

UBND TỈNH NINH BÌNH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ

BÁO CÁO KẾT QUẢ THỰC HIỆN
NHIỆM VỤ KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP CƠ SỞ

NHÓM CƠ BẢN CỦA ĐƯỜNG TRÒN
VÀ ỨNG DỤNG

Chủ nhiệm nhiệm vụ: ThS. PHẠM THỊ MINH THU
Đơn vị công tác: KHOA SƯ PHẠM TRUNG HỌC

NINH BÌNH, 2022

UBND TỈNH NINH BÌNH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ

BÁO CÁO KẾT QUẢ THỰC HIỆN
NHIỆM VỤ KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP CƠ SỞ

NHÓM CƠ BẢN CỦA ĐƯỜNG TRÒN
VÀ ỨNG DỤNG

Chủ nhiệm nhiệm vụ: ThS. PHẠM THỊ MINH THU

Các thành viên: ThS. LÊ THỊ HỒNG HẠNH

Đơn vị: KHOA SƯ PHẠM TRUNG HỌC

Xác nhận của Chủ tịch HĐ nghiệm thu

Chủ nhiệm nhiệm vụ

NINH BÌNH, 2022

MỤC LỤC

THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU	ii
Mở đầu	1
Chương 1. NHÓM CƠ BẢN	4
1.1. ĐỒNG LUÂN CỦA CÁC CON ĐƯỜNG VÀ NHÓM CƠ BẢN CỦA KHÔNG GIAN TÔ PÔ	4
1.1.1. Đồng luân của các con đường	4
1.1.2. Nhóm cơ bản của không gian tô pô	6
1.2. ĐỒNG LUÂN CỦA CÁC ÁNH XẠ	13
1.2.1. Đồng luân của các ánh xạ	13
1.2.2. Không gian co rút được	16
1.2.3. Không gian đơn liên	19
1.2.4. Cái co rút, co rút lân cận, co rút biến dạng, co rút biến dạng mạnh	21
Chương 2. NHÓM CƠ BẢN CỦA ĐƯỜNG TRÒN VÀ ỨNG DỤNG	25
2.1. TÍNH NHÓM CƠ BẢN CỦA ĐƯỜNG TRÒN	25
2.2. ỨNG DỤNG NHÓM CƠ BẢN CỦA ĐƯỜNG TRÒN	30
Kết luận - Kiến nghị	33
Danh mục tài liệu tham khảo	34

THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

Nhóm cơ bản của không gian tô pô là khái niệm cơ bản của tô pô đại số được nghiên cứu bởi rất nhiều nhà khoa học với mong muốn đưa cấu trúc đại số vào không gian tô pô để tìm được các tính chất tô pô một cách dễ dàng hơn. Trong đề tài này, chúng tôi tổng hợp lại một số kết quả liên quan đến nhóm cơ bản của không gian tô pô, đồng luân của các con đường, đồng luân của các ánh xạ. Ngoài ra, chúng tôi trình bày chứng minh định lý rất quan trọng về nhóm cơ bản của đường tròn thông qua hai bổ đề chìa khoá là bổ đề nâng và bổ đề đồng luân. Từ đó đưa ra ứng dụng nổi bật của nhóm cơ bản của đường tròn cũng chính là ví dụ minh hoạ cho việc sử dụng công cụ đại số để đưa ra các tính chất tô pô của không gian tô pô.

MỞ ĐẦU

1. Tổng quan tình hình nghiên cứu

Tô pô đại số là một hướng mạnh của tô pô chủ yếu dùng công cụ đại số để nghiên cứu. Có nhiều nhà toán học trên thế giới và trong nước đã và đang quan tâm nghiên cứu đến tô pô đại số trong số đó nổi bật nhất phải kể đến nhóm nghiên cứu của GS.TSKH Nguyễn Hữu Việt Hưng với danh mục công trình đã công bố thuộc lĩnh vực của đề tài:

1. Nguyễn H. V. Hưng, Spherical classes and the lambda algebra, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), 4447-4460.
2. Nguyễn H. V. Hưng and Trần Ngọc Nam, The hit problem for the modular invariants of linear groups, Jour. Algebra 246 (2001), 367-384.
3. Nguyễn H. V. Hưng, Erratum to "Spherical classes and the algebraic transfer", Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), 3841-3842.
4. Robert R. Bruner và Lê Minh Hà, and Nguyễn H. V. Hưng, On behavior of the algebraic transfer, 1 Trans. Amer. Math. Soc. 357 (2005), 473-487.
5. Nguyễn H. V. Hưng, The cohomology of the Steenrod algebra and representations of the general linear groups, Trans. Amer. Math. Soc. 357 (2005), 4065-4089.
6. Nguyễn H. V. Hưng and Trần Đình Lương, The smallest subgroup whose invariants are hit by the Steenrod algebra, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 142 (2007), 63-71.
7. Nguyễn H. V. Hưng and Võ T.N. Quỳnh, The squaring operation on A -generators of the Dickson algebra, Proc. Japan Acad. Ser. A, Vol. 85, no. 2 (2009), 67-70.
8. Nguyễn H. V. Hưng and Võ T. N. Quỳnh, The squaring operation on A -generators of the Dickson algebra, Math. Proceedings Cambridge Phil. Soc. 148 (2010), 267-288.
9. Nguyễn H.V. Hưng, The homomorphisms between the Dickson-Mùi algebras as modules over the Steenrod algebra, Math. Ann. 353 (2012), 827-866.
10. Nguyễn H. V. Hưng, Võ T. N. Quỳnh, and Ngô A. Tuấn, On the vanishing of the Lannes-Zarati homomorphism, C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I, 352 (2014), 251-254.

Ngoài ra trên thế giới GS G. Powell cũng công bố thành công nhiều công

trình về tô pô đại số:

1. Powell, Geoffrey M. L. Embedding the flag representation in divided powers. *J. Homotopy Relat. Struct.*4 (2009), no. 1, 317–330.
2. Powell, Geoffrey M. L. Module structures and the derived functors of iterated loop functors on unstable modules over the Steenrod algebra. *J. Pure Appl. Algebra*214 (2010), no. 8, 1435–1449. 9
3. Powell, Geoffrey M. L. On unstable modules over the Dickson algebras, the Singer functors R_s and the functors Fix_s . *Algebr. Geom. Topol.*12 (2012), no. 4, 2451–2491.
4. Powell, Geoffrey On the double transfer and the f -invariant. *Glasg. Math. J.*54 (2012), no. 3, 547– 577.

Do đó công cụ đại số mang lại rất nhiều ý nghĩa khoa học trong việc nghiên cứu tính chất tô pô của không gian tô pô.

2. Tính cấp thiết

Tô pô đại số là một nhánh của Toán học với mục đích là xem xét các không gian tô pô và phân loại chúng. Ý tưởng của tô pô đại số là đưa các dữ liệu đại số vào không gian tô pô sao cho các vấn đề tô pô có thể chuyển thành các vấn đề đại số với hi vọng nhiều thành công hơn. Cụ thể là, mỗi không gian tô pô được ánh xạ với những đối tượng đại số (chẳng hạn như nhóm); sau đó nhờ kết quả có được từ việc xem xét các cấu trúc đại số đó để suy ra các tính chất tô pô của không gian tô pô. Điều này cho phép chuyển các vấn đề về không gian tô pô thành các vấn đề đại số, giúp cho bài toán có thể dễ dàng hơn. Theo hướng này có hai phương pháp chính là thông qua nhóm cơ bản và thông qua nhóm đồng điều và đối đồng điều. Do đó, nhóm cơ bản là một trong những khái niệm cơ bản và quan trọng nhất của tô pô đại số và từ định nghĩa về nhóm cơ bản bước đầu chúng ta tính toán nhóm cơ bản của đường tròn, trình bày một vài áp dụng của nhóm cơ bản của đường tròn, đồng thời mở ra hướng nghiên cứu tính nhóm cơ bản của một số đối tượng quen thuộc khác. Vì lí do nêu trên nên nhóm nghiên cứu chúng tôi chọn đề tài “Nhóm cơ bản của đường tròn và ứng dụng”.

3. Mục đích nghiên cứu

Tính nhóm cơ bản của đường tròn và trình bày một vài ứng dụng của nhóm cơ bản của đường tròn.

4. Đối tượng nghiên cứu

Đồng luân của các con đường, đồng luân các ánh xạ, nhóm cơ bản của không gian tô pô.

5. Phạm vi nghiên cứu

Nhóm cơ bản của đường tròn và ứng dụng của nhóm cơ bản của đường tròn.

6. Cách tiếp cận và phương pháp nghiên cứu

Cách tiếp cận: Nghiên cứu lý thuyết.

Phương pháp nghiên cứu: Phân tích, tổng hợp.

Chương 1

NHÓM CƠ BẢN

Trong chương này chúng tôi trình bày định nghĩa nhóm cơ bản của không gian tô pô và một số tính chất để chứng minh định lý nhóm cơ bản của đường tròn. Định nghĩa đồng luân của các con đường tham khảo sách của W.S.Massey ([2]) là kiến thức mở đầu dẫn đến định nghĩa nhóm cơ bản của không gian tô pô.

1.1. ĐỒNG LUÂN CỦA CÁC CON ĐƯỜNG VÀ NHÓM CƠ BẢN CỦA KHÔNG GIAN TÔ PÔ

1.1.1. Đồng luân của các con đường

Ký hiệu $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, và X, Y là các không gian tô pô.

Định nghĩa 1.1.1 ([2]). Một *con đường* trong không gian tô pô X là một ánh xạ

$$\sigma : I \longrightarrow X.$$

Điểm $x_0 := \sigma(0)$ được gọi là *điểm đầu* và $x_1 := \sigma(1)$ được gọi *điểm cuối* của con đường σ .

Định nghĩa 1.1.2 ([2]). Cho σ và τ là hai con đường trong X với cùng điểm đầu x_0 và điểm cuối x_1 . Ta nói σ và τ là *đồng luân (với nhau)*, ký hiệu là

$$\sigma \sim \tau \text{ rel } \{0, 1\},$$

nếu tồn tại ánh xạ $F : I \times I \longrightarrow X, (s, t) \longmapsto F(s, t)$, sao cho

1. $F(s, 0) = \sigma(s), \forall s \in I,$
2. $F(s, 1) = \tau(s), \forall s \in I,$
3. $F(0, t) = x_0, \forall t \in I,$
3. $F(1, t) = x_1, \forall t \in I.$

Nói cách khác, hai con đường được gọi là *đồng luân* nếu con đường này có thể biến đổi liên tục thành con đường kia trong X và trong quá trình biến đổi điểm cuối và điểm đầu luôn được giữ cố định.

Chú ý 1.1.3. Với mỗi $t \in I, F_t : I \longrightarrow X, s \longmapsto F(s, t)$, là một con đường từ x_0 đến x_1 và $F_0 = \sigma, F_1 = \tau$. Ta cũng viết $F_t : \sigma \sim \tau \text{ rel } \{0, 1\}$.

Mệnh đề 1.1.4 ([2]). Quan hệ đồng luân $\sim$ là một quan hệ tương đương trên tập các con đường trong X , nghĩa là:

i) $\sigma \sim \sigma \text{ rel}\{0, 1\}$

ii) Nếu $\sigma \sim \tau \text{ rel}\{0, 1\}$ thì $\tau \sim \sigma \text{ rel}\{0, 1\}$

iii) Nếu $\sigma \sim \tau \text{ rel}\{0, 1\}$ và $\tau \sim \rho \text{ rel}\{0, 1\}$ thì $\sigma \sim \rho \text{ rel}\{0, 1\}$

với σ, τ, ρ là các con đường trong X .

Chứng minh. Ta thấy $\sim$ có các tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu. Cụ thể là:

i) $\sigma \sim \sigma \text{ rel}\{0, 1\}$ bởi

$$F(s, t) = \sigma(s).$$

Thật vậy,

$$+) F(s, 0) = \sigma(s),$$

$$+) F(s, 1) = \sigma(s),$$

$$+) F(0, t) = \sigma(0) = x_0,$$

$$+) F(1, t) = \sigma(1) = x_1.$$

ii) Nếu $\sigma \sim \tau \text{ rel}\{0, 1\}$ bởi $F(s, t)$ thì $\tau \sim \sigma \text{ rel}\{0, 1\}$ bởi

$$\tilde{F}(s, t) = F(s, 1 - t).$$

Thật vậy,

$$+) \tilde{F}(s, 0) = F(s, 1) = \tau(s),$$

$$+) \tilde{F}(s, 1) = F(s, 0) = \sigma(s),$$

$$+) \tilde{F}(0, t) = F(0, 1 - t) = x_0,$$

$$+) \tilde{F}(1, t) = F(1, 1 - t) = x_1.$$

iii) Nếu $\sigma \sim \tau \text{ rel}\{0, 1\}$ bởi $F_1(s, t)$ và $\tau \sim \rho \text{ rel}\{0, 1\}$ bởi $F_2(s, t)$ thì $\sigma \sim \rho \text{ rel}\{0, 1\}$ bởi

$$F(s, t) = \begin{cases} F_1(s, 2t) & \text{nếu } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F_2(s, 2t - 1) & \text{nếu } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Thật vậy,

$$+) F(s, 0) = F_1(s, 0) = \sigma(s),$$

$$+) F(s, 1) = F_2(s, 1) = \rho(s),$$

$$+) F(0, t) = x_0,$$

$$+) F(1, t) = x_1.$$

□

Bởi Mệnh đề 1.1.4, ta có thể xem xét các lớp tương đương của các con đường trong X theo quan hệ tương đương $\sim$. Mỗi lớp tương đương được gọi là một *lớp đồng luân* của không gian X . Ta ký hiệu lớp đồng luân của con đường $\sigma : I \longrightarrow X$ là $[\sigma]$.

Định nghĩa 1.1.5 ([2]). Cho σ là con đường từ x_0 và x_1 , τ là con đường từ x_1 và x_2 . Ta xác định một con đường ký hiệu $\sigma\tau$ bằng cách di chuyển dọc σ rồi di chuyển tiếp dọc τ , tức là

$$\sigma\tau(s) = \begin{cases} \sigma(2s) & \text{nếu } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \tau(2s - 1) & \text{nếu } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Ta nói $\sigma\tau$ là con đường nối hai con đường σ và τ trong X .

Bởi Mệnh đề 1.1.6, ta định nghĩa được phép nhân của hai lớp đồng luân như sau.

Định nghĩa 1.1.6 ([2]). Cho hai lớp đồng luân $[\sigma]$ và $[\tau]$ của hai con đường σ và τ trong X sao cho điểm cuối của σ trùng với điểm đầu của τ . *Phép nhân* hai lớp đồng luân $[\sigma]$ và $[\tau]$ được cho bởi

$$[\sigma].[\tau] := [\sigma\tau].$$

Định nghĩa 1.1.7 ([2]). Cho σ là con đường trong X với điểm đầu x_0 và điểm cuối x_1 .

- i) Con đường σ được gọi là *con đường đóng* tại x_0 nếu $x_0 = x_1$.
- ii) Con đường đóng σ tại x_0 được gọi là *tầm thường đồng luân* hay *co rút được (về một điểm)* nếu $\sigma \sim \varepsilon \text{ rel}\{0, 1\}$, trong đó ε là con đường hằng tại x_0 (nghĩa là $\varepsilon(s) = x_0, \forall s \in I$).

Chú ý rằng, để thuận tiện ta thường ký hiệu con đường hằng ε là x_0 .

1.1.2. Nhóm cơ bản của không gian tô pô

Cho X là không gian tô pô và $x_0 \in X$. Ký hiệu $\pi_1(X, x_0)$ là tập các lớp đồng luân của các con đường đóng tại x_0 .

Mệnh đề 1.1.8 ([2]). *Tập các lớp đồng luân $(\pi_1(X, x_0), .)$ của các con đường đóng tại x_0 là một nhóm, trong đó*

- i) *Phần tử trung hoà là lớp đồng luân của các con đường hằng tại x_0 .*

ii) Phần tử nghịch đảo của lớp đồng luân $[\sigma]$ là lớp đồng luân $[\sigma^{-1}]$, trong đó

$$\sigma^{-1} := \sigma(1 - s)$$

(nghĩa là di chuyển trên con đường σ theo chiều ngược lại).

Chứng minh. a) Phép nhân " $\cdot$ " có tính chất kết hợp vì

$$([\sigma] \cdot [\sigma']).[\sigma''] = [(\sigma\sigma')\sigma''] = [\sigma(\sigma'\sigma'')] = [\sigma] \cdot ([\sigma'] \cdot [\sigma'']),$$

trong đó dấu $=$ thứ nhất và thứ ba có được do định nghĩa phép nhân và dấu $=$ thứ hai có được do $(\sigma\sigma')\sigma'' \sim \sigma(\sigma'\sigma'')$ $rel\{0, 1\}$ bởi đồng luân

$$F(s, t) = \begin{cases} \sigma(\frac{4s}{1+t}) & \text{nếu } 0 \leq s \leq \frac{t+1}{4} \\ \sigma'(4s - t - 1) & \text{nếu } \frac{t+1}{4} \leq s \leq \frac{t+2}{4} \\ \sigma''(\frac{4s-2-t}{2-t}) & \text{nếu } \frac{t+2}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Thật vậy, tại các đầu mút F liên tục. Hơn nữa,

$$+) F(s, 0) = (\sigma\sigma')\sigma''(s),$$

$$+) F(s, 1) = \sigma(\sigma'\sigma'')(s),$$

$$+) F(0, t) = x_0,$$

$$+) F(1, t) = x_0,$$

b) Phần tử chung hoà là lớp đồng luân của con đường hằng tại x_0

$$\varepsilon : I \longrightarrow X$$

$$s \longmapsto \varepsilon(s) = x_0$$

Thật vậy, với mỗi con đường $\sigma : I \longrightarrow X$, ta có $\sigma\varepsilon : I \longrightarrow X$ xác định bởi

$$\sigma\varepsilon(s) = \begin{cases} \sigma(2s) & \text{nếu } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ x_0 & \text{nếu } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Do đó

$$\sigma\varepsilon \sim \sigma \text{ } rel\{0, 1\}$$

bởi

$$F(s, t) = \sigma((1-t)\psi(s) + st),$$

trong đó $\psi : I \longrightarrow X$ xác định bởi

$$\psi(s) = \begin{cases} 2s & \text{nếu } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{nếu } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

vì

$$+) F(s, 0) = \sigma(\psi(s)) = \begin{cases} \sigma(2s) & \text{nếu } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(1) = x_0 & \text{nếu } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = \sigma\varepsilon,$$

$$+) F(s, 1) = \sigma(s),$$

$$+) F(0, t) = \sigma((1-t)\psi(0)) = \sigma(0) = x_0,$$

$$+) F(1, t) = \sigma((1-t)\psi(1)) = \sigma(1) = x_0.$$

Mặt khác với mỗi con đường $\sigma : I \longrightarrow X$, ta có $\varepsilon\sigma : I \longrightarrow X$ xác định bởi

$$\varepsilon\sigma(s) = \begin{cases} x_0 & \text{nếu } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(2s-1) & \text{nếu } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Do đó

$$\varepsilon\sigma \sim \sigma \text{ rel}\{0, 1\}$$

bởi

$$F(s, t) = \sigma((1-t)\psi(s) + st),$$

trong đó $\psi : I \longrightarrow X$ xác định bởi

$$\psi(s) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 2s-1 & \text{nếu } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

vì

$$+) F(s, 0) = \sigma(\psi(s)) = \begin{cases} \sigma(1) = x_0 & \text{nếu } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(2s-1) & \text{nếu } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = \varepsilon\sigma,$$

$$+) F(s, 1) = \sigma(s),$$

$$+) F(0, t) = \sigma((1-t)\psi(0)) = \sigma(1) = x_0,$$

$$+) F(1, t) = \sigma((1-t)\psi(1)) = \sigma(1) = x_0.$$

Như vậy, do tính chất bắc cầu của $\sim$, ta có

$$\sigma\varepsilon \sim \varepsilon\sigma \text{ rel}\{0, 1\}$$

hay

$$[\sigma].[\varepsilon] \sim [\varepsilon].[\sigma].$$

c) Ta chứng minh $\sigma\sigma^{-1} \sim \varepsilon \text{ rel}\{0, 1\}$. Thật vậy ta có

$$\sigma\sigma^{-1}(s) = \begin{cases} \sigma(2s) & \text{nếu } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \sigma^{-1}(2s-1) = \sigma(2-2s) & \text{nếu } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Xét ánh xạ $F : I \times I \longrightarrow X$ sao cho

$$F(s, t) = \begin{cases} x_0 & \text{nếu } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(2s-t) & \text{nếu } \frac{t}{2} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ x_0 & \text{nếu } \frac{2-t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Tại các điểm đầu mút F liên tục. Hơn nữa,

$$+) F(s, 0) = \sigma\sigma^{-1}(s),$$

$$+) F(s, 1) = x_0 = \varepsilon(s),$$

$$+) F(0, t) = x_0,$$

$$+) F(1, t) = x_0.$$

Do đó $\sigma\sigma^{-1} \sim \varepsilon$ bởi đồng luân F . Tương tự, ta cũng có $\sigma^{-1}\sigma \sim \varepsilon$ và do đó

$$[\sigma].[\sigma^{-1}] = [\varepsilon] = [\sigma^{-1}].[\sigma].$$

□

Định nghĩa 1.1.9 ([2]). Cho X là không gian tô pô và $x_0 \in X$. Nhóm $\pi_1(X, x_0)$ được gọi là *nhóm cơ bản* của không gian tô pô X với điểm đánh dấu x_0 .

Chú ý rằng, tương tự chứng minh của mệnh đề trên, ta có bổ đề sau

Bổ đề 1.1.10. Cho không gian tô pô X . Khi đó

i) Nếu $\sigma, \sigma', \sigma''$ là các con đường trong X thì

$$(\sigma\sigma')\sigma'' \sim \sigma(\sigma'\sigma'') \text{ rel}\{0, 1\}$$

ii) Nếu σ là các con đường từ x_0 đến x_1 thì

$$x_0\sigma \sim \sigma \text{ rel}\{0, 1\} \text{ và } \sigma x_1 \sim \sigma \text{ rel}\{0, 1\}.$$

iii) Nếu σ là một con đường từ x_0 đến x_1 và σ^{-1} là một con đường từ x_1

đến x_0 cho bởi $\sigma^{-1} := \sigma(1 - s)$ (tức là di chuyển dọc σ theo chiều ngược lại) thì

$$\sigma\sigma^{-1} \sim x_0 \text{ rel}\{0, 1\} \text{ và } \sigma^{-1}\sigma x_1 \sim x_1 \text{ rel}\{0, 1\}.$$

Chú ý rằng nếu x_0 và x_1 thuộc thành phần liên thông khác nhau của X thì $\pi_1(X, x_0)$ và $\pi_1(X, x_1)$ không có mối quan hệ gì với nhau. Tuy nhiên, nếu x_0 và x_1 thuộc cùng thành phần liên thông của X , ta có kết quả sau.

Mệnh đề 1.1.11 ([2]). Cho x_0 và x_1 thuộc cùng một thành phần liên thông của X và α là con đường trong X từ x_0 đến x_1 . Khi đó, ta có đẳng cấu nhóm

$$\begin{aligned} \alpha_* : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_1) \\ [\alpha] &\longmapsto [\alpha^{-1}\sigma\alpha] \end{aligned}$$

Hơn nữa,

$$(\alpha_*)^{-1} = (\alpha^{-1})_*.$$

Chứng minh. Trước hết, ta thấy rằng nếu $\sigma \sim \tau \text{ rel}\{0, 1\}$ bởi đồng luân F thì $\alpha^{-1}\sigma\alpha \sim \alpha^{-1}\tau\alpha \text{ rel}\{0, 1\}$ bởi đồng luân

$$G_t(s) := (\alpha^{-1}F_t\alpha)(s).$$

Do vậy, định nghĩa α_* là thoả đáng.

Tiếp theo, ta có α_* là một đồng cấu nhóm. Thật vậy

$$\begin{aligned} \alpha_*([\sigma][\tau]) &= \alpha_*([\sigma\tau]) = [\alpha^{-1}(\sigma\tau)\alpha] = [(\alpha^{-1}\sigma\alpha)(\alpha^{-1}\tau\alpha)] \\ &= [\alpha^{-1}\sigma\alpha][\alpha^{-1}\tau\alpha] = \alpha_*[\sigma].\alpha_*[\tau]. \end{aligned}$$

Trong đó, các dấu = thứ 1, 2, 4, 5 có được là do định nghĩa của phép toán trong nhóm cơ bản và do định nghĩa về α_* , dấu = thứ 3 có được do

$$\alpha^{-1}(\sigma\tau)\alpha \sim \alpha^{-1}(\sigma x_0\tau)\alpha \sim \alpha^{-1}(\sigma(\alpha\alpha^{-1})\tau)\alpha \sim (\alpha^{-1}\sigma\alpha)(\alpha^{-1}\tau\alpha) \text{ rel}\{0, 1\}.$$

Bây giờ, α_* là toàn ánh. Thật vậy, với mỗi $[\sigma'] \in \pi_1(X, x_1)$, tồn tại $[\alpha\sigma'\alpha^{-1}] \in \pi_1(X, x_0)$ sao cho

$$\alpha_*([\alpha\sigma'\alpha^{-1}]) = [\alpha^{-1}\alpha\sigma'\alpha^{-1}\alpha] = [x_0\sigma'x_0] = [\sigma'].$$

Hơn nữa, α_* là đơn ánh. Thật vậy, nếu

$$\alpha_*([\sigma]) = \alpha_*([\tau]) \iff [\alpha^{-1}\sigma\alpha] = [\alpha^{-1}\tau\alpha]$$

hay $\alpha^{-1}\sigma\alpha \sim \alpha^{-1}\tau\alpha \text{ rel}\{0, 1\}$ bởi ánh xạ $F(t)$.

Đặt $G_t = \alpha^{-1}F_t\alpha$. khi đó, $\sigma \sim \tau \text{ rel}\{0, 1\}$ bởi ánh xạ G_t hay $[\sigma] = [\tau]$.

Vậy α_* là đẳng cấu nhóm và $(\alpha_*)^{-1} = (\alpha^{-1})_*$. $\square$

Hệ quả 1.1.12. *Nếu X liên thông đường, nhóm $\pi_1(X, x_0)$ không phụ thuộc vào việc chọn điểm đánh dấu x_0 và được kí hiệu là $\pi_1(X)$.*

Định nghĩa 1.1.13 ([2]). Cho X là không gian tô pô liên thông đường. Nhóm $\pi_1(X)$ được gọi là *nhóm cơ bản* của X .

Chú ý 1.1.14. Ta muốn xác định một hàm tử π_1 từ phạm trù các không gian tô pô đến phạm trù các nhóm. Tuy nhiên, vì $\pi_1(X, x_0)$ phụ thuộc vào việc chọn điểm đánh dấu x_0 nên ta đưa điểm đánh dấu vào trong phạm trù các không gian tô pô và ta có *phạm trù các không gian tô pô có điểm đánh dấu*. Phạm trù này gồm:

- Các vật là các không gian tô pô có điểm đánh dấu (X, x_0) .
- Các mũi tên là các ánh xạ cặp giữa các không gian tô pô có điểm đánh dấu $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ (nghĩa là $f : X \longrightarrow Y$ là ánh xạ liên tục $f(x_0) = y_0$).

Mệnh đề dưới đây chỉ ra rằng ta có một *hàm tử nhóm cơ bản* từ phạm trù các không gian tô pô có điểm đánh dấu đến phạm trù các nhóm.

Mệnh đề 1.1.15 ([2]). *Mỗi ánh xạ $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ cảm sinh một đồng cấu nhóm*

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ [\sigma] &\longmapsto [f \circ \sigma] \end{aligned}$$

Hơn nữa,

- i) $(id_X)_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$,
- ii) $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Chứng minh. Trước hết, định nghĩa f_* là thoả đáng và f_* là đồng cấu nhóm. Thật vậy, nếu $F_t : \sigma \sim \tau \text{ rel}\{0, 1\}$ thì

$$G_t := f \circ F_t : f \circ \sigma \sim f \circ \tau \text{ rel}\{0, 1\}$$

và

$$f_*([\sigma][\tau]) = f_*[\sigma\tau] = [f \circ (\sigma\tau)] = [(f \circ \sigma)(f \circ \tau)] = [f \circ \sigma][f \circ \tau] = f_*[\sigma]f_*[\tau].$$

Trong đó, các dấu $=$ thứ 1, 2, 4, 5 có được do định nghĩa của phép toán trong nhóm cơ bản và do định nghĩa f_* , dấu $=$ thứ 3 có được do

$$f \circ (\sigma\tau) \sim (f \circ \sigma)(f \circ \tau).$$

Hơn nữa

$$\text{i) } (id_X)_*[\sigma] = [id_X \circ \sigma] = [\sigma] = id_{\pi_1(X, x_0)}[\sigma],$$

$$\text{ii) } (g \circ f)_*[\sigma] = [(g \circ f) \circ \sigma] = [g \circ (f \circ \sigma)] = g_*[f \circ \sigma] = g_*(f_*[\sigma]) = g_* \circ f_*[\sigma]. \quad \square$$

Hệ quả 1.1.16. *Mỗi đồng phôi $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ cảm sinh một đẳng cấu nhóm*

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ [\sigma] &\longmapsto [f \circ \sigma] \end{aligned}$$

Mệnh đề 1.1.17. *Cho X, Y là các không gian tô pô và $x_0 \in X, y_0 \in Y$. Khi đó*

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Chứng minh. Kí hiệu các ánh xạ chiếu là

$$p_X : X \times Y \longrightarrow X, (x, y) \longmapsto x$$

$$p_Y : X \times Y \longrightarrow Y, (x, y) \longmapsto y$$

Các đồng cấu cảm sinh là

$$\begin{aligned} (p_X)_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ [(\sigma, \tau)] &\longmapsto [\sigma] \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} (p_Y)_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) &\longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ [(\sigma, \tau)] &\longmapsto [\tau] \end{aligned}$$

xác định đồng cấu

$$((p_X)_*, (p_Y)_*) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

cho bởi

$$((p_X)_*, (p_Y)_*)([\sigma, \tau]) \longmapsto ([\sigma], [\tau]).$$

Đồng cấu này là đẳng cấu. Thật vậy, giả sử $([\sigma], [\tau]) \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$. Khi đó, tồn tại $(\sigma, \tau) \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ với $(\sigma, \tau)(t) := (\sigma(t), \tau(t))$ sao cho

$$((p_X)_*, (p_Y)_*)([\sigma, \tau]) \longmapsto ([\sigma], [\tau]).$$

Hơn nữa, nếu

$$((p_X)_*, (p_Y)_*)([\sigma, \tau]) \longmapsto ([\sigma'], [\tau'])$$

thì $([\sigma], [\tau]) = ([\sigma'], [\tau'])$ và do đó $[\sigma] = [\sigma'], [\tau] = [\tau']$ hay $(\sigma, \tau) \sim (\sigma', \tau') \text{ rel } \{0, 1\}$ nghĩa là $(\sigma, \tau) \sim (\sigma', \tau')$. $\square$

1.2. ĐỒNG LUÂN CỦA CÁC ÁNH XẠ

Trong mục 1.1, ta biết rằng các con đường là các ánh xạ từ $I = [0, 1]$ vào không gian tô pô X . Do vậy, ta có thể thay thế I bởi một không gian tô pô Y và tập $\{0, 1\}$ bởi tập con $A \subset Y$ dẫn đến khái niệm đồng luân của các ánh xạ từ không gian tô pô Y vào không gian tô pô X , các tính chất của đồng luân các ánh xạ và mối liên hệ giữa đồng luân của các ánh xạ với đồng luân của các con đường.

1.2.1. Đồng luân của các ánh xạ

Định nghĩa 1.2.1 ([1]). Cho $f, g : Y \longrightarrow X$ là hai ánh xạ giữa không gian tô pô X và Y sao cho $f|_A = g|_A$. Ta nói rằng f và g là *đồng luân (với nhau)*, ký hiệu là

$$f \sim g \text{ rel } A$$

nếu tồn tại ánh xạ liên tục

$$\begin{aligned} F : Y \times I &\longrightarrow X \\ (y, t) &\longmapsto F(y, t) \end{aligned}$$

sao cho

1. $F(y, 0) = f(y), \forall y \in Y$
2. $F(y, 1) = g(y), \forall y \in Y$
3. $F(y, t) = f(y) = g(y) \forall y \in A, \forall t \in I$.

Trong trường hợp $A = \emptyset$ ta thường viết $f \sim g$.

Chú ý 1.2.2. Với mỗi $t \in I$, $F_t : Y \longrightarrow X, y \longmapsto F(y, t)$ là một ánh xạ từ Y vào X và $F_0 = f, F_1 = g$. Ta cũng viết $f \sim g \text{ rel } A$.

Mệnh đề 1.2.3 ([1]). Quan hệ đồng luân $\sim$ là một quan hệ tương đương trên tập các ánh xạ từ Y vào X , nghĩa là:

i) $f \sim f \text{ rel } A$

ii) Nếu $f \sim g \text{ rel } A$ thì $g \sim f \text{ rel } A$

iii) Nếu $f \sim g \text{ rel } A$ và $g \sim h \text{ rel } A$ thì $f \sim h \text{ rel } A$.

với f, g, h là các con ánh xạ từ Y vào X .

Chứng minh. Ta thấy $\sim$ có các tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Cụ thể là:

i) $f \sim f \text{ rel } A$ bởi

$$F(x, t) = f(x).$$

Thật vậy,

$$+) F(x, 0) = f(x), \forall x \in Y$$

$$+) F(x, 1) = f(x), \forall x \in Y$$

$$+) F(x, t) = f(x), \forall x \in A, \forall t \in I.$$

ii) Nếu $f \sim g \text{ rel } A$ bởi $F(s, t)$ thì $g \sim f \text{ rel } A$ bởi

$$\tilde{F}(x, t) = F(x, 1 - t).$$

Thật vậy,

$$+) \tilde{F}(x, 0) = F(x, 1) = g(x), \forall x \in Y$$

$$+) \tilde{F}(x, 1) = F(x, 0) = f(x), \forall x \in Y$$

$$+) \tilde{F}(x, t) = F(x, 1 - t) = f(x) = g(x), \forall x \in A, \forall t \in I.$$

iii) Nếu $f \sim g \text{ rel } A$ bởi $F_1(x, t)$ và $g \sim h \text{ rel } A$ bởi $F_2(x, t)$ thì $f \sim h \text{ rel } A$ bởi

$$F(x, t) = \begin{cases} F_1(x, 2t) & \text{nếu } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F_2(x, 2t - 1) & \text{nếu } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Thật vậy,

$$+) F(x, 0) = F_1(x, 0) = f(x), \forall x \in Y$$

$$+) F(x, 1) = F_2(x, 1) = h(x), \forall x \in Y$$

$$+) F(x, t) = f(x) = h(x), \forall x \in A, \forall t \in I.$$

□

Ví dụ 1.2.4. Cho $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, x \longmapsto 0$ và $g = id_{\mathbb{R}^n}$. Khi đó, $f \sim g$.

Thật vậy, xét ánh xạ $F : \mathbb{R}^n \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ cho bởi

$$F(x, t) = tx$$

Ta có $F(x, 0) = 0 = f(x)$ và $F(x, 1) = x = g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$. Do đó, $f \sim g$.

Bổ đề 1.2.5 ([1]). Cho ánh xạ $F : I \times I \longrightarrow X$. Giả sử rằng

$$\alpha(t) = F(0, t), \beta(t) = F(1, t), \gamma(s) = F(s, 0), \delta(s) = F(s, 1).$$

Khi đó

$$\delta \sim \alpha^{-1} \gamma \beta \text{ rel } \{0, 1\}.$$

Chứng minh. Ký hiệu $x_0 = \delta(0), x_1 = \delta(1)$. Ta có

$$\alpha^{-1} \sim x_0, \gamma \delta, \beta \sim x_1$$

bởi các đồng luân tương ứng là

$$E(s, t) = \begin{cases} x_0 & \text{nếu } s \leq t \\ \alpha(1 + t - s) & \text{nếu } s \geq t \end{cases}$$

và F và

$$G(s, t) = \begin{cases} \beta(t + s) & \text{nếu } 1 - s \geq t \\ x_1 & \text{nếu } 1 - s \leq t \end{cases}$$

Do đó

$$\alpha^{-1} \gamma \beta \sim x_0 \delta x_1 \text{ rel } \{0, 1\}$$

bởi đồng luân $E_t F_t G_t$. Vì $x_0 \delta x_1 \sim \delta \text{ rel } \{0, 1\}$ nên

$$\delta \sim \alpha^{-1} \gamma \beta \text{ rel } \{0, 1\}$$

.

□

Mệnh đề 1.2.6 ([1]). Cho $f, g : Y \longrightarrow X$ là hai ánh xạ đồng luân với nhau bởi đồng luân $F : Y \times I \longrightarrow X$. Giả sử $y_0 \in Y, x_0 = f(y_0), x_1 = g(y_0)$ và α là con đường trong X từ x_0 đến x_1 cho bởi

$$\alpha(t) := F(y_0, t).$$

Khi đó,

$$\alpha_* \circ f_* = g_*$$

Trường hợp riêng f_* là đẳng cấu khi và chỉ khi g_* là đẳng cấu.

Chứng minh. Lấy $[\sigma] \in \pi_1(Y, y_0)$. Khi đó, $f \circ \sigma \sim g \circ \sigma$ bởi đồng luân

$$\begin{aligned} G : I \times I &\longrightarrow X \\ (s, t) &\longmapsto G(s, t) := F(\sigma(s), t) \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} G(0, t) &= F(\sigma(0), t) = F(y_0, t) = \alpha(t) \\ G(1, t) &= F(\sigma(1), t) = F(y_0, t) = \alpha(t) \\ G(s, 0) &= F(\sigma(s), 0) = f(\sigma(s)) = (f \circ \sigma)(s) \\ G(s, 1) &= F(\sigma(s), 1) = g(\sigma(s)) = (g \circ \sigma)(s). \end{aligned}$$

Ta áp dụng bổ đề 1.2.5 để nhận được

$$g \circ \sigma \sim \alpha^{-1}(f \circ \sigma) \alpha \text{ rel } \{0, 1\}$$

nghĩa là

$$(\alpha_* \circ f_*)[\sigma] = g_*[\sigma].$$

Cuối cùng, bởi mệnh đề 1.2.6 ta có α_* là đẳng cấu nhóm. Từ đó, dễ thấy rằng f_* là đẳng cấu khi và chỉ khi g_* là đẳng cấu. $\square$

Hệ quả 1.2.7. Cho $f, g : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$. Khi đó, $f \sim g \text{ rel } \{y_0\}$ thì $f_* = g_*$.

Sau đây chúng tôi trình bày nhóm cơ bản của một số không gian tô pô đặc biệt.

1.2.2. Không gian co rút được

Định nghĩa 1.2.8 ([1]). i) Cho $f : X \longrightarrow Y$ là một ánh xạ liên tục. Ta nói rằng f là một *tương đương đồng luân* nếu tồn tại ánh xạ liên tục $g : Y \longrightarrow X$ sao cho $g \circ f \sim id_X$ và $f \circ g \sim id_Y$.

ii) Hai không gian tô pô X và Y được gọi là *tương đương đồng luân* nếu tồn tại một tương đương đồng luân $f : X \longrightarrow Y$.

Chú ý rằng quan hệ tương đương đồng luân giữa các không gian tô pô là các quan hệ tương đương trên tập các không gian tô pô.

Ví dụ 1.2.9. Mỗi đồng phôi $f : X \longrightarrow Y$ là một tương đương đồng luân.

Chứng minh. Thật vậy, do f là đồng phôi nên f song ánh và f^{-1} liên tục nên $f \circ f^{-1} = Id_Y$ và $f^{-1} \circ f = Id_X$. $\square$

Mệnh đề 1.2.10. Cho $f : Y \longrightarrow X$ là một tương đương đồng luân. Khi đó với mỗi $y_0 \in Y$

$$f_* : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(X, f(y_0))$$

là một đẳng cấu nhóm.

Chứng minh. Theo giả thiết, tồn tại $g : X \longrightarrow Y$ sao cho

$$g \circ f \sim id_Y, f \circ g \sim id_X.$$

Vì $(id_Y)_* = id_{\pi_1(Y, y_0)}$ và $(id_X)_* = id_{\pi_1(X, f(y_0))}$ là các đẳng cấu nên theo Mệnh đề 1.2.6 và tính chất hàm tử ta có

$$g_* \circ f_* = f_* \circ g_*$$

cũng là các đẳng cấu nhóm. Do vậy, f_* là một đẳng cấu nhóm. $\square$

Định nghĩa 1.2.11 ([1]). Không gian tô pô X được gọi là co rút được nếu tồn tại điểm $x_0 \in X$ sao cho x_0 tương đương đồng luân với X .

Mệnh đề 1.2.12 ([1]). Cho X là một không gian tô pô. Khi đó, các khẳng định sau tương đương.

i) Không gian X là co rút được.

ii) $id_X \sim$ ánh xạ hằng.

iii) Với Y là không gian tô pô bất kỳ, hai ánh xạ bất kỳ $f, g : Y \longrightarrow X$ là tương đương đồng luân.

Chứng minh. (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Giả sử $X \sim \{x_0\}$. Khi đó, tồn tại $f : X \longrightarrow x_0$ và $f' : x_0 \longrightarrow X$ sao cho $f \circ f' \sim id_{\{x_0\}}$ và $f' \circ f \sim id_X$.

Mặt khác: $f' \circ f(x) = f'(x_0) = x_1, \forall x \in X$ nên $f' \circ f$ là ánh xạ hằng. Do vậy, ta có (ii).

Ngược lại, giả sử $id_X \sim x_0$. Xét

$$f : X \longrightarrow \{x_0\}, x \longmapsto x_0,$$

và

$$f' : \{x_0\} \longrightarrow X, x_0 \longmapsto x_0,$$

ta có

$$f \circ f' = id_{\{x_0\}} \text{ và } f' \circ f = x_0 \sim id_X.$$

nên $X \sim x_0$ suy ra X là co rút được.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Giả sử $id_X \sim x_0$, bởi đồng luân $F : X \times I \longrightarrow X$, nghĩa là

$$F(x, 0) = x, F(x, 1) = x_0 \text{ với mọi } x \in X.$$

Do quan hệ đồng luân $\sim$ có tính chất bắc cầu, ta chỉ cần chứng tỏ rằng với Y bất kỳ và $f : Y \longrightarrow X$ bất kỳ, ta có $f \sim x_0$. Thật vậy, xét ánh xạ

$$\begin{aligned} G : Y \times I &\longrightarrow X \\ (y, t) &\longmapsto G(y, t) = F(f(y), t) \end{aligned}$$

Ta có

$$G(y, 0) = F(f(y), 0) = f(y) \text{ và } G(y, 1) = F(f(y), 1) = x_0$$

Khẳng định trên cùng với tính chất bắc cầu của $\sim$, ta có (iii).

Khẳng định ngược lại là hiển nhiên bởi chọn $Y = X, f = id_X$ và $g = x_0$. $\square$

Hệ quả 1.2.13. Cho X là một không gian tô pô. Khi đó, các khẳng định sau tương đương.

- i) $X \sim x_0$ với mỗi $x_0 \in X$.
- ii) $id_X \sim x_0$ với mỗi $x_0 \in X$.
- iii) Với Y là không gian tô pô bất kỳ, hai ánh xạ bất kỳ $f, g : Y \longrightarrow X$ là tương đương đồng luân.

Chứng minh. Hệ quả được kéo theo trực tiếp từ chứng minh của Mệnh đề 1.2.12. $\square$

Ví dụ 1.2.14. Các tập lồi trong không gian Euclide đều co rút được (chẳng hạn $\mathbb{R}^n, \mathbb{B}^n, \dots$).

Chứng minh. Thật vậy, giả sử X là một tập lồi. Khi đó, xét ánh xạ

$$\begin{aligned} F : X \times [0, 1] &\longrightarrow X \\ (x, t) &\longmapsto tx + (1 - t)x_0 \end{aligned}$$

Ta có

$$F(x, 0) = x_0 \text{ và } F(x, 1) = x = id_X(x).$$

Do vậy, $id_X \sim x_0$ bởi đồng luân F . Theo Mệnh đề 1.2.12 suy ra X là co rút được. $\square$

Mệnh đề 1.2.15 ([1]). Giả sử X là không gian co rút được. Khi đó,

- i) X là liên thông đường
- ii) $\pi_1(X) = 0$.

Chứng minh. (i) Lấy $x_0, x_1 \in X$ và gọi $F : X \times I \longrightarrow X$ là đồng luân giữa ánh xạ hằng tại x_0 và ánh xạ đồng nhất id_X . Ta có

- $F(x, 0) = x_0$ với mọi $x \in X$,
- $F(x, 1) = x$ với mọi $x \in X$.

Xét con đường trong X cho bởi

$$\begin{aligned}\rho : I &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \rho(t) := F(x_1, t)\end{aligned}$$

Ta có ρ là một đường cong liên tục nối hai điểm

$$\rho(0) = F(x_1, 0) = x_0 \text{ và } \rho(1) = F(x_1, 1) = x_1.$$

Vậy X liên thông đường.

(ii) Vì X co rút được nên theo Mệnh đề 1.2.12, ta có

$$F : X \sim id_X.$$

Lấy $\sigma : I \longrightarrow X$ là một con đường đóng tại x_0 trong X và xét ánh xạ

$$\begin{aligned}G : I \times I &\longrightarrow X \\ (s, t) &\longmapsto G(s, t) := F(\sigma(s), t)\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}G(0, t) &= F(\sigma(0), t) = F(x_0, t) = \alpha(t), \\ G(1, t) &= F(\sigma(1), t) = F(x_0, t) = \alpha(t), \\ G(s, 0) &= F(\sigma(s), 0) = x_0, \\ G(s, 1) &= F(\sigma(s), 1) = \sigma(s).\end{aligned}$$

Ta áp dụng Bổ đề 1.2.5 để nhận được

$$\sigma \sim \alpha^{-1}x_0\alpha \text{ rel } \{0, 1\}$$

nghĩa là $\sigma \sim x_0 \text{ rel } \{0, 1\}$ hay $[\sigma] = 0$. Vậy $\pi_1(X) = 0$. □

1.2.3. Không gian đơn liên

Định nghĩa 1.2.16 ([1]). Không gian tô pô X được gọi là đơn liên nếu X liên thông đường và nhóm cơ bản $\pi_1(X)$ là tầm thường.

Bởi Mệnh đề 1.2.15 ta có kết quả sau.

Hệ quả 1.2.17. *Nếu không gian X là co rút được thì X đơn liên.*

Ví dụ 1.2.18. Siêu cầu $\mathbb{S}^n$ là đơn liên $n \geq 2$.

Chứng minh. Đặt

$$X_1 = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}, X_2 = \mathbb{S}^n \setminus \{S\},$$

trong đó $N = (0, \dots, 0, 1)$ và $S = (0, \dots, 0, -1)$. Khi đó, X_1 và X_2 đơn liên. (Do $\mathbb{R}^n$ đơn liên theo Ví dụ 1.2.14 và Hệ quả 1.2.17). Hơn nữa,

$$X_0 = X_1 \cap X_2$$

là đồng phôi với $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ nên liên thông $n \geq 2$.

Lấy $[\sigma] \in \pi_1(\mathbb{S}^n, x_0)$ với $x_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Xét một phân hoạch của $[0, 1]$ là

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = 1,$$

và xét các con đường σ_i trong $\mathbb{S}^n$ từ $\sigma(t_i)$ đến $\sigma(t_{i+1})$, $i = 0, \dots, m$ cho bởi

$$\begin{aligned} \sigma_i : I &\longrightarrow \mathbb{S}^n \\ t &\longmapsto \sigma_i(t) = \sigma(t_i + t(t_{i+1} - t_i)) \end{aligned}$$

Theo bổ đề Lơ be, ta có thể chọn một phân hoạch của $[0, 1]$ sao cho

$$\sigma_i(0) = \sigma_i(t_i) \in X_0, \sigma_i(I) = \sigma([t_i, t_{i+1}]) \subset X_1 \text{ hoặc } X_2.$$

Vì X_0 liên thông đường nên tồn tại các con đường τ_i trong X_0 nối x_0 với $\sigma_i(0) = \sigma_i(t_i)$, $i = 1, \dots, m$. Khi đó,

$$[\sigma] = [\sigma_0 \tau_1^{-1}] [\tau_1 \sigma_1 \tau_2^{-1}] \dots [\tau_{m-1} \sigma_{m-1} \tau_m^{-1}] [\tau_m \sigma_m] = 0$$

Vì các con đường tương ứng đều là các con đường đóng tại x_0 và nằm trong X_1 hoặc X_2 nên chúng đồng luân với con đường hằng x_0 . $\square$

Bởi Ví dụ 1.2.18, siêu cầu $\mathbb{S}^n$ là đơn liên với $n \geq 2$. Tuy nhiên, siêu cầu $\mathbb{S}^n$ không co rút được.

Mệnh đề 1.2.19 ([1]). Cho X là một không gian tô pô liên thông đường. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương.

i) Không gian X là đơn liên.

ii) Nếu σ và τ là các con đường trong X có chung điểm đầu và chung điểm cuối thì $\sigma \sim \tau \text{ rel } \{0, 1\}$.

Chứng minh. Giả sử X đơn liên và σ và τ là các con đường trong X có chung điểm đầu x_0 và điểm cuối x_1 . Khi đó, $\sigma\tau^{-1}$ là con đường đóng tại x_0 . Vì X đơn liên nên $\pi_1(X, x_0) = 0$ và do đó

$$\sigma\tau^{-1} \sim x_0 \text{ rel } \{0, 1\}.$$

Từ đó suy ra

$$\sigma \sim \tau \text{ rel } \{0, 1\}.$$

Như vậy, ta có $i \Rightarrow ii$. □

1.2.4. Cái co rút, co rút lân cận, co rút biến dạng, co rút biến dạng mạnh

Định nghĩa 1.2.20 ([1]). Cho X là một không gian tô pô và $A \subset X$.

i) A được gọi là một cái co rút của X nếu tồn tại ánh xạ liên tục $r : X \longrightarrow A$ sao cho $r \circ i = id_A$ (hay $r|_A = id_A$ ở đây $i : A \longrightarrow X$ là ánh xạ nhúng chính tắc).

ii) A được gọi là một co rút lân cận của X nếu tồn tại lân cận của tập A sao cho A là cái co rút lân cận của lân cận đó.

Chú ý rằng, nếu A là một co rút của X thì A là một co rút lân cận của X . Ví dụ sau đây chỉ ra rằng, điều ngược lại không đúng.

Ví dụ 1.2.21. Cho $X = [0, 1]$ và $A = \{0, 1\}$. Khi đó,

i) A là cái co rút lân cận của X

ii) A không là cái co rút của A .

Chứng minh. i) Ta có $X' = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ là một lân cận của A trong X . Hơn nữa, A là một cái co rút của X' vì tồn tại ánh xạ

$$r : X' \longrightarrow A$$

xác định bởi

$$r(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{nếu } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

thoả mãn $r \circ i = id_A$. Vậy A là cái co rút lân cận của X .

ii) Giả sử ngược lại rằng A là cái co rút của X . Khi đó, tồn tại ánh xạ liên tục $r : X \longrightarrow A$ sao cho $r \circ i = id_A$. Do đó, $r(X) = A$.

Điều này kéo theo ảnh của tập liên thông $X = [0, 1]$ qua ánh xạ liên tục r là $A = \{0, 1\}$ phải liên thông. Mâu thuẫn này chỉ ra rằng A không là cái co rút của X . □

Định nghĩa 1.2.22 ([1]). Cho X là một không gian tô pô và $A \subset X$.

i) A được gọi là một cái co rút biến dạng của X nếu tồn tại một ánh xạ

liên tục $r : X \longrightarrow A$ sao cho $r \circ i = id_A$ và $i \circ r \sim id_X$, ở đây $i : A \longrightarrow X$ là ánh xạ nhúng chính tắc.

ii) A được gọi là một co rút biến dạng mạnh của X nếu tồn tại một ánh xạ liên tục $r : X \longrightarrow A$ sao cho $i \circ r \sim id_X \text{ rel } A$.

Mệnh đề 1.2.23 ([1]). Cho $A \subset X$. Khi đó,

- i) Nếu A là một co rút biến dạng của X thì A là một cái co rút của X .
- ii) Nếu A là một co rút biến dạng mạnh của X thì A là một co rút biến dạng của X .

Chứng minh. i) Hiển nhiên.

ii) Nếu A là một co rút biến dạng mạnh của X thì tồn tại một ánh xạ liên tục $r : X \longrightarrow A$ sao cho $i \circ r \sim id_X \text{ rel } A$.

Do vậy, $i \circ r \sim id_X$.

Hơn nữa, tồn tại đồng luân $F : X \times I \longrightarrow X$ sao cho

- $F(x, 0) = (i \circ r)(x) = r(x)$ với mọi $x \in X$
- $F(x, 1) = id_X(x) = x$ với mọi $x \in X$
- $F(x, t) = x$ với mọi $x \in A$ và với mọi $t \in I$.

Do đó, với mỗi $x \in A$, ta có $r(x) = F(x, 0) = x$. Vậy $r \circ i = id_A$. $\square$

Ví dụ sau chỉ ra rằng, điều ngược lại của Mệnh đề 1.2.23 ii) là không đúng.

Ví dụ 1.2.24. Cho $X = \mathbb{B}_1^n \cup (\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}_2^n)$ và $A = \{0\}$. Khi đó,

- i) A là một cái co rút của X
- ii) A không là một co rút biến dạng của X .

Chứng minh. i) Vì ánh xạ liên tục

$$\begin{aligned} r : X &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

thỏa mãn $r \circ i = 0 = id_A$ nên A là một cái co rút của X .

ii) Giả sử điều ngược lại A là một co rút biến dạng của X . Khi đó, tồn tại ánh xạ liên tục

$$\begin{aligned} r : X &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

thoả mãn $r \circ i = 0 = id_A$ và $i \circ r \sim id_X$. Do đó, $0 = i \circ r \sim id_X$.

Bởi Mệnh đề 1.2.12, suy ra X co rút được. Theo Mệnh đề 1.2.15, X liên thông đường.

Khi đó, tồn tại đường cong

$$\rho : [0, 1] \longrightarrow X$$

sao cho $\rho(0) = 0, \rho(1) = (2, 0, \dots, 0)$. Do đó, hàm khoảng cách

$$\begin{aligned} \|\rho\| : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \|\rho(t)\| \end{aligned}$$

là liên tục. Điều này cùng với thực tế rằng $\|\rho(0)\| = 0$ và $\|\rho(1)\| = 2$ suy ra tồn tại $t_0 \in [0, 1]$ sao cho $\|\rho(t_0)\| = \frac{3}{2}$ tức là $\rho(t_0) \notin X$. Mâu thuẫn này chỉ ra rằng A không là một co rút biến dạng của X . $\square$

Ví dụ 1.2.25. $\mathbb{S}^{n-1}$ là một co rút biến dạng mạnh của $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Chứng minh. Đặt

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\ x &\longmapsto \frac{x}{\|x\|} \end{aligned}$$

Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ (x, t) &\longmapsto (1 - t)x + t \frac{x}{\|x\|} \end{aligned}$$

Ta có

- $F(x, 0) = x = id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- $F(x, 1) = \frac{x}{\|x\|} = i \circ r(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- $F(x, t) = x = id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}(x) = i \circ r(x)$ với mọi $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ và với mọi $t \in I$.

Do vậy, $i \circ r \sim id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ rel $\mathbb{S}^{n-1}$ bởi đồng luân F . Vậy $\mathbb{S}^{n-1}$ là một co rút biến dạng mạnh của $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. $\square$

Ví dụ 1.2.26. $\mathbb{S}^{n-1}$ là một co rút biến dạng mạnh của $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$

Chứng minh. Đặt

$$r : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$$

$$x \longmapsto \frac{x}{\|x\|}$$

Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} F : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \\ (x, t) &\longmapsto (1 - t)x + t \frac{x}{\|x\|} \end{aligned}$$

Ta có

- $F(x, 0) = x = id_{\mathbb{B}^n \setminus \{0\}}(x)$ với mọi $x \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$
- $F(x, 1) = \frac{x}{\|x\|} = i \circ r(x)$ với mọi $x \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$
- $F(x, t) = x = id_{\mathbb{B}^n \setminus \{0\}}(x) = i \circ r(x)$ với mọi $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ và với mọi $t \in I$.

Do vậy, $i \circ r \sim id_{\mathbb{B}^n \setminus \{0\}}$ rel $\mathbb{S}^{n-1}$ bởi đồng luân F . Vậy $\mathbb{S}^{n-1}$ là một co rút biến dạng mạnh của $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. $\square$

Mệnh đề 1.2.27. Cho X là một không gian tô pô. Khi đó, các khẳng định sau tương đương.

- i) Không gian X là co rút được.
- ii) Mỗi $x_0 \in X$ là một co rút biến dạng của X .
- iii) Tồn tại $x_0 \in X$ là một co rút biến dạng của X .

Chứng minh. Giả sử X co rút được. Bởi Hệ quả 1.2.13, với mỗi $x_0 \in X$ ta có $id_X \sim x_0$.

Điều này có nghĩa là với mỗi $x_0 \in X$, ánh xạ hằng $r : X \longrightarrow \{x_0\}$ thoả mãn $i \circ r \sim id_X$, vì $i \circ r = x_0$. Như vậy, x_0 là một co rút biến dạng của X . $\square$

Chương 2

NHÓM CƠ BẢN CỦA ĐƯỜNG TRÒN VÀ ỨNG DỤNG

Chúng tôi nghiên cứu đường tròn $\mathbb{S}^1$ qua đường thẳng $\mathbb{R}$. Chúng tôi chỉ ra rằng lớp đồng luân của một con đường đóng được xác định bởi số lần quay của con đường (gọi là số quay của con đường). Chú ý rằng, số quay là âm nếu con đường quay ngược với hướng của đường tròn. Để chỉ ra được điều đó trước tiên chúng tôi phát biểu và chứng minh hai bổ đề quan trọng là bổ đề nâng và bổ đề đồng luân.

2.1. TÍNH NHÓM CƠ BẢN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Ta có $\mathbb{S}^1$ là nhóm các số phức có mô đun bằng 1 với phép nhân thông thường của hai số phức và

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\longmapsto \phi(x) = e^{2\pi i x}\end{aligned}$$

là một đồng cấu nhóm với phép toán trên $\mathbb{R}$ là phép cộng thông thường. Hơn nữa

- ϕ còn là ánh xạ mở do đó

$$\phi : \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$$

là một đồng phôi và ta gọi ψ là ánh xạ ngược của ánh xạ này.

- $\text{Ker}\phi = \mathbb{Z}$.

Bổ đề 2.1.1 ([2], Bổ đề nâng). *Nếu σ là một con đường trong $\mathbb{S}^1$ với điểm đầu 1 thì tồn tại duy nhất một con đường σ' trong $\mathbb{R}$ với điểm đầu 0 sao cho*

$$\phi \circ \sigma' = \sigma$$

trong đó σ' là con đường nâng của σ bởi ϕ với điểm đầu 0.

Chứng minh. Vì I compact nên $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{S}^1$ liên tục đều. Do đó, tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho

$$|s - s'| < \varepsilon \Rightarrow |\sigma(s) - \sigma(s')| < 1$$

nói riêng $\sigma(s) \neq -\sigma(s')$ suy ra $\frac{\sigma(s)}{\sigma(s')} \neq 1$ và do đó xác định được $\psi(\sigma(s)/\sigma(s'))$. Hơn nữa, ta có thể chọn được N đủ lớn sao cho $s < N\varepsilon$ với mọi $s \in I$.

Do vậy ta xác định được ánh xạ

$$\begin{aligned}\sigma'(s) = & \psi\left(\sigma(s)/\sigma\left(\frac{N-1}{N}s\right)\right) + \psi\left(\sigma\left(\frac{N-1}{N}\right)/\sigma\left(\frac{N-2}{N}s\right)\right) \\ & + \dots + \psi\left(\sigma\left(\frac{1}{N}s\right)/\sigma(0)\right)\end{aligned}$$

Khi đó, $\sigma' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ liên tục, $\sigma'(0) = 0$ và $\phi \circ \sigma' = \sigma$.

Giả sử tồn tại $\sigma'' : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $\sigma''(0) = 0$ và $\phi \circ \sigma'' = \sigma$. Khi đó,

$$\sigma' - \sigma'' : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

là ánh xạ liên tục và

$$\phi \circ (\sigma' - \sigma'')(s) = \frac{\phi \circ \sigma'(s)}{\phi \circ \sigma''(s)} = \frac{\sigma(s)}{\sigma(s)} = 1$$

Do vậy

$$(\sigma' - \sigma'')(s) \in \text{Ker}(\phi) = \mathbb{Z} \text{ với mọi } s \in I.$$

Điều này cùng với thực tế là I liên thông, ta có $\sigma' - \sigma''$ là hàm hằng và $\sigma' - \sigma'' = 0$. Vậy $\sigma' = \sigma''$. $\square$

Bổ đề 2.1.2 ([2], Bổ đề đồng luân). *Nếu σ và τ là hai con đường trong $\mathbb{S}^1$ với điểm đầu 1 sao cho*

$$F : \sigma \sim \tau \text{ rel } \{0, 1\}$$

thì tồn tại duy nhất $F' : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$F' : \sigma' \sim \tau' \text{ rel } \{0, 1\}$ và $\phi \circ F' = F$ trong đó σ' và τ' là con đường nâng của σ bởi ϕ với điểm đầu 0.

Chứng minh. Vì $I \times I$ compact nên $\sigma : I \times I \longrightarrow \mathbb{S}^1$ liên tục đều. Do đó, tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho

$$|(s, t) - (s', t')| < \varepsilon \Rightarrow |F(s, t) - F(s', t')| < 1$$

nói riêng $F(s, t) \neq -F(s', t')$ suy ra $\frac{F(s, t)}{F(s', t')} \neq 1$ và do đó xác định được

$$\psi\left(\frac{F(s, t)}{F(s', t')}\right).$$

Hơn nữa, ta có thể chọn được N đủ lớn sao cho

$$|(s, t)| < N\varepsilon \text{ với mọi } (x, t) \in I \times I.$$

Do vậy ta xác định được ánh xạ

$$F'(s, t) = \psi \left(F(s, t) / F \left(\frac{N-1}{N}(s, t) \right) \right) + \\ + \psi \left(F \left(\frac{N-1}{N}(s, t) \right) / F \left(\frac{N-2}{N}(s, t) \right) \right) + \dots + \psi \left(F \left(\frac{1}{N}(s, t) \right) / F(0) \right)$$

Khi đó, $\sigma' : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ liên tục, $F(0, 0) = 0$ và $\phi \circ F' = F$.

Vì $\phi \circ F'(s, 0) = F(s, 0) = \sigma(s)$ và $\phi \circ F'(s, 1) = F(s, 1) = \tau(s)$ nên theo bổ đề nâng ta có

$$\sigma'(s) = F'(s, 0), \tau'(s) = F'(s, 1)$$

Do đó $F' : \sigma' \sim \tau'$. Ta sẽ chỉ ra rằng

$$F' : \sigma' \sim \tau' \text{ rel } \{0, 1\}$$

Thật vậy, vì $(\phi \circ F')(0 \times I) = F(0 \times I) = 1$ nên $F'(0 \times I) \subset \text{Ker}(\phi) = \mathbb{Z}$

Điều đó cùng với $0 \times I$ liên thông, ta có

$$F'(0 \times I) = F'(0, 0) = 0.$$

Tương tự ta cũng có

$$F'(1 \times I) = F'(1, 0) = \text{const.}$$

Giả sử tồn tại $F'' : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$, $F'' : \sigma' \sim \tau' \text{ rel } \{0, 1\}$ và $\phi \circ F'' = F$. Khi đó, $F'(0, 0) = \sigma'(0) = 0$ và $\phi \circ \sigma'' = \sigma$. Hơn nữa

$$F' - F'' : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

là ánh xạ liên tục và

$$\phi \circ (F' - F'')(s, t) = \frac{\phi \circ F'(s, t)}{\phi \circ F''(s, t)} = \frac{F(s)}{F(s)} = 1$$

Do vậy

$$(F' - F'')(s, t) \in \text{Ker}(\phi) = \mathbb{Z} \text{ với mọi } (s, t) \in I \times I.$$

Điều này cùng với $I \times I$ liên thông, ta có $F' - F''$ là hàm hằng và $F' - F'' = 0$. Vậy $F' = F''$. $\square$

Hệ quả 2.1.3 ([2]). Điểm cuối của σ' phụ thuộc vào lớp đồng luân của σ .

Sau đây chúng tôi trình bày định lí quan trọng nhất của đề tài về nhóm cơ bản của đường tròn.

Định lý 2.1.4 ([2]). $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$.

Chứng minh. Bởi Hệ quả 2.1.3, ta định nghĩa được ánh xạ

$$\begin{aligned}\mu : \pi_1(\mathbb{S}^1) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [\sigma] &\longmapsto \sigma'(1)\end{aligned}$$

Trước hết, ta chỉ ra rằng μ là một đồng cấu. Thật vậy, với $[\sigma], [\tau] \in \pi_1(\mathbb{S}^1)$ ta đặt $m = \sigma'(1), n = \tau'(1)$. Gọi τ'' là con đường trong $\mathbb{R}$ từ m đến $m + 1$ cho bởi

$$\tau''(s) = \tau'(s) + m$$

Khi đó τ'' có điểm đầu là m và điểm cuối là $m + n$.

Vì

$$\sigma'\tau''(s) = \begin{cases} \sigma'(2s) & \text{nếu } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \tau''(2s - 1) & \text{nếu } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

nên

$$\begin{aligned}\sigma \circ (\sigma'\tau'')(s) &= e^{2\pi i(\sigma'\tau'')(s)} = \begin{cases} e^{2\pi i\sigma'(2s)} & \text{nếu } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ e^{2\pi i\tau''(2s-1)} & \text{nếu } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^{2\pi i\sigma'(s)} & \text{nếu } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ e^{2\pi i\tau''(2s-1)} & \text{nếu } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (\phi \circ \sigma')(2s) & \text{nếu } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ (\phi \circ \tau')(2s - 1) & \text{nếu } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sigma(2s) & \text{nếu } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \tau(2s - 1) & \text{nếu } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \\ &= (\sigma\tau)(s).\end{aligned}$$

Vậy $\sigma'\tau''$ là con đường nâng của con đường $\sigma\tau$ với điểm đầu 0 và điểm cuối là $m + n$. Do vậy

$$\mu([\sigma] \cdot [\tau]) = m + n = \mu([\sigma]) + \mu([\tau]).$$

Tiếp theo ta chỉ ra μ là toàn cấu. Thật vậy, với mỗi $n \in \mathbb{Z}$, tồn tại

$$\sigma = \phi \circ \sigma' : I \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

với

$$\begin{aligned}\sigma' : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto \sigma'(s) = ns\end{aligned}$$

sao cho $\mu([\sigma]) = n$.

Cuối cùng ta chứng tỏ rằng μ là đơn cấu. Thật vậy, giả sử $\mu([\sigma]) = 0$. Khi đó, σ' là con đường đóng trong $\mathbb{R}$ tại 0. Vì $\mathbb{R}$ là co rút được nên $\sigma' \sim 0 \text{ rel } \{0, 1\}$.

Do đó, $\phi \circ \sigma' \sim \phi \circ 0 \text{ rel } \{0, 1\}$ hay $\sigma \sim 1 \text{ rel } \{0, 1\}$ nghĩa là $[\sigma] = 1$. $\square$

Hệ quả 2.1.5 ([2]). *Nhóm cơ bản của xuyên là $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

Chứng minh. Vì xuyên là không gian tô pô đồng phôi với không gian tích $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Bởi Mệnh đề 1.1.17 nên ta có

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, (1, 1)) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \times \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

$\square$

Định nghĩa 2.1.6 ([2]). Không gian G được gọi là một nhóm tô pô nếu G là một nhóm và là một không gian tô pô sao cho các ánh xạ

$$G \times G \longrightarrow G, (a, b) \longmapsto ab$$

và

$$G \longrightarrow G, a \longmapsto a^{-1}$$

là liên tục.

Chú ý 2.1.7. Trong các chứng minh trên, ta sử dụng đến các tính chất sau:

- $\mathbb{S}^1$ là nhóm tô pô, thương của $\mathbb{R}$ chia cho $\mathbb{Z}$
- $\mathbb{R}$ là nhóm tô pô đơn liên
- $\mathbb{Z}$ là nhóm con rời rạc của $\mathbb{R}$

Do vậy ta nhận được kết quả cho trường hợp tổng quát hơn với chứng minh hoàn toàn tương tự.

Định lý 2.1.8. Nếu G là nhóm tô pô đơn liên và $H \subset G$ là nhóm con chuẩn tắc rời rạc thì

$$\pi_1(G/H) = H$$

Chứng minh. Xét đồng cầu liên tục

$$\begin{aligned}\phi : G &\longrightarrow G/H \\ a &\longmapsto \bar{a}\end{aligned}$$

Ta chứng minh khẳng định sau: Tồn tại một lân cận V trong G sao cho

$$\phi|_V : V \longrightarrow \phi(V)$$

là một đồng phôi vào lân cận $\phi(V)$ của 1 trong G/H .

Thật vậy, vì H rời rạc nên tồn tại lân cận mở U của 1 sao cho

$$U \cap H = \{1\}$$

Do tính liên tục của ánh xạ

$$\begin{aligned}G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longmapsto ab^{-1}\end{aligned}$$

tồn tại lân cận mở $V \subset U$ của 1 sao cho $g(V \times V) \subset U$. Khi đó

$$\begin{aligned}\phi|_V : V &\longrightarrow G/H \\ a &\longmapsto \bar{a}\end{aligned}$$

là đơn ánh (nếu $\bar{a} = \bar{b}$ với $a, b \in V$ thì $ab^{-1} \in H \cap U = \{1\}$ do đó $ab^{-1} = 1$ hay $a = b$) và do đó nó là đồng phôi lên ảnh. Điều này có nghĩa là

$$\phi|_V : V \longrightarrow \phi(V)$$

là một đồng phôi hay $\phi|_V$ là một lân cận mở của 1 trong G/H .

Phần còn lại của chứng minh là tương tự chứng minh của Định lý 2.1.4. $\square$

2.2. ỨNG DỤNG NHÓM CƠ BẢN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Trong phần này chúng tôi đưa ra ứng dụng của Định lý 2.1.4 và được xem như một ví dụ minh họa cho phương pháp tô pô đại số (dùng công cụ đại số để nghiên cứu tô pô của các không gian qua việc thiết lập mối quan hệ giữa các không gian tô pô với các kiến thức đại số và từ các kiến thức đại số đã biết ta nhận được các kết quả tương ứng về tính chất tô pô của các không gian).

Định lý 2.2.1 ([2]). Đường tròn $\mathbb{S}^1$ không phải là cái co rút của đĩa đơn vị đóng $\mathbb{B}^2$

Chứng minh. Giả sử ngược lại tồn tại ánh xạ $r : \mathbb{B}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ sao cho

$$r \circ i = id_{\mathbb{S}^1}.$$

Khi đó bởi tính chất của hàm tử các nhóm cơ bản ta có

$$r_* \circ i_* = (id_{\mathbb{S}^1})_* = id_{\pi_1(\mathbb{S}^1)}.$$

Mặt khác

$$i_* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{B}^2), r_* : \pi_1(\mathbb{B}^2) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1)$$

Bởi Định lý 2.1.4, $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$ và bởi Ví dụ 1.2.14, Mệnh đề 1.2.15, $\pi_1(\mathbb{B}^2) = 0$. Vậy $i_* : \mathbb{Z} \longrightarrow 0, r_* : 0 \longrightarrow \mathbb{Z}$. Do đó: $r_* \circ i_* = 0$.

Như vậy ta nhận được mâu thuẫn. □

Hệ quả 2.2.2. Mỗi ánh xạ liên tục $f : \mathbb{B}^2 \longrightarrow \mathbb{B}^2$ đều có điểm bất động.

Chứng minh. Giả sử ngược lại $f : \mathbb{B}^2 \longrightarrow \mathbb{B}^2$ không có điểm bất động. Khi đó, ta xét ánh xạ liên tục

$$\begin{aligned} r : \mathbb{B}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\longmapsto r(x) = [f(x), x] \cap \mathbb{S}^1 \end{aligned}$$

Ta có: $r \circ i(x) = x, \forall x \in \mathbb{S}^1$ nên

$$r \circ i = id_{\mathbb{S}^1}$$

nghĩa là $\mathbb{S}^1$ là một cái co rút của $\mathbb{B}^2$, mâu thuẫn với Định lý 1.3.9. □

Định lý 2.2.3. Cho $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ là ánh xạ liên tục không có điểm bất động. Khi đó f đồng luân với ánh xạ đồng nhất.

Chứng minh. Vì f là ánh xạ liên tục không có điểm bất động nên $f(x) \neq x$ với mọi $x \in \mathbb{S}^1$ suy ra $f(z) \cdot \bar{z} \neq z \cdot \bar{z} = 1$, với mọi $z \in \mathbb{S}^1$. Xây dựng ánh xạ liên tục

$$\begin{aligned} g : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{1\} \\ z &\longmapsto g(z) = f(z) \cdot \bar{z} \end{aligned}$$

Vì $\mathbb{S}^1 \setminus \{1\} \cong \mathbb{R}$ và $\mathbb{S}^1$ là co rút được nên g đồng luân với ánh xạ hằng $c \in \mathbb{S}^1$ qua ánh xạ đồng luân

$$G : \mathbb{S}^1 \times I \longrightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}, G(z, 0) = g(z), G(z, 1) = c, \forall z \in \mathbb{S}^1.$$

Ta xây dựng ánh xạ

$$\begin{aligned} F : \mathbb{S}^1 \times I &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (z, t) &\longmapsto F(z, t) = z.G(z, t) \end{aligned}$$

Khi đó F liên tục do G liên tục và

$$F(z, 0) = z.G(z, 0) = z.g(z) = f(z), F(z, 1) = z.G(z, 1) = cz = cId_{\mathbb{S}^1}$$

với mọi $z \in \mathbb{S}^1$. Suy ra $f \sim cId_{\mathbb{S}^1}$ hay $f \sim Id_{\mathbb{S}^1}$. $\square$

Định lý 2.2.4 ([2]). $\mathbb{R}^2$ không đồng phôi với $\mathbb{R}^n$ với mọi $n \neq 2$.

Chứng minh. Giả sử $\mathbb{R}^2$ đồng phôi với $\mathbb{R}^n$ với mọi $n \neq 2$ qua ánh xạ f . Ta xét ánh xạ $\tilde{f}$ là ánh xạ hạn chế của f trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ là đồng phôi từ $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ vào $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$. Xét các trường hợp sau:

- Trường hợp $n = 1$. Ta thấy $\mathbb{R}^2$ liên thông cung nhưng $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ không liên thông cung (mâu thuẫn với $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ đồng phôi $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$).
- Trường hợp $n > 2$. Vì $\tilde{f}$ đồng phôi nên ánh xạ cảm sinh $\tilde{f}_* : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ là đẳng cấu. Mặt khác

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{Z}, \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^n \cong 0).$$

Điều này vô lí chứng tỏ $\mathbb{R}^2$ không đồng phôi với $\mathbb{R}^n$ với mọi $n \neq 2$. $\square$

KẾT LUẬN - KIẾN NGHỊ

Kết quả đã đạt được:

- Trình bày định nghĩa và một số tính chất, hệ quả liên quan nhóm cơ bản của không gian tô pô.
- Trình bày định nghĩa và chứng minh một số tính chất liên quan đồng luân của các ánh xạ
- Trình bày nhóm cơ bản của không gian đơn liên và không gian tô pô co rút được.
- Tính nhóm cơ bản của đường tròn và đưa ra ứng dụng của nhóm cơ bản của đường tròn.

Hướng phát triển nghiên cứu: Tính nhóm cơ bản của một số không gian tô pô phức tạp hơn và đưa ra ứng dụng của chúng.

DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] M-Greenberg, Lectures on Algebraic Topology, New York, 1967
- [2] W.S.Massey, A Basic Course in Algebraic Topology, Springer – Verlag, 1988.
- [3] Dương Quốc Việt, Giáo trình Đại số đại cương, NXB Đại học sư phạm Hà Nội, 2010.