sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}}} \\
&= \frac{\frac{y - z}{y^2 z^2} [(y - z)(1 - y^2 z^2)]}{\sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{(y-z)^2}{y^2 z^2} (1 - y^2 z^2)}{\sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}}} \geq 0.$$

Ta phải chứng minh $f(x, t, t) \geq \sqrt{82}$.

Theo điều giả sử $x \leq t$ và $f(x, t, t) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + 2\sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}}$ nên ta có

$$f(x, t, t) \geq 3\sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}}.$$

Bằng cách khảo sát hàm số ta có

$$f(x, t, t) \geq \sqrt{82}.$$

Vậy

$$f(x, t, t) \geq \sqrt{82} \Rightarrow f(x, y, z) \geq \sqrt{82}.$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$x = y = z = \frac{1}{3}.$$

□

Bài tập áp dụng

Bài tập 2.2.1.1. Cho a, b, c là 3 số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{6}{a+b+c} \geq 5.$$

Bài tập 2.2.1.2. (Iran 1996) Chứng minh rằng với $a, b, c > 0$ thì

$$(ab + bc + ca) \left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right) \geq \frac{9}{4}.$$

Bài tập 2.2.1.3. (Gabriel Dospinescu) Chứng minh rằng nếu $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ thì

$$a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b) \leq 6.$$

Bài tập 2.2.1.4. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 3 \geq (1+a)(1+b)(1+c).$$

Bài tập 2.2.1.5. Cho a, b, c không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$a + b + c \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

Bài tập 2.2.1.6. Chứng minh rằng nếu x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ thì ta có bất đẳng thức

$$7(xy + yz + zx) \leq 12 + 9xyz.$$

2.2.2 Bất đẳng thức 3 biến với cực trị đạt được tại biên

Phương pháp: Xét bất đẳng thức $f(x, y, z) \geq 0$ với $x, y, z \geq 0$. Khi đó ta sẽ đánh giá $f(x, y, z) \geq f(0, s, t)$, trong đó s, t là các đại lượng sinh ra từ các biến x, y, z (chọn s, t sao cho $f(x, y, z) \geq f(0, s, t)$). Sau đó kiểm tra $f(0, s, t) \geq 0$.

Ví dụ 2.2.2.1. Cho a, b, c không âm thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{2}.$$

Chứng minh. Cách 1.

Không mất tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Chọn số $t > 0$ sao cho

$$t^2 + 2tc = ab + bc + ca = 1$$

Suy ra

$$\Rightarrow (t+c)^2 = ab + bc + ca + c^2 = (a+c)(b+c) = 1 + c^2.$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{2}{t+c} + \frac{1}{2t}.$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì $a \geq t \geq b \geq c$. Vậy ta chỉ cần chứng minh bài toán khi $a = b \geq c$. Khi đó, ta có bất đẳng thức

$$\frac{2}{t+c} + \frac{1}{2t} \geq \frac{5}{2}, \quad (2.21)$$

với $2tc + t^2 = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1-t^2}{2t}$.

Thay $c = \frac{1-t^2}{2t}$ vào (2.20) ta được

$$\begin{aligned} & \frac{2}{t + \frac{1-t^2}{2t}} + \frac{1}{2t} - \frac{5}{2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{4t}{t^2+1} + \frac{1}{2t} - \frac{5}{2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{9t^2+1}{2t(t^2+1)} - \frac{5}{2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{9t^2+1-5t(t^2+1)}{2t(t^2+1)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{-5t^3+9t^2-5t+1}{2t(t^2+1)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & -5t^3+9t^2-5t+1 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (1-t)(5t^2-4t+1) \geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì $t \leq 1$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1, c = 0$ và các hoán vị của nó.

Cách 2

Nhận xét Bài toán trên đẳng thức không xảy ra tại tâm, mà tại $a = b = 1, c = 0$ và các hoán vị của nó.

Xét trường hợp riêng khi $c = 0$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở

thành

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{5}{2},$$

trong đó $ab = 1$.

Đặt $s = a + b$, khi đó ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow & s + \frac{1}{s} \geq \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow & 2s^2 - 5s + 2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (2s - 1)(s - 2) \geq 0. \end{aligned}$$

Vì $s = a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2$ nên $(2s - 1)(s - 2) \geq 0$ luôn đúng.

Đặt $f(a, b, c) = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$.

Xét hiệu

$$\begin{aligned} d &= f(a, b, c) - f\left(a+b, \frac{1}{a+b}, 0\right) \\ &= \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} - \left(\frac{1}{a+b} + a+b + \frac{1}{a+b + \frac{1}{a+b}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a + \frac{1-ab}{a+b}} + \frac{1}{b + \frac{1-ab}{a+b}} \right) - \\ &\quad - \left(\frac{1}{a+b} + a+b + \frac{1}{a+b + \frac{1}{a+b}} \right) \\ &= \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - 1 - \frac{1}{1+(a+b)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1+b^2+1+a^2}{(1+a^2)(1+b^2)} - 1 - \frac{1}{1+(a+b)^2} \\
&= \frac{ab(2[1-ab] - ab[a+b]^2)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+[a+b]^2)}.
\end{aligned}$$

Ta thấy $d \geq 0$ khi $2(1-ab) \geq ab(a+b)^2$.

Giả sử $c = \max\{a, b, c\}$ thì $2(1-ab) = 2c(a+b) \geq ab(a+b)^2$.

Khi đó $d \geq 0$. □

Ví dụ 2.2.2.2. Cho a, b, c là 3 số thực không âm và có tối đa một số bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}.$$

Chứng minh. Không mất tổng quát ta giả sử $a = \max\{a, b, c\}$ và $a+b+c=1$.

Đặt $t = \frac{a+c}{2}, s = \frac{a-c}{2}$.

Suy ra $a = t+s, c = t-s, b = 1-2t$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c} \\
&\Leftrightarrow \frac{t+s}{\sqrt{s+1-t}} + \frac{1-2t}{\sqrt{1-t-s}} + \frac{t-s}{\sqrt{2t}} \leq \frac{5}{4}.
\end{aligned}$$

Đặt $f(s) = \frac{t+s}{\sqrt{s+1-t}} + \frac{1-2t}{\sqrt{1-t-s}} + \frac{t-s}{\sqrt{2t}}, s \in [0, t]$, ta sẽ chứng minh

$$f(s) \leq \max\{f(0), f(t)\}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
f'(s) &= \frac{\sqrt{s+1-t} - \frac{t+s}{2\sqrt{s+1-t}}}{(\sqrt{s+1-t})^2} + \frac{1-2t}{2(\sqrt{1-t-s})^3} - \frac{1}{\sqrt{2t}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{s+1-t}} - \frac{t+s}{2(\sqrt{s+1-t})^3} + \frac{1-2t}{2(\sqrt{1-t-s})^3} - \frac{1}{\sqrt{2t}}.
\end{aligned}$$

$$f''(s) = -\frac{1}{(\sqrt{s+1-t})^3} + \frac{3(t+s)}{4(\sqrt{s+1-t})^5} + \frac{3(1-2t)}{4(\sqrt{1-t-s})^5}.$$

$$\begin{aligned} f'''(s) &= \frac{9}{4(\sqrt{s+1-t})^5} - \frac{15(t+s)}{8(\sqrt{s+1-t})^7} + \frac{15(1-2t)}{8(\sqrt{1-t-s})^7} \\ &= \frac{18+3s-33t}{(\sqrt{1-t-s})^7} + \frac{15(1-2t)}{8(\sqrt{1-t-s})^7} > 0, \text{ (do } b = 1-2t > 0). \end{aligned}$$

Vậy $f'''(s) > 0, \forall s \in [0, t]$. Suy ra $f'(s)$ có tối đa hai nghiệm trên $[0, t]$. Mặt khác $f'(0) \leq 0$ và $f'(t) \geq 0$ do đó $f'(s)$ chỉ có thể đổi dấu tối đa một lần trên $(0, t)$, hơn nữa $f'(s)$ chỉ có thể có 1 trong các dạng sau $f'(s) < 0, \forall s \in (0, t)$ hoặc $f'(s) > 0, \forall s \in (0, t)$ hoặc $f'(s)$ đổi dấu từ âm sang dương tại $s = 0$ trên khoảng $(0, t)$. Tuy nhiên, trong trường hợp nào $f(s)$ cũng chỉ có thể đạt cực đại tại biên. Vậy $f(s) \leq \max\{f(0), f(t)\}, \forall s \in [0, t]$. Do đó, ta chứng minh

$$\max\{f(0), f(t)\} \leq \frac{5}{4}.$$

Thật vậy, dễ thấy $f(0) \leq \frac{5}{4}, f(t) \leq \frac{5}{4}$.

Suy ra

$$\max\{f(0), f(t)\} \leq \frac{5}{4}.$$

□

Ví dụ 2.2.2.3. Cho $a, b, c \geq 0, a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$(a^3 + b^3 + c^3)(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) \leq 36(ab + bc + ca).$$

Chứng minh. Không mất tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$.

Đặt

$$f(a, b, c) = 36(ab + bc + ca) - (a^3 + b^3 + c^3)(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3).$$

Khi đó

$$f(a, b+c, 0) = 36a(b+c) - (a^3 + [b+c]^3)a^3(b+c)^3.$$

Ta sẽ chứng minh

$$f(a, b, c) \geq f(a, b+c, 0).$$

Thật vậy, ta có

$$36(ab+bc+ca) \geq 36a(b+c),$$

$$(a^3+b^3+c^3)(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3) \leq (a^3+[b+c]^3)a^3(b+c)^3,$$

(vì $a^3+b^3+c^3 \leq a^3+(b+c)^3$ và $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 \leq a^3(b+c)^3$). Do đó, ta chỉ cần chứng minh bài toán trong trường hợp $c=0$ hay

$$\begin{aligned} 36ab &\geq a^3b^3(a^3+b^3) \\ \Leftrightarrow 36 &\geq a^2b^2(a^3+b^3). \end{aligned}$$

Đặt $t=ab$, khi đó bất đẳng thức có dạng

$$\begin{aligned} t^2(27-9t) &\leq 36 \\ \Leftrightarrow 9t^3+36 &\geq 27t^2 \\ \Leftrightarrow t^3+4 &\geq 3t^2. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên là bất đẳng thức Cauchy của 3 số $\frac{t^3}{2}, \frac{t^3}{2}, 4$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} c=0 \\ a+b=3 \\ ab=2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases}$ (và các hoán vị). □

Bài tập áp dụng

Bài tập 2.2.2.1. (Bất đẳng thức Schur) Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b).$$

Bài tập 2.2.2.2. Cho $a, b, c \geq 0$, $a + b + c = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2).$$

Bài tập 2.2.2.3. Cho x, y, z là các số thực không âm và chỉ có tối đa một số bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} + \frac{1}{z^2 + x^2} \geq \frac{10}{(x + y + z)^2}.$$

Bài tập 2.2.2.4. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{2b^2 + ca} + \frac{b}{2c^2 + ab} + \frac{c}{2a^2 + bc} \geq \frac{3}{a + b + c}.$$

Bài tập 2.2.2.5. Giả sử x, y, z là 3 số thực không âm nhưng chỉ có nhiều nhất một số bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^3 + y^3} + \frac{1}{y^3 + z^3} + \frac{1}{z^3 + x^3} \geq \frac{20}{(a + b + c)^3}$$

2.2.3 Bất đẳng thức 4 biến

Đặc thù của bất đẳng thức 4 biến đó là khi có 4 biến ta có thể dồn biến theo từng cặp và có thể chứng minh ngay được bài toán (chẳng hạn như bất đẳng thức Cauchy). Tuy nhiên, trường hợp này chỉ xuất hiện trong những bài toán đơn giản. Đối với các bài toán phức tạp thì thường chỉ dồn được một cặp nhờ thứ tự sắp được giữa các biến. Sau khi dồn được hai biến bằng nhau hoặc dồn một biến ra biên thì chưa có ngay bất đẳng thức một biến, mà phải qua một bất đẳng thức trung gian (2 hay 3 biến). Các bất đẳng thức trung gian thường dễ dàng chứng minh trực tiếp hoặc đánh giá để quy về một biến. Tóm lại, khi gặp bất đẳng thức 4 biến, cần quan sát kĩ mối liên hệ giữa 4 biến để có cách xử lí thích hợp.

Ví dụ 2.2.3.1. (Bất đẳng thức Tukervici) Giả sử a, b, c, d là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$abc + bcd + cda + dab \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27}abcd.$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát của bài toán ta giả sử $a \leq b \leq c \leq d$.

Đặt

$$f(a, b, c, d) = abc + bcd + cda + dab - \frac{176}{27}abcd,$$

hay

$$f(a, b, c, d) = ac(b + d) + bd\left(a + c - \frac{176}{27}ac\right).$$

Khi $a \leq b \leq c \leq d$ ta có

$$a + c \leq \frac{1}{2}(a + b + c + d) = \frac{1}{2}.$$

Do đó, suy ra

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{a + c} \geq 8 \geq \frac{176}{27}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} & f(a, b, c, d) - f\left(a, \frac{b+d}{2}, c, \frac{b+d}{2}\right) \\ &= ac(b + d) + bd\left(a + c - \frac{176}{27}ac\right) - ac(b + d) - \\ & \quad - \left(\frac{b+d}{2}\right)^2 \left(a + c - \frac{176}{27}ac\right) \\ &= \left(a + c - \frac{176}{27}ac\right) \left(bd - \left[\frac{b+d}{2}\right]^2\right) \\ &= - \left(a + c - \frac{176}{27}ac\right) \frac{(b-d)^2}{4} \leq 0. \end{aligned}$$

Do đó

$$f(a, b, c, d) \leq f\left(a, \frac{b+d}{2}, c, \frac{b+d}{2}\right).$$

Theo định lí SMV ta có

$$f(a, b, c, d) \leq f(a, t, t, t) = \frac{b + c + d}{3}.$$

Ta cần chứng minh nếu $a + 3t = 1$ thì

$$3at^2 + t^3 \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27}at^3.$$

Thật vậy, thay $a = 1 - 3t$ hiển nhiên ta có bất đẳng thức

$$(1 - 3t)(4t - 1)^2(11t + 1) \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = \frac{1}{4}$ hoặc $a = b = c = \frac{1}{3}, d = 0$ (hoặc các hoán vị tương ứng). $\square$

Ví dụ 2.2.3.2. Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 + a^2c^2 + b^2d^2.$$

Chứng minh. Không mất tổng quát của bài toán giả sử $a \geq b \geq c \geq d$.

Đặt

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) &= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2d^2 - d^2a^2 - a^2c^2 - b^2d^2 \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd - a^2c^2 - b^2d^2 - (a^2 + c^2)(b^2 + d^2). \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} &f(a, b, c, d) - f(\sqrt{ac}, b, \sqrt{ac}, d) \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd - a^2c^2 - b^2d^2 - (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) - \\ &\quad - (a^2c^2 + b^4 + a^2c^2 + 2abcd - a^2c^2 - b^2d^2 - 2ac(b^2 + d^2)) \\ &= a^4 + c^4 - 2a^2c^2 - (b^2 + d^2)(a^2 + c^2 - 2ac) \\ &= (a^2 - c^2)^2 - (b^2 + d^2)(a - c)^2 \\ &= (a - c)^2([a + c]^2 - [b + d]) \geq 0. \end{aligned}$$

Vậy

$$f(a, b, c, d) \geq f(\sqrt{ac}, b, \sqrt{ac}, d).$$

Do đó, theo định lí SMV ta chỉ cần chứng minh rằng $f(a, b, c, d) \geq 0$ trong trường hợp khi $a = b = c = t \geq d$.

Ta có bất đẳng thức $f(t, t, t, d) \geq 0$ tương đương với

$$\begin{aligned} 3t^4 + d^4 + 2t^3d &\geq 3t^4 + 3t^2d^2 \\ \Leftrightarrow d^4 + 2t^3d &\geq 3t^2d^2 \\ \Leftrightarrow d^4 + t^3d + t^3d &\geq 3t^2d^2. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$ hoặc $a = b = c, d = 0$ (và các hoán vị). $\square$

Ví dụ 2.2.3.3. Cho $a, b, c, d \geq 0, a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng

$$(1 + 3a)(1 + 3b)(1 + 3c)(1 + 3d) \leq 125 + 131abcd.$$

Chứng minh. Xét biểu thức

$$f(a, b, c, d) = (1 + 3a)(1 + 3b)(1 + 3c)(1 + 3d) - 131abcd.$$

Không mất tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c \geq d$. Khi đó

$$\begin{aligned} &f(a, b, c, d) - f\left(\frac{a+c}{2}, b, \frac{a+c}{2}, d\right) \\ &= 9(1 + 3b)(1 + 3d) \left(ac - \frac{[a+c]^2}{4}\right) - 131bd \left(ac - \frac{[a+c]^2}{4}\right) \\ &= \frac{(a+c)^2}{4} (131bd - 9[1 + 3b][1 + 3d]). \end{aligned}$$

Khi $a \leq b \leq c \leq d$ ta có

$$\begin{aligned} b + d &\leq \frac{1}{2}(a + b + c + d) = 2, \\ bd &\leq \frac{(b+d)^2}{4} = 1. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} 131bd - 9(1 + 3b)(1 + 3d) &= 131bd - 9 - 27(b + d) - 81bd \\ &= 50bd - 27(b + d) - 9 \\ &\leq 50bd - 54\sqrt{bd} \\ &\leq 50bd - 54bd = -4bd \leq 0. \end{aligned}$$

Vậy

$$f(a, b, c, d) - f\left(\frac{a+c}{2}, b, \frac{a+c}{2}, d\right) \leq 0,$$

hay

$$f(a, b, c, d) \leq f\left(\frac{a+c}{2}, b, \frac{a+c}{2}, d\right).$$

Do đó, theo định lí SMV ta cần chứng minh $f(a, b, c, d) \leq 125$ trong trường hợp khi $a = b = c = t \leq d$ hay $f(t, t, t, d) \leq 125$ khi $3t \leq 3t + d = 4$.

Ta có

$$\begin{aligned} f(t, t, t, d) &\leq 125 \\ \Leftrightarrow (1 + 3t)^3(1 + 3[4 - 3t]) - 131t^3(4 - 3t) &\leq 125 \\ \Leftrightarrow 150t^4 - 416t^3 + 270t^2 + 108t - 112 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (t - 1)^2(3t - 4)(50t + 28) &\leq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$ hoặc $a = b = c = \frac{4}{3}, d = 0$ (và các hoán vị). $\square$

Ví dụ 2.2.3.4. Cho $a, b, c, d \geq 0, a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng

$$16 + 2abcd \geq 3(ab + ac + ad + bc + bd + cd).$$

Chứng minh. Không mất tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c \geq d$.

Xét biểu thức

$$f(a, b, c, d) = 3(ab + ac + ad + bc + bd + cd) - 2abcd.$$

Ta có

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a+c}{2}, b, \frac{a+c}{2}, d\right) - f(a, b, c, d) \\ &= 3\left(\frac{a+c}{2}b + \left[\frac{a+c}{2}\right]^2 + \frac{a+c}{2}d + \frac{a+c}{2}b + bd + \frac{a+c}{2}d\right) - \\ & \quad - 2bd\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - (3[ab + ac + ad + bc + bd + cd] - 2abcd) \\ &= 3\left(\left[\frac{a+c}{2}\right]^2 - ac\right) - 2bd\left(\left[\frac{a+c}{2}\right]^2 - ac\right) \\ &= \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 (3 - 2bd). \end{aligned}$$

Ta luôn có

$$2\sqrt{bd} \leq b + d \leq \frac{1}{2}(a + b + c + d) = 2.$$

Suy ra

$$bd \leq 1.$$

Vậy

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+c}{2}, b, \frac{a+c}{2}, d\right) - f(a, b, c, d) &= \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 (3 - 2bd) \\ &\geq \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 (3 - 2) \geq 0. \end{aligned}$$

Tức là

$$f\left(\frac{a+c}{2}, b, \frac{a+c}{2}, d\right) \geq f(a, b, c, d).$$

Theo định lí SMV ta chỉ cần chứng minh $f(a, b, c, d) \leq 16$ trong trường hợp $a = b = c = t \geq d$. Tức là cần chứng minh $f(t, t, t, d) \leq 16$ khi $3t \leq 3t + d = 4$.

Ta có

$$f(t, t, t, d) \leq 16$$

$$\Leftrightarrow 9(t^2 + dt) - 2t^3d - 16 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 9t^2 + 9t(4 - 3t) - 2t^3(4 - 3t) - 16 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(3t - 4)(t - 1)^2(t + 2) \leq 0.$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$ hoặc $a = b = c = \frac{4}{3}, d = 0$ (và các hoán vị). $\square$

Bài tập áp dụng

Bài tập 2.2.3.1. Cho $a, b, c, d \geq 0, a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng

$$abc + bcd + cda + dab + (abc)^2 + (bcd)^2 + (cda)^2 + (dab)^2 \leq 8.$$

Bài tập 2.2.3.2. Cho $a, b, c, d \geq 0, a + b + c + d = 4$. Đặt $F_k = (1 + a^k)(1 + b^k)(1 + c^k)(1 + d^k)$. Chứng minh rằng

$$a) F_4 \geq F_3.$$

$$b) F_2 \geq F_1.$$

Bài tập 2.2.3.3. Cho $a, b, c, d \geq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2 + c^2 + d^2} + \frac{b}{a^2 + c^2 + d^2} + \frac{c}{a^2 + b^2 + d^2} + \frac{d}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{4}{a + b + c + d}.$$

Bài tập 2.2.3.4. Cho các số thực không âm a, b, c, d có tổng bằng 4, k là một số thực dương cho trước. Chứng minh rằng

$$(abc)^k + (bcd)^k + (cda)^k + (dab)^k \leq \max \left\{ 4, \left(\frac{4}{3} \right)^{3k} \right\}.$$

Bài tập 2.2.3.5. Chứng minh rằng với 4 số không âm a, b, c, d có tổng bằng 4 thì

$$\frac{1}{5 - abc} + \frac{1}{5 - bcd} + \frac{1}{5 - cda} + \frac{1}{5 - dab} \leq 1.$$

KẾT LUẬN

Được sự đồng ý của nhà trường, em đã tiến hành nghiên cứu đề tài Khóa luận tốt nghiệp “***Kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp dồn biến***”. Trong quá trình nghiên cứu, đề tài đã đạt được các kết quả sau

- Trình bày một cách có hệ thống các định lí dồn biến, định lí dồn biến mạnh, định lí dồn biến tổng quát.

- Trình bày các phương pháp dồn biến bằng kỹ thuật hàm số, dồn biến bằng hàm lồi, dồn biến về giá trị trung bình và các bất đẳng thức đơn giản dùng phương pháp dồn biến để chứng minh bất đẳng thức 3 biến với cực trị đạt được đối xứng, bất đẳng thức 3 biến với cực trị đạt được tại biên, bất đẳng thức 4 biến.

- Trình bày chi tiết cho mỗi phương pháp dồn biến và cách chứng minh các bất đẳng thức nêu trên, đưa ra hệ thống phong phú các ví dụ minh họa cho mỗi phương pháp và các bất đẳng thức đó.

Về cơ bản Khóa luận đã đạt được các mục tiêu và hoàn thành các nhiệm vụ đặt ra khi tiến hành nghiên cứu. Tuy nhiên, do là lần đầu nghiên cứu một vấn đề khoa học nên chắc chắn Khóa luận còn có thiếu sót, em mong nhận được các ý kiến đóng góp của các thầy cô để đề tài được hoàn thiện hơn. Em xin chân thành cảm ơn.

Tài liệu tham khảo

- [1] Phạm Kim Hùng (2007), *Sáng tạo bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Tri thức.
- [2] Nguyễn Văn Mậu (2006), *Bất đẳng thức, Định lý và áp dụng*, Nhà xuất bản Giáo dục.
- [3] Nguyễn Văn Mậu (2007), *Các bài toán nội suy và áp dụng*, Nhà xuất bản Giáo dục.
- [4] Nguyễn Văn Mậu (2009), *Bất đẳng thức và một số vấn đề liên quan*, Nhà xuất bản giáo dục.
- [5] Các đề thi Olympic Toán học Quốc tế (1965 - 2005).
- [6] *Tạp chí Toán học và tuổi trẻ*.
- [7] *Tuyển tập đề thi Olympiad 30 - 4*.
- [8] *Các trang web diendantoanhoc.net, mathvn.com, ...*

Giảng viên hướng dẫn

Sinh viên thực hiện

Dương Trọng Luyện

Nguyễn Thị Yên