BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

NGUYỄN THỊ HIỀN

TÍNH HÚT TRONG THỜI GIAN HỮU HẠN ĐỐI VỚI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP PHÂN SỐ NỬA TUYẾN TÍNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI, 2018

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

NGUYỄN THỊ HIỀN

TÍNH HÚT TRONG THỜI GIAN HỮU HẠN ĐỐI VỚI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP PHÂN SỐ NỬA TUYẾN TÍNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán giải tích

Mã số : 846 01 02

Người hướng dẫn khoa học : PGS.TS. Trần Đình Kế

HÀ NỘI, 2018

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS.TS Trần Đình Kế. Thầy đã tận tình hướng dẫn và giải đáp những thắc mắc của tôi, giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

Qua đây, tôi xin chân thành cảm ơn tới các thầy cô giáo phòng Sau đại học, các thầy cô giáo khoa Toán cũng như các thầy cô giáo giảng dạy lớp thạc sĩ K20 chuyên ngành Toán giải tích trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2 đã giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập.

Tôi xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã luôn quan tâm, động viên và tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

Hà Nội, tháng 12 năm 2018

Tác giả

Nguyễn Thị Hiền

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan, dưới sự hướng dẫn của PGS.TS Trần Đình Kế, luận văn thạc sĩ chuyên ngành Toán giải tích với đề tài **"Tính hút trong thời gian hữu hạn đối với nghiệm của phương trình vi phân cấp phân số nửa tuyến tính"** được hoàn thành bởi chính sự nhận thức của bản thân tác giả.

Trong suốt quá trình nghiên cứu thực hiện luận văn, tác giả đã kế thừa những thành tựu của các nhà khoa học với sự trân trọng và biết ơn.

Hà Nội, tháng 12 năm 2018

Tác giả

Nguyễn Thị Hiền

Mục lục

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Lý thuyết ổn định các hệ vi phân xuất phát từ các bài toán thực tế, có lịch sử phát triển hàng thế kỷ từ công trình của Lyapunov và đã đạt được những thành tựu quan trọng. Một trong những hướng phát triển của lý thuyết này là xem xét khái niệm ổn định trong thời gian hữu hạn. Lý thuyết ổn định trong thời gian hữu hạn của các hệ vi phân đã trở thành chủ đề nghiên cứu sôi động trong những năm gần đây.

Với mong muốn tiếp cận hướng nghiên cứu này, tôi chọn đề tài:

Tính hút trong thời gian hữu hạn đối với nghiệm của phương trình vi phân cấp phân số nửa tuyến tính.

Mục tiêu cụ thể là xét tính hút trong thời gian hữu hạn của nghiệm của phương trình vi phân cấp phân số dạng

$$D_0^\alpha u(t) = Au(t) + f(u(t)),\ t \in (0, T], \tag{1}$$

trong đó toán tử $A : D(A) \subset X \to X$ là phần tử sinh của một C_0-nửa nhóm trên không gian Banach X, f là một hàm phi tuyến.

Ký hiệu $\mathbb{S}(\xi)$ là tập nghiệm của (1) với dữ kiện ban đầu ξ. Giả sử $u \in \mathbb{S}(\xi)$ là một nghiệm cho trước của (1). Khi đó

(i) u được gọi là có tính chất hút trên đoạn $[0, T]$ nếu tồn tại $\eta > 0$ sao cho

$$\|v(T) - u(T)\| < \|\zeta - \xi\|$$

với mọi $\zeta \in B_\eta(\xi) \setminus \{\xi\}$ và $v \in \mathbb{S}(\zeta)$, ở đây $B_\eta(\xi)$ là hình cầu đóng trong X với tâm tại ξ và bán kính η.

(ii) u được gọi là có tính chất hút mũ trên đoạn $[0, T]$ nếu

$$\limsup_{\eta \searrow 0} \frac{1}{\eta} \sup_{\zeta \in B_\eta(\xi)} \sup_{v \in \mathbb{S}(\zeta)} \|v(T) - u(T)\| < 1.$$

Khái niệm tính hút trong thời gian hữu hạn được đề xuất trong công trình [12].

2. Mục đích nghiên cứu

Nghiên cứu tính hút và hút mũ trong thời gian hữu hạn đối với nghiệm của hệ vi phân (1).

3. Nhiệm vụ nghiên cứu

- Tìm hiểu lý thuyết ổn định trong thời gian hữu hạn cho các hệ vi phân.
- Tìm hiểu lý thuyết nửa nhóm và giải tích bậc phân số.
- Nghiên cứu tính hút và hút mũ đối với nghiệm của (1).

4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

- Đối tượng nghiêu cứu: phương trình vi phân cấp phân số nửa tuyến tính.
- Phạm vi nghiên cứu: điều kiện đảm bảo tính hút và hút mũ.

5. Phương pháp nghiên cứu

Luận văn sử dụng một số công cụ của giải tích hàm và phương trình vi tích phân:

- Giải tích bậc phân số;
- Lý thuyết ổn định thời gian hữu hạn;
- Lý thuyết điểm bất động.

6. Đóng góp của luận văn

Trình bày một số kết quả gần đây về tính hút và hút mũ đối với nghiệm của phương trình vi phân cấp phân số nửa tuyến tính, dựa vào công trình [18].

Đặt vấn đề

Hệ động lực trong thời gian hữu hạn được nghiên cứu rộng rãi trong hai thập kỉ trở lại đây. Động cơ đầu tiên thúc đẩy nghiên cứu hệ động lực trong thời gian hữu hạn là tính toán trường véc tơ trong khoảng thời gian bị chặn $t \in [t_0, t_1]$ của hệ động lực sinh bởi phương trình vi phân

$$\dot{x}(t) = f(x(t)). \tag{0.1}$$

Khi phương trình (0.1) được xét trên nửa trục, người ta quan tâm tới dáng điệu trong thời gian ngắn của nghiệm, nghĩa là dáng điệu của nghiệm trên $[t_0, t_1]$. Khi nghiên cứu các hệ động lực từ các bài toán vận chuyển trong chất lỏng, mạng hoá sinh, truyền tín hiệu (xem [11]), dáng điệu trong thời gian hữu hạn đóng vai trò quan trọng và có ý nghĩa vật lý hơn dáng điệu tiệm cận khi $t \to \infty$. Một vài kết quả gần đây về mũ Lyapunov cho các quá trình tiến hóa trong thời gian hữu hạn có thể kể đến [11, 13].

Theo hướng nghiên cứu dáng điệu trong thời gian hữu hạn của nghiệm của (0.1), khái niệm tính hút trong thời gian hữu hạn được đề xuất trong [22] có ích trong lý thuyết điều khiển. Một nghiệm y của hệ (0.1) được gọi là hút trên $[0, T]$ nếu tồn tại số $\eta > 0$ sao cho với bất kì nghiệm $x(\cdot, \xi)$ của (0.1) với dữ kiện đầu ξ ta có

$$\|x(T, \xi) - y(T, y(0))\| < \|\xi - y(0)\|, \ \forall \xi \in B_\eta(y(0)) \backslash \{y(0)\},$$

trong đó $B_\eta(y_0)$ là hình cầu tâm tại y_0 bán kính η. Nếu ta có

$$\limsup_{\eta \searrow 0} \frac{1}{\eta} \sup_{\xi \in B_\eta(y(0))} \|x(T, \xi) - y(T, y(0))\| < 1,$$

thì nghiệm y được gọi là hút mũ trên $[0, T]$. Có thể tham khảo [9, 12] cho những nghiên cứu gần đây liên quan tới tính hút trong thời gian hữu hạn đối với phương trình vi phân thường.

Trong luận văn này sử dụng các khái niệm hút trong thời gian hữu hạn và hút mũ thời gian hữu hạn để phân tích dáng điệu của nghiệm của phương trình

$$\frac{d}{dt}(\mu_\alpha * [x - x(0)])(t) = Ax(t) + f(x(t)), \tag{0.2}$$

trên khoảng thời gian bị chặn $[0, T]$, trong đó $\mu_\alpha(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$ với $\alpha \in (0, 1)$, hàm trạng thái $x(\cdot)$ lấy giá trị trong không gian Banach X, A là toán tử tuyến tính đóng và sinh ra nửa nhóm liên tục mạnh trên X, $f : X \to X$ là hàm phi tuyến. Ở đây, $\mu_\alpha * v$, với $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+; X)$ là tích chập Laplace, nghĩa là, $(\mu_\alpha * v)(t) = \int_0^t \mu_\alpha(t-s)v(s)ds$. Phương trình (0.2) cũng được biết như là phương trình vi phân bậc phân số (FrDE) với đạo hàm Caputo bậc phân số α.

Các phương trình không địa phương theo biến thời gian như phương trình (0.2) với A là toán tử đạo hàm riêng elliptic cấp hai được sử dụng trong vật lý toán để mô hình các quá trình động lực trong vật liệu với nhớ. Các phương trình này cũng được sử dụng để mô tả các quá trình khuếch tán bất thường (xem [19]). Như đã mô tả trong [19], nếu thay μ_α bởi nhân khả tích địa phương, chúng ta có thể dùng phần tuyến tính của hệ (0.2) để mô tả nhiều quá trình như quá trình khuếch tán chậm, quá trình khuếch tán nhanh và quá trình khuếch tán siêu chậm.

Có nhiều kết quả nghiên cứu tính ổn định cho FrDE trong không gian hữu hạn chiều. Phương pháp hàm Lyapunov để nghiên cứu tính ổn định của FrDE được đề xuất trong trong [20]. Các điều kiện ổn định cho FrDE tuyến tính thông qua mũ Lyapunov bậc phân số được đề xuất trong [7], và ổn định tuyến tính hoá cho FrDE nửa tuyến tính được trình bày trong [8].

Liên quan tới FrDE trong không gian vô hạn chiều (chẳng hạn các phương trình đạo hàm riêng mô tả hiện tượng khuếch tán bất thường), kết quả về tính ổn định ít được biết đến. Có một vài nghiên cứu gần đây, xem [5, 17], chứng minh tính ổn định yếu cho FrDE nửa tuyến tính trong không gian Banach. Như chúng ta biết, phân tích tính hút trong thời gian hữu hạn cho (0.2) chưa được nghiên cứu.

Theo ý tưởng nghiên cứu hệ động lực trong thời gian hữu hạn đề xuất trong [12, 22], trong luận văn này sẽ thiết lập các điều kiện đủ để chứng minh tính hút trong thời gian hữu hạn cho nghiệm của (0.2) trên khoảng thời gian bị chặn dưới giả thiết số hạng phi tuyến f có tăng trưởng trên tuyến tính. Nghiên cứu dựa trên lý thuyết giải thức bậc phân số và các ước lượng nghiệm.

Luận văn sẽ nhắc lại khái niệm và kết quả liên quan tới họ giải thức bậc phân số. Thêm vào đó, sẽ dẫn ra kết quả về sự tồn tại nghiệm của (0.2) dưới giả thiết tổng quát về hàm f. Trong mục 3, chứng minh kết quả chính về tính hút của nghiệm của (0.2). Hệ quả, và nhận được kết quả về tính hút tuyến tính hoá trong thời gian hữu hạn. Phần cuối là áp dụng kết quả trừu tượng cho một lớp phương trình khuếch tán chậm nửa tuyến tính.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Cho $(X, \|\cdot\|)$ là không gian Banach. Trong phần sau, ký hiệu $C([0,T];X)$ là không gian các hàm liên tục trên $[0,T]$ lấy giá trị trong X, và $L^p(0,T;X), p \geq 1$, là không gian các hàm xác định trên $[0,T]$ lấy giá trị trong X và khả tích bậc p theo nghĩa Bochner. Tập con $D \subset L^p(0,T;X)$ được gọi là *bị chặn khả tích* nếu tồn tại $\nu \in L^p(0,T) := L^p(0,T;\mathbb{R})$ sao cho

$$\forall f \in D,\ \|f(t)\| \leq \nu(t) \text{ với hầu khắp } t \in [0,T].$$

Ký hiệu $\mathcal{L}(X)$ không gian Banach các toán tử tuyến tính bị chặn trên X. Để ngắn gọn, ta sử dụng $\|\cdot\|$ cho chuẩn trong $\mathcal{L}(X)$.

1.1 Nửa nhóm các toán tử tuyến tính

Ta nhắc lại một số khái niệm và kết quả của lý thuyết nửa nhóm [1].

Định nghĩa 1.1.1. *Ta nói rằng $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là một nửa nhóm các ánh xạ tuyến tính bị chặn trên X nếu $S(t) \in \mathcal{L}(X)$ với mọi $t \geq 0$, và*

i) $S(0) = I$;

ii) $S(t)S(s) = S(t+s),\ \forall t, s \geq 0.$

Nửa nhóm $S(t)$ gọi là một C_0-nửa nhóm (hay nửa nhóm liên tục mạnh) nếu

$$\lim_{t\to 0^+} S(t)x = x,\ \forall x \in X. \tag{1.1}$$

Định nghĩa 1.1.2. *Giả sử* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *là một* C_0*-nửa nhóm trên* X*. Ta định nghĩa toán tử sinh* A *của nó như sau:*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X : \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)-I}{h} x \text{ tồn tại trong } X \right\}$$

và

$$Ax = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)-I}{h} x = \frac{d^+(S(t)x)}{dt} \,|_{t=0}\,,\ \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ được gọi là compact nếu với mỗi $t > 0$, $S(t)$ là một toán tử compact.

Bây giờ chúng ta sẽ nêu định nghĩa nửa nhóm giải tích. Với $\delta \in (0,\pi)$ và $\sigma \in (0,\pi)$ ta định nghĩa

$$\begin{aligned}
\Delta_\delta &= \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \delta,\ z \neq 0\},\\
\Delta_\delta(a) &= a + \Delta_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z-a)| < \delta,\ z \neq a\},\\
\Sigma_\sigma &= \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| > \sigma,\ z \neq 0\},\\
\Sigma_\sigma(a) &= a + \Sigma_\sigma = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z-a)| > \sigma,\ z \neq a\}.
\end{aligned}$$

Định nghĩa 1.1.3. *Giả sử* $\{S(t)\}$ *là một* C_0*-nửa nhóm sinh bởi* A *trên không gian Banach* X*. Ta nói rằng* $\{S(t)\}$ *là một nửa nhóm giải tích nếu tồn tại một thác triển của* $t \mapsto S(t)$ *thành ánh xạ* $z \mapsto S(z)$ *xác định với mọi* z *thuộc quạt* $\Delta_\delta \cup \{0\}$ *và thỏa mãn các điều kiện sau:*

(1) $z \mapsto S(z)$ *là ánh xạ từ* $\Delta_\delta \cup \{0\}$ *vào* $\mathcal{L}(X)$*;*

(2) $S(z_1 + z_2) = S(z_1)S(z_2)$ *với mọi* $z_1,\ z_2 \in \Delta_\delta \cup \{0\}$*;*

(3) Với mọi $w \in X$*, ta có* $S(z)w \to w$ *khi* $z \to 0$ *trong* $\Delta_\delta \cup \{0\}$*;*

(4) Với mọi $w \in X$*, ánh xạ* $z \mapsto S(z)w$ *là giải tích từ* Δ_δ *vào* X*.*

Mỗi ánh xạ $S(z)$ như trên gọi là một thác triển nửa nhóm giải tích của $S(t)$.

Định nghĩa 1.1.4. *Nếu ánh xạ* $t \mapsto S(t)$ *liên tục trên khoảng* $(0,+\infty)$ *theo chuẩn trong* $\mathcal{L}(X)$ *thì ta nói nửa nhóm* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *là liên tục theo chuẩn (norm-continuous). Nếu* $S(\cdot)$ *liên tục trên nửa trục* $[0,\infty)$ *thì ta nói nửa nhóm này liên tục đều.*

Ta biết rằng mỗi nửa nhóm compact hoặc giải tích đều là liên tục theo chuẩn.

Cho A là một toán tử tuyến tính bị chặn trên không gian Banach X ($A \in \mathcal{L}(X)$). Khi đó họ toán tử

$$e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}, t \in \mathbb{R}^+,$$

là một nửa nhóm liên tục đều, do đó nó liên tục theo chuẩn.

Giả sử A là một toán tử tuyến tính tự liên hợp trên không gian Hilbert thực H thỏa mãn:

(1) A là *xác định dương*, tức là tồn tại $a > 0$ sao cho

$$\langle Au, u\rangle \geq a||u||^2, \ \forall u \in \mathcal{D}(A);$$

(2) A có *giải thức compact*, tức là toán tử giải $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ là compact với mọi $\lambda \in \rho(A)$.

Từ giả thiết của A suy ra phổ của A là một dãy đếm được gồm toàn giá trị riêng thực với bội hữu hạn

$$0 < a \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \text{ và } \lambda_n \to \infty \text{ khi } n \to \infty.$$

Các vectơ riêng tương ứng $\{e_1, e_2, \dots\}$ lập thành một cơ sở trực chuẩn của H. Khi đó mỗi $u \in H$ có biểu diễn

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u, e_i\rangle e_i.$$

Hơn nữa, đẳng thức Parseval sau đúng

$$||u||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle u, e_i\rangle|^2.$$

Miền xác định của toán tử A cho bởi

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ u \in H : \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 |\langle u, e_i\rangle|^2 < \infty \right\},$$

và toán tử A cho bởi

$$Au = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle u, e_i \rangle e_i, \text{ với } u \in \mathcal{D}(A).$$

Định lí ánh xạ phổ nói rằng nếu f là một hàm giá trị thực liên tục xác định trên phổ $\sigma(A)$, thì toán tử tuyến tính $f(A)$ định nghĩa bởi

$$f(A)u = \sum_{i=1}^{\infty} f(\lambda_i) \langle u, e_i \rangle e_i,$$

ở đó miền xác định của $f(A)$ cho bởi

$$\mathcal{D}(f(A)) = \left\{ u \in H : \sum_{i=1}^{\infty} |f(\lambda_i)|^2 | \langle u, e_i \rangle |^2 < \infty \right\}.$$

Nói riêng, khi $f(\lambda) = e^{-\lambda t}$, ta có C_0-nửa nhóm sinh bởi $-A$ là

$$e^{-At}u = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \langle u, e_i \rangle e_i.$$

Dễ thấy $\{e^{-At}\}_{t \geq 0}$ thỏa mãn ba điều kiện trong định nghĩa của một C_0-nửa nhóm và toán tử sinh của e^{-At} là $-A$.

Bây giờ ta chỉ ra rằng toán tử tuyến tính e^{-At} là compact với mỗi $t > 0$. Thật vậy, với mỗi $u \in H$ ta có

$$\begin{aligned} ||e^{-At}u - P_N e^{-At}u||^2 &= \sum_{i=N+1}^{\infty} e^{-2\lambda_i t} | \langle u, e_i \rangle |^2 \\ &\leq e^{-2\lambda_{N+1} t} \sum_{i=1}^{\infty} | \langle u, e_i \rangle |^2 = e^{-2\lambda_{N+1} t} ||u||^2, \end{aligned}$$

ở đây P_N là phép chiếu xuống không gian hữu hạn chiều sinh bởi các vectơ riêng $\{e_1, \ldots, e_N\}$. Từ đây suy ra với mỗi $t > 0$, e^{-At} là giới hạn đều của một dãy các toán tử hữu hạn chiều, do đó nó là toán tử compact.

1.2 Giải tích bậc phân số

Xét $L^1(0, T; X)$ là không gian các hàm khả tích trên khoảng $(0, T)$, theo nghĩa Bochner.

Định nghĩa 1.2.1. *Tích phân bậc $\alpha > 0$ của hàm $f \in L^1(0, T; X)$ được xác định bởi*

$$I_0^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds,$$

trong đó Γ là hàm Gamma.

Định nghĩa 1.2.2. *Xét hàm $f \in C^N([0, T]; X)$, đạo hàm bậc $\alpha \in (N-1, N)$ theo nghĩa Caputo được xác định bởi*

$$^C D_0^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(N-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{N-\alpha-1} f^{(N)}(s) ds.$$

Chú ý rằng, có nhiều khái niệm đạo hàm bậc phân số khác nhau, nhưng hai định nghĩa theo kiểu Riemann-Liouville và Caputo là được sử dụng rộng rãi nhất.
Với $u \in C^N([0, T]; X)$, ta có tính chất

$$\begin{aligned} &^C D_0^\alpha I_0^\alpha u(t) = u(t), \\ &I_0^\alpha \, ^C D_0^\alpha u(t) = u(t) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{u^{(k)}(0)}{k!} t^k. \end{aligned}$$

1.3 Họ giải thức

Xét phương trình

$$\frac{d}{dt}(\mu_\alpha * [x - x(0)])(t) = Ax(t) + f(t), t > 0, \tag{1.2}$$

trong đó A sinh ra C_0-nửa nhóm $S(\cdot)$ sao cho

$$\|S(t)\| \leq M, \ \forall t \geq 0.$$

Sử dụng [28, Bổ đề 3.1], chúng ta có

$$x(t) = \mathcal{S}_\alpha(t)x(0) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathcal{P}_\alpha(t-s) f(s) ds, t \geq 0, \tag{1.3}$$

trong đó

$$\mathcal{S}_\alpha(t)x = \int_0^\infty \phi_\alpha(\theta)S(t^\alpha\theta)x\,d\theta, \tag{1.4}$$

$$\mathcal{P}_\alpha(t)x = \alpha\int_0^\infty \theta\phi_\alpha(\theta)S(t^\alpha\theta)x\,d\theta, \forall x \in X, \tag{1.5}$$

với ϕ_α là hàm mật đọ xác suất trên $(0,\infty)$, ϕ_α có biểu diễn

$$\phi_\alpha(\theta) = \frac{1}{\alpha\pi}\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\theta^{n-1}\frac{\Gamma(n\alpha+1)}{n!}\sin n\pi\alpha,\ \theta \in (0,\infty).$$

Trên cơ sở (1.3), dẫn ra định nghĩa nghiệm tích phân cho (0.2).

Định nghĩa 1.3.1. *Hàm $x \in C([0,T];X)$ được gọi là nghiệm tích phân của (0.2) trên $[0,T]$ với dữ kiện đầu ξ khi và chỉ khi*

$$x(t) = \mathcal{S}_\alpha(t)\xi + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{P}_\alpha(t-s)f(x(s))\,ds,$$

với mọi $t \in [0,T]$.

Tiếp theo, ta sẽ nhắc lại một số kết quả cơ bản được dùng cho phần sau của luận văn.

Bổ đề 1.3.1. *Giả sử A là phần tử sinh của C_0-nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ trong X sao cho $\|S(t)\| \leq M$ với $t \geq 0$. Khi đó*

i) $\|\mathcal{S}_\alpha(t)\| \leq M$, $\|\mathcal{P}_\alpha(t)\| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}$ với $t \geq 0$;

ii) Nếu $S(t)$, $t > 0$ là toán tử compact, thì $\mathcal{S}_\alpha(t)$ và $\mathcal{P}_\alpha(t)$ cũng là toán tử compact với $t > 0$;

iii) Nếu $S(\cdot)$ liên tục theo chuẩn thì $\mathcal{S}_\alpha(\cdot)$ và $\mathcal{P}_\alpha(\cdot)$ cũng liên tục theo chuẩn;

iv) Nếu $S(\cdot)$ ổn định mũ, nghĩa là $\|S(t)\| \leq Me^{-\beta t}$ với $\beta > 0$, thì

$$\|\mathcal{S}_\alpha(t)\| \leq ME_{\alpha,1}(-\beta t^\alpha),$$
$$\|\mathcal{P}_\alpha(t)\| \leq ME_{\alpha,\alpha}(-\beta t^\alpha),$$

với mọi $t \geq 0$.

Chứng minh. Chứng minh khẳng định i) và ii) có thể tìm trong [28], khẳng định iii) được chứng minh trong [26]. Khẳng định cuối được chứng minh trong [3]. □

Xét toán tử $\mathcal{Q}_\alpha : L^p(0,T;X) \to C([0,T];X)$ được định nghĩa bởi

$$\mathcal{Q}_\alpha(f)(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{P}_\alpha(t-s)f(s)ds, \tag{1.6}$$

trong đó $p > \frac{1}{\alpha}$. Kết quả sau được chứng minh trong [17].

Mệnh đề 1.3.2. *Giả sử rằng C_0-nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sinh bởi A liên tục theo chuẩn. Khi đó với mỗi tập bị chặn khả tích $\Omega \subset L^p(0,T;X)$, $\mathcal{Q}_\alpha(\Omega)$ là tập đồng liên tục trong $C([0,T];X)$.*

Ký hiệu $E_{\alpha,\beta}$ là hàm Mittag-Leffler

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)},\ z\in\mathbb{R}, \alpha>0, \beta>0.$$

Trong chứng minh phần sau, các bất đẳng thức loại Gronwall sau được sử dụng.

Bổ đề 1.3.3. *([27, Hệ quả 2]) Giả sử rằng $\beta > 0, b \geq 0$ và σ là hàm không giảm, không âm và khả tích địa phương trên $[0,T]$. Nếu v là hàm không âm khả tích địa phương trên $[0,T]$ với*

$$v(t) \leq \sigma(t) + b\int_0^t (t-s)^{\beta-1}v(s)ds,\ \forall t\in[0,T],$$

thì $v(t) \leq \sigma(t)E_{\beta,1}(b\Gamma(\beta)t^\beta)$ với mọi $t \in [0,T]$.

Bổ đề 1.3.4. *Cho $v : [0,T] \to \mathbb{R}^+$ là hàm liên tục và thoả mãn bất đẳng thức tích phân*

$$v(t) \leq E_{\alpha,1}(-\eta t^\alpha)v_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\eta(t-s)^\alpha)\left(\ell\, v(s)+\kappa\right)ds,$$

trong đó $\alpha \in (0,1), 0 < \ell < \eta$, $\kappa \geq 0, v_0 \geq 0$. Khi đó

$$v(t) \leq E_{\alpha,1}(-(\eta-\ell)t^\alpha)v_0 + \frac{\kappa}{\eta-\ell}\left(1 - E_{\alpha,1}(-(\eta-\ell)t^\alpha)\right). \tag{1.7}$$

Chứng minh. Sử dụng lập luận tương tự như trong [16, Bổ đề 13], ta có

$$v(t) \leq E_{\alpha,1}(-(\eta-\ell)t^\alpha)v_0+\kappa\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-(\eta-\ell)(t-s)^\alpha)ds. \quad (1.8)$$

Hơn nữa, sử dụng phép biến đổi Laplace ta có

$$\frac{d}{dt}E_{\alpha,1}(-\gamma t^\alpha) = -\gamma t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\gamma t^\alpha),\ \forall \gamma > 0, t > 0.$$

Sử dụng đẳng thức cuối để tính tích phân trong (1.8), chúng ta nhận được (1.7). □

1.4 Độ đo không compact và ánh xạ nén

Cho E là không gian Banach, ký hiệu $\mathcal{B}(E)$ là tập hợp các tập con bị chặn, khác rỗng của E. Ta sử dụng định nghĩa độ đo không compact sau (xem [15]).

Định nghĩa 1.4.1. *Một hàm $\psi : \mathcal{B}(E) \to \mathbb{R}^+$ được gọi là độ đo không compact* (MNC) *trên E nếu*

$$\psi(\overline{\mathrm{co}}\ \Omega) = \psi(\Omega) \text{ với mọi } \Omega \in \mathcal{B}(E),$$

ở đó $\psi(\overline{\mathrm{co}}\ \Omega)$ là bao đóng của bao lồi của tập Ω. Một MNC ψ được gọi là:

(i) đơn điệu nếu với mỗi tập $\Omega_0, \Omega_1 \in \mathcal{B}(E)$ sao cho $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$, chúng ta có $\psi(\Omega_0) \leq \psi(\Omega_1)$;

(ii) không suy biến nếu $\psi(\{a\} \cup \Omega) = \psi(\Omega)$ với mọi $a \in E, \Omega \in \mathcal{B}(E)$;

(iii) bất biến với hợp của tập compact nếu $\psi(K \cup \Omega) = \psi(\Omega)$ với mọi tập compact tương đối $K \in E$ và $\Omega \in \mathcal{B}(E)$;

(iv) nửa cộng tính đại số nếu $\psi(\Omega_0 + \Omega_1) \leq \psi(\Omega_0) + \psi(\Omega_1)$ với mọi $\Omega_0, \Omega_1 \in \mathcal{B}(E)$;

(v) chính quy $\psi(\Omega) = 0$ tương đương với tính compact tương đối của Ω.

Một ví dụ về MNC thoả mãn các tính chất nêu trên là MNC *Hausdorff* $\chi(\cdot)$, với $\chi(\cdot)$ định nghĩa bởi

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0 : \Omega \text{ có hữu hạn } \varepsilon - \text{lưới}\}.$$

Bây giờ, chúng ta xây dựng một vài độ đo không compact. Giả sử $L > 0$ và $D \subset E = C([0,T];X)$, đặt

$$\omega_T(D) = \sup_{t\in[0,T]} e^{-Lt}\chi(D(t)),\ \text{ở đó } D(t) := \{x(t) : x \in D\}, \tag{1.9}$$

$$\mathrm{mod}_T(D) = \lim_{\delta\to 0}\sup_{x\in D}\max_{t,s\in[0,T],|t-s|<\delta} \|x(t) - x(s)\|. \tag{1.10}$$

Theo [15, Ví dụ 2.1.2, 2.1.4], ω_T và mod_T là các MNC và chúng thoả mãn tất cả các tính chất trong định nghĩa 1.4.1, ngoại trừ tính chính quy. Thêm vào đó, với $D \subset C([0,T];X)$ thì

- $\omega_T(D) = 0$ khi và chỉ khi $D(t)$ là tập compact tương đối với mọi $t \in [0,T]$;
- $\mathrm{mod}_T(D) = 0$ khi và chỉ khi D liên tục đồng bậc.

Đặt

$$\chi_T(D) = \omega_T(D) + \mathrm{mod}_T(D),$$

khi đó χ_T là một MNC chính quy trên $C([0,T];X)$. Thật vậy, nếu $\chi_T(D) = 0$ thì $\omega_T(D) = \mathrm{mod}_T(D) = 0$. Điều này suy ra rằng $D(t)$ là tập compact tương đối với mọi $t \in [0,T]$ và D là tập liên tục đồng bậc. Do đó, theo định lý Arzelà-Ascoli tập D là tập compact tương đối.

Ta cũng cần khái niệm về χ-norm cho một toán tử tuyến tính bị chặn trên E. Giả sử $L \in \mathcal{L}(E)$, định nghĩa

$$\|L\|_\chi = \inf\{C > 0 : \chi(L(\Omega)) \le C\chi(\Omega) \text{ với tất cả tập bị chặn } \Omega \subset E\}. \tag{1.11}$$

Chúng ta biết rằng (xem, ví dụ [2])

- $\|L\|_\chi = \chi(L(\mathbf{B}_1))$, ở đó $\mathbf{B}_1$ là hình cầu đơn vị trong E;
- $\|L\|_\chi$ là một nửa chuẩn trên $\mathcal{L}(E)$ và $\|L\|_\chi \le \|L\|_{\mathcal{L}(E)}$;

- $\|L\|_\chi = 0$ khi và chỉ khi L là toán tử compact.

Bây giờ ta nhắc lại một số ước lượng cơ bản về MNC.

Mệnh đề 1.4.1. ([4]) *Nếu $D \subset L^1(0,T;X)$ sao cho*

(i) $\|\zeta(t)\| \le \nu(t)$, *với mọi $\zeta \in D$ và với hầu khắp nơi trên* $[0,T]$,

(ii) $\chi(D(t)) \le q(t)$ *với hầu khắp nơi trên* $[0,T]$, *ở đó* $\nu, q \in L^1(0,T)$. *Khi đó*

$$\chi\left(\int_0^t D(s)\,ds\right) \le 4\int_0^t q(s)\,ds,$$

ở đó $\displaystyle\int_0^t D(s)\,ds = \left\{\int_0^t \zeta(s)\,ds : \zeta \in D\right\}$.

Để nghiên cứu tính giải được của hệ (0.2) ta sử dụng nguyên lý điểm bất động cho ánh xạ nén.

Định nghĩa 1.4.2. *Ánh xạ liên tục $\mathcal{F} : Z \subseteq E \to E$ được gọi là nén theo MNC ψ ($\psi-$nén) nếu với bất kỳ tập bị chặn $\Omega \subset Z$, ràng buộc*

$$\psi(\Omega) \le \psi(\mathcal{F}(\Omega))$$

kéo theo tính compact tương đối của Ω.

Giả sử ψ là MNC đơn điệu, không suy biến trong E. Ta có định lí điểm bất động sau.

Định lí 1.4.2. *[15, Hệ quả 3.3.1] Giả sử $\mathcal{M}$ là tập con lồi, đóng, bị chặn của E và đặt $\mathcal{F} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ là một ánh xạ ψ-nén. Khi đó* $\mathrm{Fix}(\mathcal{F}) := \{x = \mathcal{F}(x)\}$ *là một tập compact khác rỗng.*

Chương 2

Bài toán về tính hút trong khoảng thời gian hữu hạn

2.1 Sự tồn tại nghiệm

Để nghiên cứu tính giải được, ta đưa ra các giả thiết sau.

(**A**) C_0-nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sinh bởi A liên tục theo chuẩn và bị chặn toàn cục, nghĩa là tồn tại $M \geq 1$ sao cho

$$\|S(t)x\| \leq M\|x\|, \forall t \geq 0, \forall x \in X.$$

(**F**) Hàm phi tuyến $f : X \to X$ liên tục và thoả mãn

(1) Điều kiện tăng trưởng

$$\|f(v)\| \leq \Psi(\|v\|), \forall v \in X,$$

trong đó $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là một hàm liên tục không giảm;

(2) Nếu $S(\cdot)$ không compact thì với mỗi tập bị chặn $\Omega \subset X$, ta có

$$\chi(f(\Omega)) \leq k\, \chi(\Omega),$$

với $k \in \mathbb{R}^+$.

Chú ý 2.1.1. *Chú ý rằng, giả thiết* (**F**)(2) *được thoả mãn nếu f hoàn toàn liên tục hoặc liên tục Lipschitz với hệ số k (xem [2]).*

Cho $\xi \in X$, ta định nghĩa *toán tử nghiệm* $\Sigma : C([0,T];X) \to C([0,T];X)$ như sau

$$\Sigma(y)(t) = \mathcal{S}_\alpha(t)\xi + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{P}_\alpha(t-s)f(y(s))\,ds, \tag{2.1}$$

hoặc tương đương,

$$\Sigma(y)(t) = \mathcal{S}_\alpha(t)\xi + \mathcal{Q}_\alpha \circ N_f(y)(t),$$

trong đó $\mathcal{Q}_\alpha$ cho bởi (1.6) và $N_f(y)(t) = f(y(t))$ với $y \in C([0,T];X)$.

Theo công thức trên ta thấy rằng y là nghiệm tích phân của (0.2) khi và chi khi y là điểm bất động của toán tử nghiệm Σ. Từ giả thiết đặt trên f, Σ là hàm số liên tục trên $C([0,T];X)$.

Bổ đề tiếp theo chỉ ra tính nén của Σ.

Bổ đề 2.1.1. *Với các giả thiết* (**A**) *và* (**F**) *thì với mọi tập bị chặn* $\Omega \subset C([0,T];X)$ *ta có*

$$\chi^*(\Sigma(\Omega)) \le \Big(\sup_{t\in[0,T]} 4k\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|\mathcal{P}_\alpha(t-s)\|_\chi ds\Big)\chi^*(\Omega).$$

Chứng minh. Giả sử Ω là một tập bị chặn trong $C([0,T];X)$. Với $x \in \Omega$, ta có

$$\Sigma(x)(t) = \mathcal{S}_\alpha(t)\xi + \mathcal{Q}_\alpha \circ N_f(x)(t),$$

trong đó $N_f(x)(t) = f(x(t))$. Từ giả thiết (**F**)(1), $N_f(\Omega)$ là tập bị chặn khả tích. Từ đây và Mệnh đề 1.3.2, ta thấy rằng $\mathcal{Q}_\alpha \circ N_f(\Omega)$ là tập đồng liên tục trong $C([0,T];X)$. Do đó

$$\mathrm{mod}_C(\Sigma(\Omega)) = \mathrm{mod}_C(\mathcal{Q}_\alpha \circ N_f(\Omega)) = 0. \tag{2.2}$$

Mặt khác

$$\chi(\Sigma(\Omega)(t)) \le \chi(\mathcal{Q}_\alpha \circ N_f(\Omega)(t)),\ t \ge 0.$$

Theo Mệnh đề 1.4.1, ta có ước lượng

$$\chi(\mathcal{Q}_\alpha \circ N_f(\Omega)(t)) \le 4\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\chi(\mathcal{P}_\alpha(t-s)f(\Omega(s))\,ds.$$

Nếu nửa nhóm $S(\cdot)$ compact thì, xem Mệnh đề 1.3.1, $\mathcal{P}_\alpha(\cdot)$ cũng compact. Do đó $\chi(\mathcal{P}_\alpha(t-s)f(\Omega(s)) = 0$. Trường hợp ngược lại, sử dụng giả thiết $(\mathbf{F})(2)$, ta có

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{Q}_\alpha \circ N_f(\Omega)(t)) &\leq 4\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|\mathcal{P}_\alpha(t-s)\|_\chi \cdot \chi(f(\Omega(s)))ds\\ &\leq 4k\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|\mathcal{P}_\alpha(t-s)\|_\chi \cdot \chi(\Omega(s))ds.\end{aligned}$$

Suy ra

$$e^{-Lt}\chi(\Sigma(\Omega)(t)) \leq \Big(4k\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}e^{-L(t-s)}\|\mathcal{P}_\alpha(t-s)\|_\chi\, ds\Big) \sup_{t\in[0,T]} e^{-Lt}\chi(\Omega(t)). \tag{2.3}$$

Từ các ước lượng (2.2) và (2.3), chúng ta có

$$\chi^*(\Sigma(\Omega)) \leq \Big(\sup_{t\in[0,T]} 4k\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}e^{-L(t-s)}\|\mathcal{P}_\alpha(t-s)\|_\chi ds\Big)\chi^*(\Omega).$$

Chứng minh hoàn thành. □

Chọn L trong (1.9) sao cho

$$4k\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}e^{-L(t-s)}\|\mathcal{P}_\alpha(t-s)\|_\chi\, ds < 1.$$

Khi đó theo Bổ đề 2.1.1, toán tử nghiệm Σ là χ^*-nén. Định lý sau đây phát biểu kết quả về tính giải được của (0.2).

Định lí 2.1.2. *Giả sử các giả thiết* $(\mathbf{A})$ *và* $(\mathbf{F})$ *được thoả mãn. Nếu tồn tại* $R > 0$ *sao cho*

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)R}{\Gamma(\alpha+1)\|\xi\| + T^\alpha\Psi(R)} \geq M, \tag{2.4}$$

thì tập nghiệm của (0.2) *là tập compact khác rỗng.*

Chứng minh. Áp dụng Định lý 1.4.2, ta cần chứng minh Σ ánh xạ B_R vào chính B_R, ở đây B_R là hình cầu đóng trong$C([0,T];X)$ tâm tại gốc toạ độ, bán kính R. Thật vậy với mỗi $x \in B_R$, ta có

$$\begin{aligned}\|\Sigma(x)(t)\| &\leq \|\mathcal{S}_\alpha(t)\|\|\xi\| + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|\mathcal{P}_\alpha(t-s)\|\Psi(\|x(s)\|)\,ds \\ &\leq M\|\xi\| + \frac{MT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\Psi(R) \leq R, \forall t \in [0,T].\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối chỉ ra rằng $\Sigma(x) \in B_R$. Định lý được chứng minh. $\square$

Chú ý 2.1.2. *(i) Điều kiện (2.4) cho phép hàm phi tuyến có tăng trưởng trên tuyến tính. Chẳng hạn $\Psi(r) = \ell r^2$, thì điều kiện (2.4) là*

$$M\ell T^\alpha R^2 - \Gamma(\alpha+1)R + M\Gamma(\alpha+1)\|\xi\| \leq 0.$$

Do đó ta chọn R sao cho

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(\alpha+1)-\delta}{2\ell MT^\alpha} &\leq R \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)+\delta}{2\ell MT^\alpha}, \\ \delta &= \sqrt{\Gamma^2(\alpha+1) - 4\ell M^2T^\alpha\Gamma(\alpha+1)\|\xi\|},\end{aligned}$$

với điều kiện $4\ell M^2T^\alpha\|\xi\| \leq \Gamma(\alpha+1)$.

(ii) Nếu $\|f(v)\| = o(\|v\|)$ khi $\|v\| \to 0$ thì kết luận của Định lý 2.1.2 vẫn đúng với điều kiện là ξ đủ nhỏ, trong trường hợp này giá thiết $(\mathbf{F})(1)$ và (2.4) không cần thiết. Chúng ta chứng minh khẳng định $\Sigma(B_\delta) \subset B_\delta$ với δ đủ nhỏ. Thật vậy, theo giả thiết, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\|f(v)\| \leq \epsilon\|v\|$ nếu $\|v\| \leq \delta$.

Lấy $x \in B_\delta$, $\epsilon = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2MT^\alpha}$ và $\|\xi\| \leq \dfrac{\delta}{2M}$, thì

$$\begin{aligned}\|\Sigma(x)(t)\| &\leq M\|\xi\| + \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|f(x(s))\|ds \\ &\leq M\|\xi\| + \frac{\epsilon M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|x(s)\|ds \\ &\leq M\|\xi\| + \frac{\epsilon MT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\delta \leq \delta,\ \forall t \in [0,T],\end{aligned}$$

khẳng định được chứng minh.

(iii) Nếu f có tăng trưởng tuyến tính, nghĩa là có các số không âm a, b sao cho

$$\Psi(r) = a + br,$$

thì không cần điều kiện (2.4) (xem [3]).

2.2 Tính hút trong thời gian hữu hạn

Trong phần này, sẽ chứng minh một số kết quả về tính hút trong thời gian hữu hạn của nghiệm của (0.2). Ký hiệu $\mathbb{S}(\xi)$ là tập các nghiệm của (0.2) ứng với dữ kiện ban đầu ξ. Chú ý rằng giả thiết (**F**) đặt trên f không khẳng định sự duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy, khi đó $\mathbb{S}(\xi)$ có thể là đa trị. Vì thế sẽ sử dụng khái niệm sau về tính hút trong thời gian hữu hạn của nghiệm của (0.2).

Định nghĩa 2.2.1 (Tính hút trong thời gian hữu hạn)**.** *Cho $y : [0, T] \to X$ là một nghiệm* (0.2)*.*

(i) y được gọi là hút trên $[0, T]$ nếu tồn tại $\eta > 0$ sao cho

$$\|x(T, \xi) - y(T, y(0))\| < \|\xi - y(0)\|, \tag{2.5}$$

với mọi $\xi \in B_\eta(y(0)) \backslash \{y(0)\}$ và $x \in \mathbb{S}(\xi)$.

(ii) y được gọi là hút mũ trên $[0, T]$ nếu

$$\limsup_{\eta \searrow 0} \frac{1}{\eta} \sup_{\xi \in B_\eta(y(0))} \sup_{x \in \mathbb{S}(\xi)} \|x(T, \xi) - y(T, y(0))\| < 1. \tag{2.6}$$

Từ định nghĩa tính hút mũ suy ra tính hút. Bổ đề sau dẫn ra điều kiện đủ cho tính hút mũ.

Bổ đề 2.2.1. *Cho $y \in C([0, T]; X)$ là một nghiệm của* (0.2)*. Khi đó y hút mũ trên $[0, T]$ nếu*

$$\limsup_{\|\xi\| \to 0} \sup_{x \in \mathbb{S}(y(0)+\xi)} \frac{\|x(T, y(0) + \xi) - y(T, y(0))\|}{\|\xi\|} < 1. \tag{2.7}$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\eta} \sup_{\xi \in B_\eta(y(0))} \sup_{x \in \mathbb{S}(\xi)} \|x(T, \xi) - y(T, y(0))\| \\
&\qquad = \sup_{\|\xi\| < \eta} \sup_{x \in \mathbb{S}(y(0)+\xi)} \frac{\|x(T, y(0) + \xi) - y(T, y(0))\|}{\|\xi\|} \frac{\|\xi\|}{\eta} \\
&\qquad \leq \sup_{\|\xi\| < \eta} \sup_{x \in \mathbb{S}(y(0)+\xi)} \frac{\|x(T, y(0) + \xi) - y(T, y(0))\|}{\|\xi\|}.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\limsup_{\eta \searrow 0} \frac{1}{\eta} \sup_{\xi \in B_\eta(y(0))} \sup_{x \in \mathbb{S}(\xi)} \|x(T,\xi) - y(T, y(0))\|$$
$$\leq \limsup_{\|\xi\| \to 0} \sup_{x \in \mathbb{S}(y(0)+\xi)} \frac{\|x(T, y(0)+\xi) - y(T, y(0))\|}{\|\xi\|}.$$

Từ bất đẳng thức cuối và sử dụng điều kiện (2.7) cho ta điều phải chứng minh. □

Để nghiên cứu tính hút trong thời gian hữu hạn cho nghiệm của (0.2), ta thay thế các giả thiết (**A**) và (**F**) bởi các giả thiết sau.

($\mathbf{A}^*$) Nửa nhóm $S(\cdot)$ sinh bởi A liên tục theo chuẩn và tồn tại $M \geq 1, \beta > 0$ sao cho

$$\|S(t)x\| \leq Me^{-\beta t}\|x\|, \forall t \geq 0, \forall x \in X.$$

($\mathbf{F}^*$) Hàm f thoả mãn (**F**) với Ψ là hàm Lipschitz địa phương và $\Psi(0) = 0$. Hơn nữa, $\|f(v)\| = \gamma\|v\| + o(\|v\|)$ khi $\|v\| \to 0$, với $\gamma < \frac{\beta}{M}$.

Bổ đề 2.2.2. *Dưới các giả thiết* ($\mathbf{A}^*$) *và* ($\mathbf{F}^*$) *thì*

$$\limsup_{\|\xi\| \to 0} \sup_{x \in \mathbb{S}(\xi)} \|x(t)\| = 0, \ \forall t \in (0, T].$$

Chứng minh. Lấy $\xi \in X$. Theo công thức nghiệm tích phân ta có

$$\|x(t)\| \leq M\|\xi\| + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \Psi(\|x(s)\|) ds, \ \forall t \in (0,T], \ \forall x \in \mathbb{S}(\xi).$$

Đặt $v(t) = \limsup_{\|\xi\| \to 0} \sup_{x \in \mathbb{S}(\xi)} \|x(t)\|$. Theo giả thiết và bất đẳng thức trên ta có

$$v(t) \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \Psi(v(s)) ds, \ \forall t \in (0,T]. \tag{2.8}$$

Đặt $|v|_\infty = \sup_{t \in [0,T]} v(t)$. Vì Ψ là hàm Lipschitz địa phương nên tồn tại $L = L(|v|_\infty)$ sao cho

$$\Psi(v(t)) = |\Psi(v(t)) - \Psi(0)| \leq Lv(t), \ \forall t \in [0,T].$$

Do đó từ bất đẳng thức (2.8) ta có

$$v(t) \le \frac{ML}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s)ds, \ \forall t \in (0,T].$$

Từ đây và Bổ đề 1.3.3 suy ra $v = 0$. Định lý được chứng minh. □

Định lí 2.2.3. *Nếu các giả thiết* $(\mathbf{A}^*)$ *và* $(\mathbf{F}^*)$ *thoả mãn và*

$$E_{\alpha,1}(-(\beta - \gamma M)T^\alpha) < \frac{1}{M}. \tag{2.9}$$

Khi đó nghiệm không của (0.2) *hút mũ trên* $[0,T]$.

Chứng minh. Cho trước $\epsilon > 0$. Theo giả thiết về hàm f, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\|f(v)\| \le (\gamma + \epsilon)\|v\|, \ \forall v \in B_\delta(0).$$

Sử dụng Bổ đề 2.2.2, với $\xi \in B_\eta(0)$ ta tìm được $\eta > 0$ sao cho $\|x(t)\| \le \delta$, $\forall t \in (0,T]$, $\forall x \in \mathbb{S}(\xi)$. Do đó với $\xi \in B_\eta(0)$ ta có

$$\|f(x(t))\| \le (\gamma + \epsilon)\|x(t)\|, \ \forall t \in (0,T], \ \forall x \in \mathbb{S}(\xi).$$

Chọn $\epsilon > 0$ sao cho

$$ME_{\alpha,1}\left(-(\beta - M(\gamma + \epsilon))T^\alpha\right) < 1.$$

Sử dụng giả thiết $(\mathbf{A}^*)$ và Bổ để 1.3.1, ta nhận được ước lượng sau

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &\le ME_{\alpha,1}(-\beta t^\alpha)\|\xi\| + M\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\beta(t-s)^\alpha)\|f(x(s))\|ds \\ &\le ME_{\alpha,1}(-\beta t^\alpha)\|\xi\| + M(\gamma+\epsilon)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\beta(t-s)^\alpha)\|x(s)\|ds,\end{aligned}$$

với $\xi \in B_\eta(0)$ và $x \in \mathbb{S}(\xi)$. Áp dụng Bổ đề 1.3.4, ta có

$$\|x(t)\| \le ME_{\alpha,1}\left(-(\beta - M(\gamma+\epsilon))t^\alpha\right)\|\xi\|, \ \forall t \in (0,T].$$

Vì vậy, ta thu được

$$\limsup_{\|\xi\|\to 0} \sup_{x \in \mathbb{S}(\xi)} \frac{\|x(T)\|}{\|\xi\|} < 1.$$

Định lý được chứng minh. □

Hệ quả chúng ta nhận được kết quả về tính hút tuyến tính hoá cho hệ (0.2).

Hệ Quả 2.2.4. *Giả sử* (**A**) *thoả mãn và giả sử* $f \in C^1(X)$ *sao cho*

1. $f(0) = 0$;
2. f *thoả mãn* (**F**) *với* Ψ *là hàm Lipschitz địa phương;*
3. $A_0 = A + Df(0)$ *là phần tử sinh của nửa nhóm ổn định mũ* $\{S_0(t)\}_{t\geq 0}$, *nghĩa là*
$$\|S_0(t)\| \leq e^{-\beta t},\ \forall t \geq 0,$$
với $\beta > 0$.

Khi đó nghiệm không của (0.2) *hút trên* $[0, T]$.

Chứng minh. Ta có
$$S_0(t)v = S(t)v + \int_0^t S(t-s)Df(0)v ds,\ \forall v \in X,$$
trong đó $S(\cdot)$ là nửa nhóm sinh bởi A. Công thức biểu diễn ở trên khẳng định rằng $S_0(\cdot)$ có cùng tính chất compact hoặc liên tục theo chuẩn như $S(\cdot)$. Đặt $f_0(v) = f(v) - Df(0)v$ thì $f_0 \in C^1(X)$.

Nếu $S(\cdot)$ không compact, thì với tập bị chặn tuỳ ý $\Omega \subset X$ ta có
$$\chi(f_0(\Omega)) \leq \chi(f(\Omega)) + \|Df(0)\|\chi(\Omega) \leq (k + \|Df(0)\|)\chi(\Omega).$$
Mặt khác
$$\|f_0(v)\| \leq \|f(v)\| + \|Df(0)\|\|v\| \leq \Psi(\|v\|) + \|Df(0)\|\|v\| = \tilde{\Psi}(\|v\|).$$
Rõ ràng $\tilde{\Psi}$ là hàm liên tục không giảm, Lipschitz địa phương như Ψ. Hơn nữa $\|f_0(v)\| = o(\|v\|)$ khi $\|v\| \to 0$, nghĩa là, f_0 thoả mãn giả thiết (**F***) với $\gamma = 0$.

Viết lại phương trình (0.2) dưới dạng
$$\frac{d}{dt}(\mu_\alpha * [x - x(0)]) = A_0 x(t) + f_0(x(t)).$$
Áp dụng Định lý 2.2.3 cho phương trình cuối với $M = 1$, chúng ta nhận được chứng minh của Hệ quả 2.2.4. $\square$

Để chứng minh tính hút của các nghiệm khác không, chúng ta thay giả thiết $(\mathbf{F}^*)$ bởi giả thiết sau.

$(\mathbf{F}^\sharp)$ Hàm f thoả mãn $(\mathbf{F})(2)$ và

$$\|f(u) - f(v)\| \leq \Psi(\|u - v\|),\ \forall u, v \in X,$$

trong đó $\Psi \in C(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$ là hàm Lipschitz địa phương, không giảm và thoả mãn

$$\Psi(r) = \gamma r + o(r) \text{ as } r \to 0,\ \gamma < \frac{\beta}{M}.$$

Định lí 2.2.5. *Giả sử* $(\mathbf{A}^*)$, $(\mathbf{F}^\sharp)$ *và* (2.9) *thoả mãn. Khi đó mọi nghiệm của* (0.2) *hút mũ trên* $[0, T]$.

Chứng minh. Cố định $\xi^* \in X$ và $x^* \in \mathbb{S}(\xi^*)$, chúng ta chứng minh tính hút của nghiệm x^*. Với $x \in \mathbb{S}(\xi)$, $\xi \in X$, đặt

$$\tilde{\xi} = \xi - \xi^*,\ \tilde{x}(t) = x(t) - x^*(t),\ t \in [0, T].$$

Khi đó $\tilde{x}$ thoả mãn

$$\tilde{x}(t) = \mathcal{S}_\alpha(t)\tilde{\xi} + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{P}_\alpha(t-s)[f(x(s)) - f(x^*(s))]ds.$$

Theo giả thiết $(\mathbf{F}^\sharp)$, ta có

$$\|f(x(t)) - f(x^*(t))\| \leq \Psi(\|\tilde{x}(t)\|),\ \forall t \in [0, T].$$

Lập luận tương tự như chứng minh của Bổ đề 2.2.2, ta có

$$\limsup_{\|\tilde{\xi}\| \to 0} \sup_{x \in \mathbb{S}(\xi)} \|x(t) - x^*(t)\| = 0,\ \forall t \in (0, T].$$

Tương tự như trong chứng minh của Định lý 2.2.3, ta nhận được

$$\limsup_{\|\tilde{\xi}\| \to 0} \sup_{x \in \mathbb{S}(\xi)} \frac{\|x(T) - x^*(T)\|}{\|\tilde{\xi}\|} = 0.$$

Tương đương,

$$\limsup_{\|\tilde{\xi}\| \to 0} \sup_{x \in \mathbb{S}(\xi^* + \tilde{\xi})} \frac{\|x(T) - x^*(T)\|}{\|\tilde{\xi}\|} = 0.$$

Định lý được chứng minh. $\square$

2.3 Áp dụng

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ là miền bị chặn với biên $\partial\Omega$ trơn. Xét phương trình vi phân đạo hàm riêng bậc phân số

$$\partial_t^\alpha u(x,t) = \Delta_x u(x,t) + \tilde{f}(u(x,t)),\ \alpha \in (0,1),\ t \in [0,T], \tag{2.10}$$

với điều kiện biên

$$u = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \tag{2.11}$$

và dữ kiện ban đầu

$$u(x,0) = \xi(x),\ x \in \Omega. \tag{2.12}$$

Trong mô hình bài toán trên, ∂_t^α là đạo hàm bậc phân số theo nghĩa Caputo với bậc α ứng với biến thời gian t, Δ_x là toán tử Laplace theo biến x, và $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục.

Ký hiệu

$$X = C_0(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v = 0 \text{ trên } \partial\Omega\},$$

trang bị chuẩn $\|v\| = \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} |v(x)|$. Đặt $A = \Delta$ với miền

$$D(A) = \{v \in C_0(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega) : \Delta v \in C_0(\overline{\Omega})\},$$

và định nghĩa $f : C_0(\overline{\Omega}) \to C_0(\overline{\Omega})$ như sau

$$f(v)(x) = \tilde{f}(v(x)),\ \forall v \in C_0(\overline{\Omega}).$$

Khi đó (2.10)-(2.12) là mô hình của (0.2). Ta biết rằng, xem [25], A sinh ra C_0-nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ co trên X, nghĩa là $\|S(t)\| \leq 1, \forall t \geq 0$. Hơn nữa, theo [6, Định lý 2.3], $S(\cdot)$ là nửa nhóm compact. Do đó giả thiết (**A**) thoả mãn.

Lưu ý rằng, với nửa nhóm co $S(\cdot)$, thì $\|S(t)\| = 1$ với mọi $t \geq 0$ hoặc $S(\cdot)$ ổn định mũ. Theo [14, Định lý 4.2.2], ta có

$$\|S(t)\| \leq Me^{-\lambda_1 t},\ M = \exp\left(\frac{\lambda_1|\Omega|^{2/N}}{4\pi}\right),$$

trong đó λ_1 là giá trị riêng đầu tiên của $(-\Delta)$ trong $H_0^1(\Omega)$, cụ thể

$$\lambda_1 = \sup\left\{\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx} : u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0\right\},$$

và $|\Omega|$ thể tích của miền Ω. Do đó giả thiết $(\mathbf{A}^*)$ được thoả mãn.

Chúng ta xét trường hợp $\tilde{f}$ có tăng trưởng trên tuyến tính

$$|\tilde{f}(z)| \leq k\,|z|^p, \forall z \in \mathbb{R},\ \text{với } k > 0,\ p > 1.$$

Khi đó

- $f(0) = 0$;
- $\|f(v)\| \leq k\|v\|^p$ for all $v \in C_0(\overline{\Omega})$.

Ta có thể dễ dàng thấy rằng f thoả mãn $(\mathbf{F}^*)$ với $\gamma = 0$. Theo Định lý 2.2.3, nghiệm không của (2.10) hút mũ trên $[0, T]$ nếu

$$\exp\left(\frac{\lambda_1|\Omega|^{2/N}}{4\pi}\right) E_{\alpha,1}(-\lambda_1 T^\alpha) < 1.$$

Thực tế, điều kiện cuối đặt trên T, điều kiện này yêu cầu $T > T^*$ với $T^* = T^*(\Omega, N) > 0$. Chúng ta giảm nhẹ điều kiện này bởi giả sử rằng $\tilde{f} \in C^2(\mathbb{R})$ sao cho $\tilde{f}'(0) < 0$. Vì $\tilde{f}$ khả vi cấp hai, ta có $f \in C^1(C_0(\overline{\Omega}))$ (xem [24, Bổ đề 4.13]). Chú ý là $Df(0) = \tilde{f}'(0)I$, nửa nhóm $S_0(\cdot)$ sinh bởi $A_0 = A + Df(0)$ xác định bởi

$$S_0(t) = e^{\tilde{f}'(0)t} S(t),\ t \geq 0,$$

và vì $S(\cdot)$ là nửa nhóm co nên

$$\|S_0(t)\| \leq e^{\tilde{f}'(0)t},\ t \geq 0.$$

Sử dụng Hệ quả 2.2.4, chúng ta có thể phát biểu rằng nghiệm không của (2.10) hút mũ trên $[0, T]$ với mọi $T > 0$.

Kết luận

Luận văn trình bày một số kết quả gần đây trong công trình [18] về tính hút trong thời gian hữu hạn đối với lớp phương trình vi phân cấp phân số nửa tuyến tính trong không gian Banach tổng quát. Cụ thể:

1. Tính giải được toàn cục của bài toán Cauchy trong trường hợp phần phi tuyến tăng trưởng trên tuyến tính.

2. Điều kiện đủ đảm bảo tính hút mũ của nghiệm.

3. Ứng dụng kết quả trừu tượng cho một lớp phương trình đạo hàm riêng cấp phân số nửa tuyến tính.

Luận văn có thể phát triển theo hướng nghiên cứu tính hút trong trường hợp hàm phi tuyến chứa trễ hoặc hàm phi tuyến là ánh xạ đa trị.

Tài liệu tham khảo

[1] Cung Thế Anh, Trần Đình Kế, Nửa nhóm các toán tử tuyến tính và ứng dụng, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm, 2016.

[2] R.R. Akhmerov, M.I. Kamenskii, A.S. Potapov, A.E. Rodkina, B.N. Sadovskii, *Measures of Noncompactness and Condensing Operators*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1992.

[3] C.T. Anh, T.D. Ke, *On nonlocal problems for retarded fractional differential equations in Banach spaces*, Fixed Point Theory **15** (2014), 373-392.

[4] N.T. Anh, T.D. Ke, *Decay integral solutions for neutral fractional differential equations with infinite delays*, Math. Methods Appl. Sci. **38** (2015), 1601-1622.

[5] N.T. Anh, T.D. Ke, N.N. Quan, *Weak stability for integro-differential inclusions of diffusion-wave type involving infinite delays*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **21** (2016), 3637-3654.

[6] W. Arendt, P. Bénilan,Wiener regularity and heat semigroups on spaces of continuous functions, *in Topics in Nonlinear Analysis.* Progress in Nonlinear Differential Equations Application, vol. 35 (Birkhauser, Basel, 1999), pp. 29-49.

[7] N.D. Cong, D.T. Son, H.T. Tuan, *On fractional Lyapunov exponent for solutions of linear fractional differential equations*, Fract. Calc. Appl. Anal. **17** (2014), 285-306.

[8] N.D. Cong, D.T. Son, S. Siegmund, H.T.Tuan, *Linearized asymptotic stability for fractional differential equations*, Electron. J. Qual Theory Differ. Equ. 2016 (39). pp. 1-13.

[9] T. S. Doan, S. Siegmund, *Finite-time attractivity for diagonally dominant systems with off-diagonal delays*, Abstr. Appl. Anal. 2012, Art. ID 210156, 10 pp.

[10] P. Drábek, J. Milota, *Methods of Nonlinear Analysis. Applications to Differential Equations*, Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser, Basel, 2007.

[11] L.H. Duc, J.P. Chávez, D.T. Son, S. Siegmund, *Finite-time Lyapunov exponents and metabolic control coefficients for threshold detection of stimulus-response curves*, J. Biol. Dyn. **10** (2016), 379-394.

[12] P. Giesl, M. Rasmussen, *Areas of attraction for nonautonomous differential equations on finite time intervals.* J. Math. Anal. Appl. **390** (2012), 27-46.

[13] G. Haller, *Distinguished material surfaces and coherent structures in three-dimensional fluid flows*, Phys. D **149** (2001), 248-277.

[14] A. Haraux, M.A. Jendoubi, *The convergence problem for dissipative autonomous systems. Classical methods and recent advances*, Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London, 2015.

[15] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca, *Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces*, de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, vol. 7, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2001.

[16] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J.C. Yao, *Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space*, Appl. Anal. 2017, doi: 10.1080/00036811.2016.1277583.

[17] T.D. Ke, D. Lan, *Fixed point approach for weakly asymptotic stability of fractional differential inclusions involving impulsive effects*, J. Fixed Point Theory Appl. 2017, doi:10.1007/s11784-017-0412-6.

[18] T.D. Ke, T.V. Tuan, *Finite-time attractivity for semilinear fractional differential equations*, Results Math. 73 (2018), no. 1, Art. 7, 19 pp.

[19] J. Kemppainen, J. Siljander, V. Vergara, R. Zacher, *Decay estimates for time-fractional and other non-local in time subdiffusion equations in R^d*, Math. Ann. **366** (2016), 941-979.

[20] V. Lakshmikantham, S. Leela, M. Sambandham, *Lyapunov theory for fractional differential equations*, Commun. Appl. Anal. **12** (2008), 365-376.

[21] F. Mainardi, *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*, Imperial College Press, 2010.

[22] M. Rasmussen, *Attractivity and Bifurcation for Nonautonomous Dynamical Systems*, Lecture Notes in Mathematics 1907. Springer, Berlin, 2007.

[23] T.I. Seidman, *Invariance of the reachable set under nonlinear perturbations*, SIAM J. Control Optim. **25** (1987), 1173-1191.

[24] F. Tröltzsch, *Optimal Control of Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 2010.

[25] I.I. Vrabie, *C_0-Semigroups and Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2003.

[26] R.-N. Wang, D.-H. Chena, T.-J. Xiao, *Abstract fractional Cauchy problems with almost sectorial operators*, J. Differential Equations, **252** (2012), 202-235.

[27] H. Ye, J. Gao, Y. Ding, *A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation*, J. Math. Anal. Appl. 328 (2007), 1075-1081.

[28] Y. Zhou, F. Jiao, *Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations*, Comput. Math. Appl. **59** (2010), 1063-1077.