

UBND TỈNH NINH BÌNH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ

BÁO CÁO KẾT QUẢ THỰC HIỆN
NHIỆM VỤ KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP CƠ SỞ

SỰ HỘI TỤ CỦA TỔNG KÉP
CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN PHỤ THUỘC THEO KHỐI

Chủ nhiệm nhiệm vụ: ThS. VŨ THỊ NGỌC ÁNH
Đơn vị công tác: KHOA SƯ PHẠM TRUNG HỌC

NINH BÌNH, 2022

UBND TỈNH NINH BÌNH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ

BÁO CÁO KẾT QUẢ THỰC HIỆN
NHIỆM VỤ KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP CƠ SỞ

SỰ HỘI TỤ CỦA TỔNG KÉP
CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN PHỤ THUỘC THEO KHỐI

Chủ nhiệm nhiệm vụ: ThS. VŨ THỊ NGỌC ÁNH
Các thành viên: ThS. ĐẶNG THỊ THU HIỀN
Đơn vị: KHOA SƯ PHẠM TRUNG HỌC

Xác nhận của chủ tịch HĐ nghiệm thu

Chủ nhiệm nhiệm vụ

NINH BÌNH, 2022

MỤC LỤC

Bảng ký hiệu và chữ viết tắt	ii
Thông tin kết quả nghiên cứu	iii
Mở đầu	iv
Chương 1. Cơ sở lý thuyết	1
1.1. Sự hội tụ của mảng kép các biến ngẫu nhiên	1
1.2. Tính phụ thuộc của mảng kép các biến ngẫu nhiên	8
1.3. Tính bị chặn ngẫu nhiên của mảng kép các biến ngẫu nhiên .	10
Chương 2. Sự hội tụ của tổng kép các biến ngẫu nhiên phụ thuộc theo khối	13
2.1. Luật mạnh số lớn Loève cho mảng kép các biến ngẫu nhiên phụ thuộc theo khối	13
2.2. Luật mạnh số lớn Marcinkiewicz–Zygmund cho mảng kép các biến ngẫu nhiên phụ thuộc theo khối	22
2.3. Sự hội tụ theo trung bình cho tổng kép các biến ngẫu nhiên phụ thuộc theo khối	27
Kết luận - Kiến nghị	34
Danh mục các công trình của tác giả (nhóm tác giả) đã công bố có liên quan đến nội dung đề tài	35
Tài liệu tham khảo	36

BẢNG KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

$\mathbb{N}$	Tập hợp các số tự nhiên
$\mathbb{R}$	Tập hợp các số thực
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Không gian xác suất đầy đủ
$\mathbb{E}X$	Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên X
$\text{Var}X$	Phương sai của biến ngẫu nhiên X
$m \vee n$	Giá trị lớn nhất của hai số thực m và n
$m \wedge n$	Giá trị nhỏ nhất của hai số thực m và n
$\log x$	Logarit cơ số 2 của $x \vee 2$
$\mathbf{1}(A)$	Hàm chỉ tiêu của tập hợp A
h.c.c.	Hầu chắc chắn
$\square$	Kết thúc chứng minh
tr. i	Trang thứ i trong tài liệu được trích dẫn
C	Kí hiệu cho một hằng số dương và có thể không giống nhau ở mỗi lần xuất hiện
$[x]$	Số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng x
$d(k)$	Số các ước nguyên dương của số nguyên k .

THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

Luật mạnh số lớn cho mảng kép các biến ngẫu nhiên và sự hội tụ theo trung bình của tổng kép các biến ngẫu nhiên được nghiên cứu bởi nhiều tác giả. Rất gần đây, Tứ và các cộng sự [14] đã giới thiệu khái niệm M -phụ thuộc âm đôi một của mảng kép các biến ngẫu nhiên và xây dựng kết quả về sự hội tụ theo trung bình cho mảng kép các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một. Trong đề tài này, chúng tôi giới thiệu khái niệm M -phụ thuộc âm đôi một theo khối của mảng kép các biến ngẫu nhiên và xây dựng luật mạnh số lớn dạng Loève, luật mạnh số lớn dạng Marcinkiewicz–Zygmund cho mảng kép các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một theo khối, xây dựng sự hội tụ trong L^1 của tổng kép các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một theo khối, đưa ra một số ví dụ để minh hoạ cho các kết quả đạt được. Kết quả luật mạnh số lớn dạng Loève và luật mạnh số lớn dạng Marcinkiewicz–Zygmund cho mảng kép các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một theo khối vẫn là mới ngay cả khi xét cho mảng kép các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một. Kết quả về sự hội tụ trong L^1 của tổng kép các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một theo khối khi xét cho các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một ta suy ra Định lý 2.5 của Hong và Hwang [3].

MỞ ĐẦU

1. Tổng quan tình hình nghiên cứu

Lịch sử của lý thuyết xác suất là câu chuyện của các định lý giới hạn. Luật mạnh số lớn và sự hội tụ theo trung bình của mảng kép và mảng nhiều chỉ số các biến ngẫu nhiên được rất nhiều các nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu.

Luật mạnh số lớn dạng Marcinkiewicz–Zygmund cho mảng kép các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một và sự hội tụ theo trung bình của tổng kép các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một được nghiên cứu bởi Hong và Hwang [3]. Kết quả này được mở rộng sang trường hợp nhiều chỉ số bởi Czerebak-Mrozowicz và các cộng sự [2]. Tuy nhiên, các kết quả này chưa được mở rộng sang trường hợp mảng kép các biến ngẫu nhiên phụ thuộc theo khối.

Gần đây, Ánh [13] đã thiết lập luật mạnh số lớn dạng Loève cho dãy các biến ngẫu nhiên m -phụ thuộc âm đôi một. Đến nay, luật mạnh số lớn dạng Loève chưa được xây dựng cho mảng kép các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một.

Do đó, việc mở rộng các kết quả của Hong và Hwang [3] cho mảng kép các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc theo khối và việc xây dựng luật mạnh số lớn Loève cho mảng kép các biến ngẫu nhiên phụ thuộc theo khối sẽ cho chúng ta các kết quả mới có ý nghĩa khoa học.

2. Tính cấp thiết

Sự hội tụ của tổng các biến ngẫu nhiên có nhiều ứng dụng trong thống kê, toán kinh tế, khoa học tự nhiên và nhiều lĩnh vực khác. Vì vậy, việc nghiên cứu sự hội tụ của tổng các biến ngẫu nhiên không chỉ có ý nghĩa lý thuyết mà còn có ý nghĩa thực tiễn.

Các kết quả cổ điển về sự hội tụ của tổng các biến ngẫu nhiên thường được nghiên cứu trên các biến ngẫu nhiên độc lập, độc lập đôi một. Tuy nhiên, tính độc lập, độc lập đôi một là các tính chất mạnh, khó thỏa mãn. Các hiện tượng ngẫu nhiên xảy ra trong thực tiễn thường phụ thuộc lẫn nhau. Do đó, chúng ta phải tìm hiểu, nghiên cứu các kiểu phụ thuộc khác nhau, đặc biệt là các kiểu phụ thuộc theo khối để phù hợp với những bài toán ứng dụng trong thực tế như: phụ thuộc martingales theo khối, liên kết âm theo khối, phụ thuộc âm theo khối, phụ thuộc âm đôi một theo khối,...

Logic tự nhiên của sự phát triển các định lý giới hạn trong lý thuyết

xác suất đã dẫn đến nhiều kết quả tổng quát hơn các kết quả cổ điển. Hai trong những hướng tổng quát đó là:

i) Từ các kết quả đã có đối với dãy mở rộng sang các kết quả đối với mảng kép. Đối với cấu trúc nhiều chỉ số, quan hệ thứ tự thông thường trên tập các chỉ số không có tính chất tuyến tính. Vì vậy, khi mở rộng các định lý giới hạn từ trường hợp dãy một chỉ số sang trường hợp mảng nhiều chỉ số chúng ta sẽ gặp nhiều khó khăn hơn.

ii) Từ các kết quả đã có đối với mảng kép phụ thuộc thông thường mở rộng sang các kết quả đối với mảng kép phụ thuộc theo khối. Đối với sự phụ thuộc theo khối, cấu trúc phụ thuộc chỉ có trong từng khối. Vì vậy, khi mở rộng kết quả từ trường hợp phụ thuộc thông thường sang trường hợp phụ theo khối thì ta không áp dụng được phương pháp chứng minh kết quả của trường hợp phụ thuộc thông thường để xây dựng kết quả cho trường hợp phụ thuộc theo khối.

Do đó, chúng tôi chọn nghiên cứu đề tài “Sự hội tụ của tổng kép các biến ngẫu nhiên phụ thuộc theo khối”.

3. Mục tiêu nghiên cứu

- Xây dựng luật mạnh số lớn dạng Loève cho mảng kép các biến ngẫu nhiên phụ thuộc theo khối.
- Xây dựng luật mạnh số lớn dạng Marcinkiewicz–Zygmund cho mảng kép các biến ngẫu nhiên phụ thuộc theo khối.
- Xây dựng sự hội tụ theo trung bình cho tổng kép các biến ngẫu nhiên phụ thuộc theo khối.

4. Đối tượng nghiên cứu

Mảng kép các ngẫu nhiên, phụ thuộc theo khối.

5. Phạm vi nghiên cứu

Luật mạnh số lớn, sự hội tụ theo trung bình.

6. Cách tiếp cận và phương pháp nghiên cứu

Cách tiếp cận: Lý thuyết.

Phương pháp nghiên cứu: Phân tích các kết quả đã đạt được, từ đó vận dụng các kỹ thuật, kết quả đã đạt được vào mô hình tương tự hoặc mô hình tổng quát hơn.

Chương 1

CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1.1. SỰ HỘI TỤ CỦA MẢNG KÉP CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN

Trước hết chúng tôi trình bày định nghĩa các dạng hội tụ của mảng kép các số thực.

Định nghĩa 1.1.1. ([9]) Cho $\{a_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các số thực.

(i) Mảng $\{a_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ được gọi là *hội tụ đến* $a \in \mathbb{R}$ khi $m \vee n \rightarrow \infty$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $m, n \in \mathbb{N}$ mà $m \vee n \geq N$ thì

$$|a_{m,n} - a| < \varepsilon.$$

Khi đó, ta kí hiệu $\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} a_{m,n} = a$ hoặc $a_{m,n} \rightarrow a$ khi $m \vee n \rightarrow \infty$.

(ii) Mảng $\{a_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ được gọi là *tiến ra* ∞ khi $m \vee n \rightarrow \infty$ nếu với mọi $M > 0$ tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $m, n \in \mathbb{N}$ mà $m \vee n \geq N$ thì

$$a_{m,n} > M.$$

Khi đó, ta kí hiệu $\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} a_{m,n} = \infty$ hoặc $a_{m,n} \rightarrow \infty$ khi $m \vee n \rightarrow \infty$.

Trong các định nghĩa trên, nếu ta thay $m \vee n \rightarrow \infty$ bởi $m \wedge n \rightarrow \infty$ thì ta thu được các dạng hội tụ khi $m \wedge n \rightarrow \infty$.

Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu định nghĩa sự hội tụ của chuỗi hai chỉ số các số thực không âm.

Định nghĩa 1.1.2. ([9]) Giả sử $\{a_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các số thực không âm. Khi đó, ta nói

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} < \infty$$

nếu tồn tại $S \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\lim_{m \wedge n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j} = S.$$

Kí hiệu

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = S.$$

Bổ đề 1.1.3. ([9]) Giả sử $\{a_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các số thực không âm thoả mãn

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} < \infty.$$

Khi đó

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{\ell=n}^{\infty} a_{k,\ell} = 0.$$

Bổ đề sau đây là một phiên bản mảng kép của Bổ đề 2.3 trong [11].

Bổ đề 1.1.4. Giả sử $\{b_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng kép các số thực dương thoả mãn

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} b_{m,n} = \infty \quad (1.1)$$

và

$$b_{i,j} \leq b_{k,\ell} \text{ với mọi } i \leq k, j \leq \ell. \quad (1.2)$$

Giả sử $\{a_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các số thực không âm thoả mãn

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \frac{a_{m,n}}{b_{m,n}} = 0. \quad (1.3)$$

Khi đó

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \frac{\max_{k \leq m, \ell \leq n} a_{k,\ell}}{b_{m,n}} = 0. \quad (1.4)$$

Chứng minh. Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ. Từ (1.3) suy ra tồn tại số nguyên $n_1 \geq 1$ thoả mãn

$$\frac{a_{m,n}}{b_{m,n}} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ với mọi } m \vee n \geq n_1. \quad (1.5)$$

Đặt $a = \max_{k < n_1, \ell < n_1} a_{k,\ell} < \infty$. Từ (1.1) ta suy ra tồn tại số nguyên $n_2 \geq n_1$ thoả mãn

$$\frac{a}{b_{m,n}} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ với mọi } m \vee n \geq n_2. \quad (1.6)$$

Với $m \vee n \geq n_2$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{\max_{k \leq m, \ell \leq n} a_{k,\ell}}{b_{m,n}} &\leq \frac{\max_{k \leq m, \ell \leq n, k \vee \ell < n_1} a_{k,\ell}}{b_{m,n}} + \frac{\max_{k \leq m, \ell \leq n, k \vee \ell \geq n_1} a_{k,\ell}}{b_{m,n}} \\ &\leq \frac{a}{b_{m,n}} + \max_{k \vee \ell \geq n_1} \frac{a_{k,\ell}}{b_{k,\ell}} \quad (\text{do (1.2)}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{do (1.5) và (1.6)}) \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

do đó ta suy ra (1.4). □

Hai bổ đề tiếp theo là các kết quả thường được áp dụng để xây dựng tính chất về sự hội tụ của mảng kép các biến ngẫu nhiên. Đó là bổ đề Toeplitz cho mảng kép trong Stadtmüller và Thành [12] và bổ đề Kronecker cho mảng kép trong [7].

Bổ đề 1.1.5 ([12], Bổ đề Toeplitz cho mảng kép). Cho $\{a_{mnij}, 1 \leq i \leq m+1, 1 \leq j \leq n+1, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các hằng số dương sao cho

$$\sup_{m \geq 1, n \geq 1} \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n+1} a_{mnij} \leq C$$

và

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} a_{mnij} = 0 \text{ với mỗi } i, j \text{ cố định.}$$

Nếu $\{x_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng hai chỉ số các hằng số thực thỏa mãn

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} x_{m,n} = 0,$$

thì

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n+1} a_{mnij} x_{i,j} = 0.$$

Bổ đề 1.1.6 ([7], Bổ đề Kronecker cho mảng kép). Giả sử $\{x_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các số thực không âm và $\{b_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các số thực dương thỏa mãn các điều kiện sau:

- i) $b_{i,j} \leq b_{m,n}$ với mọi $i \leq m, j \leq n$,
- ii) $b_{i+1,j+1} - b_{i+1,j} - b_{i,j+1} + b_{i,j}$ có dấu không đổi với mọi $i \geq 1, j \geq 1$,
- iii) $b_{m,n} \rightarrow \infty$ khi $m \vee n \rightarrow \infty$.

Nếu

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_{i,j}}{b_{i,j}} < \infty,$$

thì

$$\frac{1}{b_{m,n}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} \rightarrow 0 \text{ khi } m \vee n \rightarrow \infty.$$

Tiếp theo chúng tôi trình bày và chứng minh một phiên bản của bổ đề Toeplitz. Kết quả này đóng vai trò quan trọng trong việc xây dựng kết quả trong mục 2.3.

Bổ đề 1.1.7. Giả sử $a > 1$, và giả sử $\{x_{k,\ell}, k \geq 0, \ell \geq 0\}$ là mảng các số thực không âm thoả mãn

$$\lim_{k \vee \ell \rightarrow \infty} x_{k,\ell} = 0. \quad (1.7)$$

Khi đó

$$\lim_{k \vee \ell \rightarrow \infty} a^{-k} \sum_{s=0}^k a^s x_{s,\ell} = 0. \quad (1.8)$$

Chứng minh. Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ. Từ (1.7) suy ra tồn tại số nguyên $n_1 \geq 1$ thoả mãn

$$x_{k,\ell} < \frac{\varepsilon(a-1)}{2a} \text{ với mọi } k \vee \ell \geq n_1. \quad (1.9)$$

Đặt $y_s = \sup_{\ell \geq 0} x_{s,\ell} < \infty$. Ta có, tồn tại số nguyên $n_2 \geq n_1$ thoả mãn

$$a^{-k} \sum_{s=0}^{n_1-1} a^s y_s < \frac{\varepsilon}{2} \text{ với mọi } k \geq n_2. \quad (1.10)$$

Để chứng minh (1.8), chúng ta sẽ chỉ ra rằng với mọi $k \vee \ell \geq n_2$,

$$\left| a^{-k} \sum_{s=0}^k a^s x_{s,\ell} \right| < \varepsilon. \quad (1.11)$$

Nếu $k \geq n_2$, thì từ (1.9) và (1.10) ta suy ra

$$\begin{aligned} a^{-k} \sum_{s=0}^k a^s x_{s,\ell} &= a^{-k} \sum_{s=0}^{n_1-1} a^s x_{s,\ell} + a^{-k} \sum_{s=n_1}^k a^s x_{s,\ell} \\ &< a^{-k} \sum_{s=0}^{n_1-1} a^s y_s + a^{-k} \sum_{s=n_1}^k a^s \frac{\varepsilon(a-1)}{2a} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

từ đó ta suy ra (1.11).

Nếu $\ell \geq n_2$, thì từ (1.9) ta suy ra

$$a^{-k} \sum_{s=0}^k a^s x_{s,\ell} < a^{-k} \sum_{s=0}^k a^s \frac{\varepsilon(a-1)}{2a} < \frac{\varepsilon}{2}$$

từ đó ta suy ra (1.11). □

Định nghĩa sau đây, chúng tôi trình bày các dạng hội tụ hầu chắc chắn, hội tụ theo xác suất, hội tụ đầy đủ, hội tụ theo trung bình của mảng các biến ngẫu nhiên.

Định nghĩa 1.1.8. ([9])

(i) Mảng các biến ngẫu nhiên $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ được gọi là hội tụ *hầu chắc chắn* đến biến ngẫu nhiên X khi $m \vee n \rightarrow \infty$ nếu

$$\mathbb{P}(\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} |X_{m,n} - X| = 0) = 1.$$

Khi đó, ta kí hiệu $X_{m,n} \rightarrow X$ h.c.c. khi $m \vee n \rightarrow \infty$, hay $\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} X_{m,n} = X$ h.c.c.

(ii) Mảng các biến ngẫu nhiên $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ được gọi là hội tụ *theo xác suất* đến biến ngẫu nhiên X khi $m \vee n \rightarrow \infty$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ ta có

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_{m,n} - X| > \varepsilon) = 0.$$

Khi đó, ta kí hiệu $X_{m,n} \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ khi $m \vee n \rightarrow \infty$.

(iii) Giả sử $p > 0$. Mảng các biến ngẫu nhiên $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ được gọi là hội tụ *theo trung bình cấp p* đến biến ngẫu nhiên X khi $m \vee n \rightarrow \infty$ nếu

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \mathbb{E}|X_{m,n} - X|^p = 0.$$

Khi đó, ta kí hiệu $X_{m,n} \rightarrow X$ trong L^p khi $m \vee n \rightarrow \infty$.

Mệnh đề sau đây nêu lên tiêu chuẩn của sự hội tụ hầu chắc chắn của mảng các biến ngẫu nhiên. Phép chứng minh của mệnh đề hoàn toàn tương tự như trường hợp dãy một chỉ số.

Mệnh đề 1.1.9. *Giả sử $\{X, X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên. Khi đó $X_{m,n} \rightarrow X$ h.c.c. khi $m \vee n \rightarrow \infty$ khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$, ta có*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\sup_{m \vee n \geq k} |X_{m,n} - X| > \varepsilon) = 0.$$

Từ định nghĩa về các dạng hội tụ của mảng các biến ngẫu nhiên và tiêu chuẩn của sự hội tụ hầu chắc chắn, bất đẳng thức Markov,... ta có thể chứng minh các mối quan hệ giữa các dạng hội tụ đó như sau.

Nhận xét 1.1.10.

(i) Nếu $X_{m,n} \rightarrow X$ h.c.c. khi $m \vee n \rightarrow \infty$ thì $X_{m,n} \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ khi $m \vee n \rightarrow \infty$.

(ii) Nếu $X_{m,n} \rightarrow X$ trong L^p khi $m \vee n \rightarrow \infty$ thì $X_{m,n} \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ khi $m \vee n \rightarrow \infty$.

Bổ đề sau đây là phiên bản của bổ đề Borel-Cantelli cho mảng kép.

Bổ đề 1.1.11. (Bổ đề Borel-Cantelli cho mảng kép)

Giả sử $\{A_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các biến cố. Đặt

$$\limsup A_{m,n} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m \vee n \geq k} A_{m,n},$$

$$\liminf A_{m,n} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m \vee n \geq k} A_{m,n}.$$

Khi đó ta có các khẳng định sau:

(i) Nếu

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_{m,n}) < \infty,$$

thì

$$\mathbb{P}(\limsup A_{m,n}) = 0.$$

(ii) Nếu $\{A_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các biến cố thỏa mãn

$$\mathbb{P}(A_{k,\ell} A_{m,n}) \leq \mathbb{P}(A_{k,\ell}) \mathbb{P}(A_{m,n}) \text{ với mọi } (k, \ell) \neq (m, n) \quad (1.12)$$

và

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_{m,n}) = \infty,$$

thì

$$\mathbb{P}(\limsup A_{m,n}) = 1.$$

Chứng minh. (i) Đặt $B_k = \bigcup_{m \vee n \geq k} A_{m,n}$ với mọi $k \geq 1$. Khi đó $\{B_k, k \geq 1\}$

là dãy giảm nên theo tính liên tục của xác suất, ta có

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbb{P}(\limsup A_{m,n}) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m \vee n \geq k} A_{m,n}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_k) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{m \vee n \geq k} A_{m,n}\right) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m \vee n \geq k} \mathbb{P}(A_{m,n}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(ii) Đặt $I_{m,n} = \mathbf{1}(A_{m,n})$, $m \geq 1, n \geq 1$. Khi đó, ta có

$$\mathbb{E}I_{m,n} = \mathbb{P}(A_{m,n}),$$

$$\text{Var}(I_{m,n}) = \mathbb{E}I_{m,n}^2 - (\mathbb{E}I_{m,n})^2 = \mathbb{P}(A_{m,n})(1 - \mathbb{P}(A_{m,n})),$$

và

$$\mathbb{E}(I_{k,\ell}I_{m,n}) \leq \mathbb{E}I_{k,\ell}\mathbb{E}I_{m,n} \text{ với mọi } (k,\ell) \neq (m,n).$$

Như vậy, để chứng minh bổ đề trên ta chỉ cần chứng minh rằng nếu $\{A_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các biến cố thoả mãn (1.12) và

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(I_{m,n}) = \infty$$

thì

$$\mathbb{P}\left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{m,n} = \infty\right) = 1.$$

Theo bất đẳng thức Chebyshev, ta có

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (I_{i,j} - \mathbb{E}I_{i,j})\right| > 1/2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_{i,j})\right) \\ & \leq \frac{4\text{Var}\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n I_{i,j}\right)}{\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_{i,j})\right)^2} \\ & \leq \frac{4 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \text{Var}(I_{i,j})}{\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_{i,j})\right)^2} \\ & \leq \frac{4}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_{i,j})} \\ & \rightarrow 0 \text{ khi } m \wedge n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Do đó, ta suy ra

$$\lim_{m \wedge n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (I_{i,j} - \mathbb{E}I_{i,j})\right| > 1/2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_{i,j})\right) = 0.$$

Điều này kéo theo

$$\lim_{m \wedge n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n I_{i,j} \geq 1/2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_{i,j})\right) = 1. \quad (1.13)$$

Đặt

$$B_{m,n} = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n I_{i,j} \geq 1/2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_{i,j}) \right).$$

Áp dụng tính liên tục của xác suất, từ (1.13) ta có

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m \wedge n \geq k} B_{m,n} \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{m \wedge n \geq k} B_{m,n} \right) \\ &\geq \lim_{m \wedge n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_{m,n}) = 1. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Mặt khác, ta dễ dàng chứng minh được

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m \wedge n \geq k} B_{m,n} \subset \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} I_{i,j} = \infty \right). \quad (1.15)$$

Từ (1.14) và (1.15) ta có

$$\mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} I_{i,j} = \infty \right) = 1.$$

□

1.2. TÍNH PHỤ THUỘC CỦA MẢNG KÉP CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN

Năm 1966, Lehmann [5] đã phát biểu khái niệm phụ thuộc âm như sau.

Định nghĩa 1.2.1 ([5]). Hai biến ngẫu nhiên X và Y được gọi là *phụ thuộc âm* nếu

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) \leq \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét 1.2.2. Nếu các biến ngẫu nhiên X và Y độc lập thì X và Y phụ thuộc âm. Tuy nhiên, ví dụ sau đây chứng tỏ rằng tồn tại các biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm nhưng không độc lập.

Xét không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, với $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ và $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{4}$ với mọi $A \in \mathcal{F}$. Lấy $B = \{1, 2\}$, $C = \{2, 3, 4\}$. Khi đó, $\mathbf{1}(B)$ và $\mathbf{1}(C)$ là các biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm nhưng không độc lập.

Bổ đề 1.2.3 ([5]). *Giả sử X và Y là hai biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm, f và g là hai hàm tăng (hoặc hai hàm giảm) trên $\mathbb{R}$. Khi đó $f(X)$ và $g(Y)$ phụ thuộc âm.*

Từ Bổ đề 1.2.3, ta dễ dàng thu được các hệ quả sau đây.

Hệ quả 1.2.4. *Giả sử X và Y là hai biến ngẫu nhiên khả tích, phụ thuộc âm. Khi đó $X - \mathbb{E}X$ và $Y - \mathbb{E}Y$ là hai biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm.*

Hệ quả 1.2.5. *Giả sử X, Y là hai biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm và a, b, c, d là các số thực thỏa mãn $a < b, c < d$. Đặt*

$$X_1 = a\mathbf{1}(X < a) + X\mathbf{1}(a \leq X \leq b) + b\mathbf{1}(X > b),$$

$$Y_1 = c\mathbf{1}(Y < c) + Y\mathbf{1}(c \leq Y \leq d) + d\mathbf{1}(Y > d).$$

Khi đó X_1 và Y_1 là hai biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm.

Định nghĩa 1.2.6 ([5]). Họ các biến ngẫu nhiên $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ được gọi là *phụ thuộc âm đôi một* nếu với mọi $i, j \in \Lambda$ thỏa mãn $i \neq j$ ta có X_i và X_j phụ thuộc âm.

Nhận xét 1.2.7. Họ các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một là một họ các biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một.

Rất gần đây, Tú và các cộng sự [14] đã giới thiệu khái niệm M -phụ thuộc âm đôi một của mảng kép các biến ngẫu nhiên.

Định nghĩa 1.2.8 ([14]). Giả sử M là một số nguyên không âm.

• Một họ hữu hạn các biến ngẫu nhiên $\{X_{1,1}, \dots, X_{m,n}\}$ được gọi là M -phụ thuộc âm đôi một nếu thỏa mãn một trong hai trường hợp sau:

i) $m \vee n \leq M + 1$;

ii) $m \vee n > M + 1$ và với $(k - i) \vee (\ell - j) > M$ ta có $X_{i,j}$ và $X_{k,\ell}$ phụ thuộc âm.

• Mảng các biến ngẫu nhiên $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ được gọi là M -phụ thuộc âm đôi một nếu với mỗi $m \geq 1, n \geq 1$ ta có $\{X_{1,1}, \dots, X_{m,n}\}$ là M -phụ thuộc âm đôi một.

Nhận xét 1.2.9. i) Mảng các biến ngẫu nhiên $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là phụ thuộc âm đôi một khi và chỉ khi $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng 0-phụ thuộc âm đôi một.

ii) Nếu mảng $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ các biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một thì $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một với mọi số nguyên dương M .

Tứ và các cộng sự [14] đã chứng minh bất đẳng thức moment dạng Bahr-Esseen cho mảng kép các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một.

Bổ đề 1.2.10. [14, Bổ đề 2.2] Cho $1 \leq p \leq 2$ và cho $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng kép các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một thoả mãn $\mathbb{E}X_{m,n} = 0$ và $\mathbb{E}|X_{m,n}|^r < \infty$ với mọi $m \geq 1, n \geq 1$. Khi đó, tồn tại hằng số $C_{p,M}$ chỉ phụ thuộc vào p và M thoả mãn

$$\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{i,j} \right|^p \leq C_{p,M} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{E}|X_{i,j}|^p, m \geq 1, n \geq 1.$$

Sau đây chúng tôi giới thiệu khái niệm độc lập đôi một theo khối, phụ thuộc âm đôi một theo khối của mảng kép các biến ngẫu nhiên.

Định nghĩa 1.2.11. i) Mảng các biến ngẫu nhiên $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ được gọi là *độc lập đôi một theo khối* nếu với mỗi $k \geq 1, \ell \geq 1$, họ các biến ngẫu nhiên $\{X_{i,j}, 2^{k-1} \leq i < 2^k, 2^{\ell-1} \leq j < 2^\ell\}$ là độc lập đôi một.

ii) Mảng các biến ngẫu nhiên $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ được gọi là *phụ thuộc âm đôi một theo khối* nếu với mỗi $k \geq 1, \ell \geq 1$, họ các biến ngẫu nhiên $\{X_{i,j}, 2^{k-1} \leq i < 2^k, 2^{\ell-1} \leq j < 2^\ell\}$ là phụ thuộc âm đôi một.

Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu khái niệm M -phụ thuộc âm đôi một theo khối của mảng kép các biến ngẫu nhiên.

Định nghĩa 1.2.12. Mảng các biến ngẫu nhiên $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ được gọi là *M -phụ thuộc âm đôi một theo khối* nếu với mỗi $k \geq 1, \ell \geq 1$, họ các biến ngẫu nhiên $\{X_{i,j}, 2^{k-1} \leq i < 2^k, 2^{\ell-1} \leq j < 2^\ell\}$ là M -phụ thuộc âm đôi một.

Nhận xét 1.2.13. i) Mảng kép các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một theo khối là mảng kép các biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một theo khối.

ii) Mảng kép các biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một theo khối là mảng kép các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một theo khối với mọi số nguyên không âm M .

1.3. TÍNH BỊ CHẶN NGẪU NHIÊN CỦA MẢNG KÉP CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN

Định nghĩa bị chặn ngẫu nhiên sau đây tổng quát hơn định nghĩa cùng phân phối.

Định nghĩa 1.3.1. ([10]) Mảng các biến ngẫu nhiên $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ được gọi là *bị chặn ngẫu nhiên* bởi biến ngẫu nhiên X nếu tồn tại hằng số C sao cho với mọi $t \geq 0$ và với mọi $m \geq 1, n \geq 1$, ta có

$$\mathbb{P}(|X_{m,n}| > t) \leq \mathbb{P}(|X| > t).$$

Nhận xét 1.3.2. Mảng các biến ngẫu nhiên $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ cùng phân phối thì bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên $X_{1,1}$.

Chú ý 1.3.3. Nhiều tác giả định nghĩa $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên Y nếu

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{P}\{|X_\lambda| > t\} \leq C \mathbb{P}\{|Y| > t\} \text{ với mọi } t \geq 0 \quad (1.16)$$

trong đó C là hằng số dương.

Ngoài ra, Rosalsky và Thành [10] đã chỉ ra rằng hai cách định nghĩa trên là tương đương.

Bổ đề sau đây dùng để thiết lập sự hội tụ của mảng kép các biến ngẫu nhiên $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X .

Mệnh đề 1.3.4. *Nếu mảng các biến ngẫu nhiên $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X , thì với mọi $p > 0$ và $t \geq 0$,*

$$\sup_{m \geq 1, n \geq 1} \mathbb{E}(|X_{m,n}|^p \mathbf{1}(|X_{m,n}| > t)) \leq \mathbb{E}(|X|^p \mathbf{1}(|X| > t)), \quad (1.17)$$

và

$$\sup_{m \geq 1, n \geq 1} \mathbb{E}(|X_{m,n}|^p \mathbf{1}(|X_{m,n}| \leq t)) \leq \mathbb{E}(|X|^p \mathbf{1}(|X| \leq t)) + t^p \mathbb{P}(|X| > t). \quad (1.18)$$

Chứng minh. Với $m \geq 1, n \geq 1$ ta có

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(|X_{m,n}|^p \mathbf{1}(|X_{m,n}| > t)) \\ &= p \int_0^\infty x^{p-1} \mathbb{P}(|X_{m,n}| \mathbf{1}(|X_{m,n}| > t) > x) dx \\ &= p \int_t^\infty x^{p-1} \mathbb{P}(|X_{m,n}| > t) dx \\ &\leq p \int_t^\infty x^{p-1} \mathbb{P}(|X| > x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq p \int_0^\infty x^{p-1} \mathbb{P}(|X| \mathbf{1}(|X| > t) > x) \, dx \\
&= \mathbb{E}(|X|^p \mathbf{1}(|X| > t)),
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(|X_{m,n}|^p \mathbf{1}(|X_{m,n}| \leq t)) \\
&= p \int_0^\infty x^{p-1} \mathbb{P}(\mathbf{1}(|X_{m,n}| \leq t) > x) \, dx \\
&= p \int_0^t x^{p-1} \mathbb{P}(|X_{m,n}| \mathbf{1}(|X_{m,n}| \leq t) > x) \, dx \\
&\leq p \int_0^t x^{p-1} \mathbb{P}(|X_{m,n}| > x) \, dx \\
&\leq p \int_0^t x^{p-1} \mathbb{P}(|X| > x) \, dx \\
&= p \int_0^t x^{p-1} \mathbb{P}(|X| \mathbf{1}(|X| \leq t) > x) \, dx + p \int_0^t x^{p-1} \mathbb{P}(|X| \mathbf{1}(|X| > t) > x) \, dx \\
&\leq \mathbb{E}(|X|^p \mathbf{1}(|X| \leq t)) + p \int_0^t x^{p-1} \mathbb{P}(|X| > t) \, dx \\
&= \mathbb{E}(|X|^p \mathbf{1}(|X| \leq t)) + t^p \mathbb{P}(|X| > t).
\end{aligned}$$

□

Chương 2

SỰ HỘI TỤ CỦA TỔNG KÉP CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN PHỤ THUỘC THEO KHỐI

2.1. LUẬT MẠNH SỐ LỚN LOÈVE CHO MẢNG KÉP CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN PHỤ THUỘC THEO KHỐI

Trong mục này chúng tôi trình bày luật mạnh số lớn dạng Loève cho mảng kép các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một theo khối. Trong trường hợp một chỉ số đã được trình bày trong Anh [13] với trọng số tổng quát.

Giả sử $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên. Với $m \geq 1, n \geq 1$, đặt

$$S_{m,n} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{i,j}.$$

Áp dụng Bổ đề 1.1.4 ta dễ dàng chứng minh được kết quả sau.

Bổ đề 2.1.1. *Giả sử $\{b_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các số thực dương thoả mãn*

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} b_{m,n} = \infty$$

và

$$b_{i,j} \leq b_{k,\ell} \text{ với mọi } i \leq k, j \leq \ell.$$

Nếu $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên thoả mãn

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \frac{S_{m,n}}{b_{m,n}} = 0 \text{ h.c.c.,}$$

thì

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_{m,n}} \max_{k \leq m, \ell \leq n} |S_{k,\ell}| = 0 \text{ h.c.c.}$$

Kết hợp Bổ đề 1.2.10 và Định lý 3 của Móricz [6] ta có bổ đề sau đây. Đó là một dạng bất đẳng Rademacher–Menshov tổng quát cho tổng kép các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một. Bổ này dùng để chứng minh các kết quả chính trong mục 1 và mục 2.

Bổ đề 2.1.2. *Cho $1 < p \leq 2$. Giả sử $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một, kỳ vọng 0 thoả mãn*

$\mathbb{E}|X_{m,n}|^p < \infty$ với mọi $m \geq 1, n \geq 1$. Khi đó tồn tại hằng số C chỉ phụ thuộc vào M và p sao cho với mọi $m \geq 1, n \geq 1$ ta có

$$\mathbb{E} \left(\max_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq \ell \leq n}} \left| \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} X_{i,j} \right| \right)^p \leq C(\log m \log n)^p \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{E}|X_{i,j}|^p.$$

Kết quả sau đây là luật mạnh số lớn dạng Loève cho mảng kép các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một theo khối với trọng số $(m^\alpha n^\beta)$ ($\alpha > 0, \beta > 0$).

Định lý 2.1.3. *Giả sử $\alpha > 0, \beta > 0$ và giả sử $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một theo khối, kỳ vọng 0. Nếu*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|X_{m,n}|^{r_{m,n}} (\log m \log n)^2}{(m^\alpha n^\beta)^{r_{m,n}}} < \infty \quad (2.1)$$

với $1 \leq r_{m,n} \leq 2, m \geq 1, n \geq 1$, thì

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \frac{1}{m^\alpha n^\beta} \max_{k \leq m, \ell \leq n} |S_{k,\ell}| = 0 \text{ h.c.c.} \quad (2.2)$$

Chứng minh. Với $m \geq 1, n \geq 1, k \geq 0, \ell \geq 0$, đặt

$$b_{m,n} = m^\alpha n^\beta,$$

$$Y_{m,n} = -b_{m,n} \mathbf{1}(X_{m,n} < -b_{m,n}) + X_{m,n} \mathbf{1}(|X_{m,n}| \leq b_{m,n}) + b_{m,n} \mathbf{1}(X_{m,n} > b_{m,n}),$$

và

$$T_{k,\ell} = \frac{1}{b_{2^{k+1}, 2^{\ell+1}}} \max_{\substack{2^k \leq m < 2^{k+1} \\ 2^\ell \leq n < 2^{\ell+1}}} \left| \sum_{i=2^k}^m \sum_{j=2^\ell}^n (Y_{i,j} - \mathbb{E}Y_{i,j}) \right|.$$

Với $m \geq 1, n \geq 1$, ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b_{m,n}^2} \mathbb{E} (X_{m,n}^2 \mathbf{1}(|X_{m,n}| \leq b_{m,n})) + \mathbb{P}(|X_{m,n}| > b_{m,n}) \\ &= \frac{2}{b_{m,n}^2} \int_0^{b_{m,n}} x \mathbb{P}(|X_{m,n}| > x) dx \\ &\leq \frac{2}{b_{m,n}^{r_{m,n}}} \int_0^{b_{m,n}} x^{r_{m,n}-1} \mathbb{P}(|X_{m,n}| > x) dx \\ &\leq \frac{2\mathbb{E}|X_{m,n}|^{r_{m,n}}}{b_{m,n}^{r_{m,n}}}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Từ (2.1) và (2.3) suy ra

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_{m,n} \neq Y_{m,n}) &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_{m,n}| > b_{m,n}) \\
&\leq C \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|X_{m,n}|^{r_{m,n}}}{b_{m,n}^{r_{m,n}}} \\
&< \infty,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

và

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}Y_{m,n}^2 (\log m \log n)^2}{b_{m,n}^2} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b_{m,n}^2} \mathbb{E}(X_{m,n}^2 \mathbf{1}(|X_{m,n}| \leq b_{m,n})) + \mathbb{P}(|X_{m,n}| > b_{m,n}) \right) (\log m \log n)^2 \\
&\leq 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|X_{m,n}|^{r_{m,n}} (\log m \log n)^2}{b_{m,n}^{r_{m,n}}} < \infty.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Chú ý rằng, $\{Y_{m,n} - \mathbb{E}Y_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một theo khối, kỳ vọng 0. Với $k \geq 0, \ell \geq 0$, ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}T_{k,\ell}^2 &= \frac{1}{b_{2^{k+1}, 2^{\ell+1}}^2} \mathbb{E} \left(\max_{\substack{2^k \leq m < 2^{k+1} \\ 2^\ell \leq n < 2^{\ell+1}}} \left| \sum_{i=2^k}^m \sum_{j=2^\ell}^n (Y_{i,j} - \mathbb{E}(Y_{i,j})) \right| \right)^2 \\
&\leq \frac{C}{b_{2^{k+1}, 2^{\ell+1}}^2} (\log 2^k \log 2^\ell)^2 \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \sum_{j=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} \mathbb{E}(Y_{i,j} - \mathbb{E}Y_{i,j})^2 \\
&\quad (\text{do Bổ đề 2.1.2}) \\
&\leq C \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \sum_{j=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} \frac{\mathbb{E}Y_{i,j}^2 (\log i \log j)^2}{b_{i,j}^2}.
\end{aligned}$$

Từ đó và (2.5) suy ra

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{E}T_{k,\ell}^2 < \infty.$$

Từ đó kết hợp với bất đẳng thức Markov bổ đề Borel-Cantelli ta suy ra

$$\lim_{k \vee \ell \rightarrow \infty} T_{k,\ell} = 0 \text{ h.c.c.} \tag{2.6}$$

Giả sử $2^k \leq m < 2^{k+1}$, $2^\ell \leq n < 2^{\ell+1}$, ta có

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b_{m,n}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (Y_{i,j} - \mathbb{E}Y_{i,j}) \right| \\
& \leq \frac{1}{b_{2^k, 2^\ell}} \sum_{u=0}^k \sum_{v=0}^\ell \max_{\substack{2^u \leq m < 2^{u+1} \\ 2^v \leq n < 2^{v+1}}} \left| \sum_{i=2^u}^m \sum_{j=2^v}^n (Y_{i,j} - \mathbb{E}Y_{i,j}) \right| \\
& \leq C \sum_{u=0}^k \sum_{v=0}^\ell \frac{b_{2^{u+1}, 2^{v+1}}}{b_{2^{k+1}, 2^{\ell+1}}} T_{u,v}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Từ (2.6), (2.7) và bổ đề Toeplitz ta suy ra

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_{m,n}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (Y_{i,j} - \mathbb{E}Y_{i,j}) = 0 \text{ h.c.c.} \tag{2.8}$$

Vì $\mathbb{E}X_{m,n} = 0$ với mọi $m \geq 1, n \geq 1$, ta có

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mathbb{E}Y_{m,n}|}{b_{m,n}} \\
& \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}(|X_{m,n}| > b_{m,n}) + \frac{1}{b_{m,n}} |\mathbb{E}(X_{m,n} \mathbf{1}(|X_{m,n}| \leq b_{m,n}))| \right) \\
& = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}(|X_{m,n}| > b_{m,n}) + \frac{1}{b_{m,n}} |\mathbb{E}(X_{m,n} \mathbf{1}(|X_{m,n}| > b_{m,n}))| \right) \\
& \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}(|X_{m,n}| > b_{m,n}) + \frac{1}{b_{m,n}} \mathbb{E}(|X_{m,n}| \mathbf{1}(|X_{m,n}| > b_{m,n})) \right) \\
& = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(2\mathbb{P}(|X_{m,n}| > b_{m,n}) + \frac{1}{b_{m,n}} \int_{b_{m,n}}^{\infty} \mathbb{P}(|X_{m,n}| > x) dx \right) \\
& \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(2\mathbb{P}(|X_{m,n}| > b_{m,n}) + \frac{1}{b_{m,n}^{r_{m,n}}} \int_{b_{m,n}}^{\infty} x^{r_{m,n}-1} \mathbb{P}(|X_{m,n}| > x) dx \right) \\
& \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(2\mathbb{P}(|X_{m,n}| > b_{m,n}) + \frac{\mathbb{E}|X_{m,n}|^{r_{m,n}}}{b_{m,n}^{r_{m,n}}} \right) \\
& \leq C \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|X_{m,n}|^{r_{m,n}}}{b_{m,n}^{r_{m,n}}} \text{ (do (2.3))} \\
& < \infty \text{ (do (2.1)).}
\end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề Kronecker, ta có

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_{m,n}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{E} Y_{i,j} = 0. \quad (2.9)$$

Kết hợp (2.4), (2.8), (2.9) và bổ đề Borel–Cantelli ta suy ra

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \frac{S_{m,n}}{b_{m,n}} = 0 \text{ h.c.c.}$$

Từ đó và Bổ đề 2.1.1 ta suy ra (2.2). $\square$

Trong Định lý 2.1.3, khi xét cho trường hợp $r_{m,n} \equiv p$ với $1 < p \leq 2$ ta xây dựng được luật mạnh số lớn dạng Rademacher–Menshov (trường hợp đặc biệt của Luật mạnh số lớn dạng Loève) với trọng số tổng quát $(a_m b_n)$ sau đây.

Định lý 2.1.4. *Giả sử $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ mảng các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một theo khối, kỳ vọng 0 và giả sử $\{a_n, n \geq 1\}$ và $\{b_n, n \geq 1\}$ là hai dãy số dương không giảm thoả mãn*

$$\inf_{n \geq 0} \frac{a_{2^{n+1}}}{a_{2^n}} > 1, \quad \inf_{n \geq 0} \frac{b_{2^{n+1}}}{b_{2^n}} > 1, \quad (2.10)$$

$$\sup_{n \geq 0} \frac{a_{2^{n+1}}}{a_{2^n}} < \infty, \quad \sup_{n \geq 0} \frac{b_{2^{n+1}}}{b_{2^n}} < \infty. \quad (2.11)$$

Nếu

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|X_{m,n}|^p (\log m \log n)^p}{(a_m b_n)^p} < \infty \quad (2.12)$$

trong đó $1 < p \leq 2$, thì

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_m b_n} \max_{k \leq m, \ell \leq n} |S_{k,\ell}| = 0 \text{ h.c.c.} \quad (2.13)$$

Chứng minh. Với $k \geq 0, \ell \geq 0$, đặt

$$T_{k,\ell} = \frac{1}{(a_{2^{k+1}} - a_{2^k})(b_{2^{\ell+1}} - b_{2^\ell})} \max_{\substack{2^k \leq m < 2^{k+1} \\ 2^\ell \leq n < 2^{\ell+1}}} \left| \sum_{i=2^k}^m \sum_{j=2^\ell}^n X_{i,j} \right|.$$

Chú ý rằng $\{a_n, n \geq 1\}$ và $\{b_n, n \geq 1\}$ là các dãy số dương không giảm. Với $k \geq 0, \ell \geq 0$, ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|T_{k,\ell}|^p &\leq C \frac{1}{(a_{2^{k+1}}b_{2^{\ell+1}})^p} \mathbb{E} \left(\max_{\substack{2^k \leq m < 2^{k+1} \\ 2^\ell \leq n < 2^{\ell+1}}} \left| \sum_{i=2^k}^m \sum_{j=2^\ell}^n X_{i,j} \right| \right)^p \\
&\quad (\text{do (2.10)}) \\
&\leq C \frac{1}{(a_{2^{k+1}}b_{2^{\ell+1}})^p} (\log 2^k \log 2^\ell)^p \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \sum_{j=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} \mathbb{E}|X_{i,j}|^p \quad (2.14) \\
&\quad (\text{do Bổ đề 2.1.2}) \\
&\leq C \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \sum_{j=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} \frac{\mathbb{E}|X_{i,j}|^p (\log i \log j)^p}{(a_i b_j)^p}.
\end{aligned}$$

Kết hợp (2.12) và (2.14), ta có

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{E}|T_{k,\ell}|^p \leq C \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|X_{i,j}|^p (\log i \log j)^p}{(a_i b_j)^p} < \infty.$$

Áp dụng bất đẳng thức Markov và bổ đề Borel–Cantelli, ta suy ra

$$\lim_{k \vee \ell \rightarrow \infty} T_{k,\ell} = 0 \text{ h.c.c.} \quad (2.15)$$

Giả sử $2^k \leq m < 2^{k+1}$, $2^\ell \leq n < 2^{\ell+1}$, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_m b_n} |S_{m,n}| &\leq \frac{1}{a_{2^k} b_{2^\ell}} \sum_{u=0}^k \sum_{v=0}^{\ell} \max_{\substack{2^u \leq m < 2^{u+1} \\ 2^v \leq n < 2^{v+1}}} \left| \sum_{i=2^u}^m \sum_{j=2^v}^n X_{i,j} \right| \\
&\leq C \sum_{u=0}^k \sum_{v=0}^{\ell} \frac{(a_{2^{u+1}} - a_{2^u})(b_{2^{v+1}} - b_{2^v})}{a_{2^k} b_{2^\ell}} T_{u,v}.
\end{aligned} \quad (2.16)$$

Từ (2.11) ta suy ra

$$\sum_{u=0}^k \sum_{v=0}^{\ell} \frac{(a_{2^{u+1}} - a_{2^u})(b_{2^{v+1}} - b_{2^v})}{a_{2^k} b_{2^\ell}} < C \text{ với mọi } k \geq 0, \ell \geq 0. \quad (2.17)$$

Kết hợp (2.15)–(2.17) và bổ đề Toeplitz ta suy ra

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \frac{|S_{m,n}|}{a_m b_n} = 0 \text{ h.c.c.} \quad (2.18)$$

Từ (2.18) và Bổ đề 2.1.1 ta suy ra (2.13). $\square$

Hệ quả 2.1.5. Giả sử $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một theo khối. Nếu với mọi $m \geq 1, n \geq 1$, ta có

$$\mathbb{E}|X_{m,n}|^p \leq C \frac{(mn)^{p-1}}{(\log m \log n)^{p+\varepsilon+1}} \quad (2.19)$$

trong đó $1 < p \leq 2, \varepsilon > 0$, thì

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \frac{1}{mn} \max_{k \leq m, \ell \leq n} |S_{k,\ell}| = 0 \text{ h.c.c.} \quad (2.20)$$

Chứng minh. Từ (2.19) ta suy ra

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|X_{m,n}|^p (\log m \log n)^p}{(mn)^p} \leq C \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m(\log m)^{1+\varepsilon} n(\log n)^{1+\varepsilon}} < \infty$$

Áp dụng Định lý 2.1.4 ta suy ra (2.20). $\square$

Ví dụ sau đây chỉ ra rằng trong Định lý 2.1.4, chúng ta không thể thay thế điều kiện (2.12) bởi điều kiện

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}|X_{m,n}|^p (\log m \log n)^p}{(a_m b_n)^p} = 0.$$

Ví dụ 2.1.6. Giả sử $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối chuẩn hoá. Ta có

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|X_{m,n}|^2 (\log m \log n)^2}{(m^{1/2} n^{1/2})^2} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^2 m \log^2 n}{mn} \\ &= \infty, \end{aligned}$$

Chú ý rằng, với $m \geq 1, n \geq 1$ ta có

$$\frac{1}{m^{1/2} n^{1/2}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{i,j} \sim N(0, 1).$$

Tuy nhiên, ta có

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}|X_{m,n}|^2 (\log m \log n)^2}{(m^{1/2} n^{1/2})^2} &= \frac{\log^2 m \log^2 n}{mn} \\ &\leq \frac{\log^4(mn)}{mn} \rightarrow 0 \text{ khi } m \vee n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

$\square$

Ví dụ tiếp theo chỉ ra rằng trong Định lý 2.1.4, chúng ta không thể thay thế điều kiện (2.12) bởi điều kiện

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|X_{m,n}|^p}{(a_m b_n)^p} < \infty.$$

Ví dụ 2.1.7. Csörgő, Tandori và Totik [1] đã chỉ ra rằng tồn tại dãy các biến ngẫu nhiên $\{X_n, n \geq 1\}$ thoả mãn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}X_n^2}{n^2} < \infty,$$

nhưng

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n - \mathbb{E}S_n|}{n} = \infty \text{ h.c.c.}$$

Đặt

$$X_{m,n} = \begin{cases} X_n - \mathbb{E}X_n & \text{nếu } m = 1 \\ 0 & \text{nếu } m > 1. \end{cases}$$

Khi đó $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một, kỳ vọng 0 thoả mãn

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}X_{m,n}^2}{(mn)^2} < \infty,$$

nhưng

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_{1,n}|}{n} = \infty \text{ h.c.c.}$$

do đó (2.13) không đúng với $a_m \equiv m, b_n \equiv n$.

Trong Định lý 2.1.4, khi thay thế (2.12) bởi điều kiện

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|X_{m,n}|^p}{(a_m b_n)^p} < \infty.$$

ta chứng minh được kết quả sau đây.

Định lý 2.1.8. *Giả sử $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một theo khối, kỳ vọng 0 và giả sử $\{a_n, n \geq 1\}$ và $\{b_n, n \geq 1\}$ là hai dãy số dương không giảm thoả mãn (2.10) và (2.11). Nếu*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|X_{m,n}|^p}{(a_m b_n)^p} < \infty \quad (2.21)$$

trong đó $1 < p \leq 2$, thì

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_m b_n \log m \log n} \max_{k \leq m, \ell \leq n} |S_{k,\ell}| = 0 \text{ h.c.c.} \quad (2.22)$$

Chứng minh. Với $k \geq 0, \ell \geq 0$, đặt

$$\tau_{k,\ell} = \frac{1}{(a_{2^{k+1}} - a_{2^k})(b_{2^{\ell+1}} - b_{2^\ell}) \log 2^k \log 2^\ell} \max_{\substack{2^k \leq m < 2^{k+1} \\ 2^\ell \leq n < 2^{\ell+1}}} \left| \sum_{i=2^k}^m \sum_{j=2^\ell}^n X_{i,j} \right|.$$

Chú ý rằng $\{a_n, n \geq 1\}$ và $\{b_n, n \geq 1\}$ là các dãy số dương không giảm. Với $k \geq 0, \ell \geq 0$, ta có

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\tau_{k,\ell}|^p &\leq C \frac{1}{(a_{2^{k+1}} b_{2^{\ell+1}})^p (\log 2^k \log 2^\ell)^p} \mathbb{E} \left(\max_{\substack{2^k \leq m < 2^{k+1} \\ 2^\ell \leq n < 2^{\ell+1}}} \left| \sum_{i=2^k}^m \sum_{j=2^\ell}^n X_{i,j} \right| \right)^p \\ &\quad (\text{do (2.10)}) \\ &\leq C \frac{1}{(a_{2^{k+1}} b_{2^{\ell+1}})^p} \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \sum_{j=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} \mathbb{E}|X_{i,j}|^p \\ &\quad (\text{do Bổ đề 2.1.1}) \\ &\leq C \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \sum_{j=2^\ell}^{2^{\ell+1}-1} \frac{\mathbb{E}|X_{i,j}|^p}{(a_i b_j)^p}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Kết hợp (2.21) và (2.23), ta có

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{E}|\tau_{k,\ell}|^p \leq C \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|X_{i,j}|^p}{(a_i b_j)^p} < \infty.$$

Áp dụng bất đẳng thức Markov và bổ đề Borel–Cantelli ta suy ra

$$\lim_{k \vee \ell \rightarrow \infty} \tau_{k,\ell} = 0 \text{ h.c.c.} \tag{2.24}$$

Giả sử $2^k \leq m < 2^{k+1}$, $2^\ell \leq n < 2^{\ell+1}$, ta có

$$\begin{aligned} &\frac{|S_{m,n}|}{a_m b_n \log m \log n} \\ &\leq \frac{1}{a_{2^k} b_{2^\ell} \log 2^k \log 2^\ell} \sum_{u=0}^k \sum_{v=0}^{\ell} \max_{\substack{2^u \leq m < 2^{u+1} \\ 2^v \leq n < 2^{v+1}}} \left| \sum_{i=2^u}^m \sum_{j=2^v}^n X_{i,j} \right| \\ &\leq C \sum_{u=0}^k \sum_{v=0}^{\ell} \frac{(a_{2^{u+1}} - a_{2^u})(b_{2^{v+1}} - b_{2^v})}{a_{2^k} b_{2^\ell}} \tau_{u,v}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Kết hợp (2.17), (2.24), (2.25) và bổ đề Toeplitz ta suy ra

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \frac{|S_{m,n}|}{a_m b_n \log m \log n} = 0 \text{ h.c.c.} \tag{2.26}$$

Từ (2.26) và Bổ đề 2.1.1 ta suy ra (2.22). $\square$

2.2. LUẬT MẠNH SỐ LỚN MARCINKIEWICZ–ZYGmund CHO MẢNG KÉP CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN PHỤ THUỘC THEO KHỐI

Luật mạnh số lớn dạng Marcinkiewicz–Zygmund cho mảng kép các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một được nghiên cứu đầu tiên bởi Hong và Hwang [3]. Kết quả này được mở rộng đến mảng nhiều chỉ số bởi Czerebak-Mrozowicz và các cộng sự [2]. Giả sử $1 < p < 2$. Trong [2, 3], các tác giả đã chứng minh rằng với một mảng các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X , điều kiện

$$\mathbb{E}(|X|^p \log^3 |X|) < \infty$$

suy ra

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{i,j} - \mathbb{E}X_{i,j})}{(mn)^{1/p}} = 0 \text{ h.c.c.} \quad (2.27)$$

Trong [2, 3], các tác giả đã sử dụng đánh giá sau trong chứng minh (xem [2, dòng -3 trang 136] và [3, dòng 3 trang 175])

$$\log(m) \log(n) \leq C \log(mn) \text{ với mọi } m \geq 1, n \geq 1, \quad (2.28)$$

tuy nhiên đánh giá này không chính xác. (2.28) phải được sửa thành

$$\log(m) \log(n) \leq C \log^2(mn) \text{ với mọi } m \geq 1, n \geq 1. \quad (2.29)$$

Nếu chúng tôi làm theo chứng minh của [2, 3] và sử dụng (2.29) thay cho (2.28), chúng tôi cần điều kiện

$$\mathbb{E}(|X|^p \log^5 |X|) < \infty \quad (2.30)$$

để suy ra được luật mạnh số lớn (2.27). Một câu hỏi tự nhiên đặt ra là liệu có hay không kết quả trong [2, 3] dưới điều kiện yếu hơn (2.30). Trong đề tài này chúng tôi đã sử dụng một kỹ thuật hoàn toàn khác các kỹ thuật chứng minh trong [2, 3] để chứng minh rằng (2.27) có được dưới điều kiện

$$\mathbb{E}(|X|^p \log^{1+2p} |X|) < \infty,$$

trong đó $1 \leq p < 2$.

Khi xây dựng kết quả về sự hội tụ cho mảng kép các biến ngẫu nhiên chúng ta cần dùng kết quả sau.

Bổ đề 2.2.1. *Giả sử $d(k)$ là số các ước nguyên dương của số nguyên dương k . Khi đó, với $n \geq 1$ ta có*

$$\sum_{k=1}^n \frac{d(k) \log^\alpha k}{k^\gamma} \leq \frac{C \log^{\alpha+1} n}{n^{\gamma-1}} \text{ với mọi } \gamma < 1, \alpha \geq 0, \quad (2.31)$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{d(k) \log^{\alpha} k}{k^{\gamma}} \leq \frac{C \log^{\alpha+1} n}{n^{\gamma-1}} \text{ với mọi } \gamma > 1, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.32)$$

Chứng minh. Ta có (xem Klesov [4, tr. 434]),

$$\sum_{k=1}^n d(k) \sim n \log n. \quad (2.33)$$

Áp dụng (2.33) và tính tổng theo từng phần ta có điều phải chứng minh. $\square$

Định lý sau đây là luật mạnh số lớn dạng Marcinkiewicz–Zygmund cho mảng kép các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một theo khối.

Định lý 2.2.2. *Giả sử $1 \leq p < 2$ và giả sử $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một theo khối, kỳ vọng 0. Nếu $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X thoả mãn*

$$\mathbb{E}(|X|^p \log^{1+2p} |X|) < \infty, \quad (2.34)$$

thì

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \frac{1}{(mn)^{1/p}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{i,j} = 0 \text{ h.c.c.} \quad (2.35)$$

Chứng minh. Đặt

$$g(x) = \begin{cases} (3p)^{-2} x^{1/p} & \text{nếu } 0 \leq x < 8^p, \\ x^{1/p} (\log x)^{-2} & \text{nếu } x \geq 8^p. \end{cases}$$

Khi đó $g(\cdot)$ là hàm tăng ngặt trên $[0, \infty)$. Với $m \geq 1, n \geq 1$, đặt

$$\begin{aligned} Y_{m,n} &= -g(mn) \mathbf{1}(X_{m,n} < -g(mn)) + X_{m,n} \mathbf{1}(|X_{m,n}| \leq g(mn)) \\ &\quad + g(mn) \mathbf{1}(X_{m,n} > g(mn)). \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X| > g(mn)) &= \sum_{k=1}^{\infty} d(k) \mathbb{P}(|X| > g(k)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} d(k) \sum_{\ell=k}^{\infty} \mathbb{P}(g(\ell) < |X| \leq g(\ell+1)) \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\ell} d(k) \mathbb{P}(g(\ell) < |X| \leq g(\ell+1)) \\ &\leq C \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \log(\ell) \mathbb{P}(g(\ell) < |X| \leq g(\ell+1)). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Chú ý rằng,

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\log \ell}{\log(\ell^{1/p}(\log \ell)^{-2})} = p.$$

Với ℓ đủ lớn và với $\omega \in (g(\ell) < |X| \leq g(\ell + 1))$, ta có

$$\begin{aligned} \ell \log(\ell) &= \frac{(g(\ell))^p (\log(g(\ell)))^{1+2p}}{(\log \ell)^{-(1+2p)} (\log(\ell^{1/p}(\log \ell)^{-2}))^{(1+2p)}} \\ &\leq C(g(\ell))^p \log^{1+2p}(g(\ell)) \\ &\leq C|X(\omega)|^p (\log |X(\omega)|)^{1+2p}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Từ (2.34), (2.36) và (2.37), ta có

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X| > g(mn)) &\leq C + C\mathbb{E}(|X|^p \log^{1+2p} |X|) \\ &< \infty. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Ta có

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}X^2 \mathbf{1}(|X| \leq g(mn))}{g^2(mn)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(k) \mathbb{E}X^2 \mathbf{1}(|X| \leq g(k))}{g^2(k)} \\ &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(k)(\log k)^4}{k^{2/p}} \sum_{\ell=1}^k \mathbb{E}X^2 \mathbf{1}(g(\ell-1) < |X| \leq g(\ell)) \\ &= C \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=\ell}^{\infty} \frac{d(k)(\log k)^4}{k^{2/p}} \mathbb{E}X^2 \mathbf{1}(g(\ell-1) < |X| \leq g(\ell)) \\ &\leq C \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^{1-2/p} (\log \ell)^5 \mathbb{E}(X^2 \mathbf{1}(g(\ell-1) < |X| \leq g(\ell))). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Với ℓ đủ lớn và với $\omega \in (g(\ell-1) < |X| \leq g(\ell))$, ta có

$$\begin{aligned} \ell^{1-2/p} (\log \ell)^5 &= \frac{(g(\ell))^{p-2} (\log(g(\ell)))^{1+2p}}{(\log \ell)^{-(1+2p)} (\log(\ell^{1/p}(\log \ell)^{-2}))^{(1+2p)}} \\ &\leq C(g(\ell))^{p-2} \log^{1+2p}(g(\ell)) \\ &\leq C|X(\omega)|^{p-2} \log^{1+2p} |X(\omega)|. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Từ (2.34), (2.39) và (2.40), ta có

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}X^2 \mathbf{1}(|X| \leq g(mn))}{g^2(mn)} &\leq C + C\mathbb{E}(|X|^p \log^{1+2p} |X|) \\ &< \infty. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Từ (2.38) và (2.41) ta suy ra

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E} (Y_{m,n} - \mathbb{E}Y_{m,n})^2 \log^2(2m) \log^2(2n)}{(mn)^{2/p}} \\
& \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E} (Y_{m,n} - \mathbb{E}Y_{m,n})^2}{g^2(mn)} \\
& \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mathbb{E}X_{m,n}^2 \mathbf{1}(|X_{m,n}| \leq g(mn))}{g^2(mn)} + \mathbb{P}(|X_{m,n}| > g(m, n)) \right) \\
& \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mathbb{E}X^2 \mathbf{1}(|X| \leq g(mn))}{g^2(mn)} + 2\mathbb{P}(|X| > g(m, n)) \right) \\
& < \infty.
\end{aligned}$$

Chú ý rằng, $\{Y_{m,n} - \mathbb{E}(Y_{m,n}), m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một theo khối, kỳ vọng 0. Từ (2.8) và Định lý 2.1.4, ta suy ra

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \frac{1}{(mn)^{1/p}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (Y_{i,j} - \mathbb{E}Y_{i,j}) = 0 \text{ h.c.c.} \quad (2.42)$$

Từ (2.38), ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_{m,n} \neq Y_{m,n}) & \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_{m,n}| > g(mn)) \\
& < \infty.
\end{aligned} \quad (2.43)$$

Kết hợp (2.42), (2.43) và bổ đề Borel–Cantelli ta suy ra để chứng minh (2.35) ta chỉ cần chứng minh

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \frac{1}{(mn)^{1/p}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{E}Y_{i,j} = 0. \quad (2.44)$$

Để chứng minh (2.44), thứ nhất ta xét trường hợp $p = 1$. Từ $\mathbb{E}X_{m,n} \equiv 0$ ta suy ra

$$\begin{aligned}
& |\mathbb{E}Y_{m,n}| \\
& \leq g(mn)\mathbb{P}(|X_{m,n}| > g(mn)) + |\mathbb{E}(X_{m,n}\mathbf{1}(|X_{m,n}| \leq g(mn)))| \\
& = g(mn)\mathbb{P}(|X_{m,n}| > g(mn)) + |\mathbb{E}(X_{m,n}\mathbf{1}(|X_{m,n}| > g(mn)))| \quad (2.45) \\
& \leq 2\mathbb{E}|X_{m,n}|\mathbf{1}(|X_{m,n}| \geq g(mn)) \\
& \leq 2\mathbb{E}|X|\mathbf{1}(|X| \geq g(mn)) \text{ với mọi } m \geq 1, n \geq 1.
\end{aligned}$$

Từ (2.34) và (2.45), ta có

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}Y_{m,n}| = 0.$$

Do đó,

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{E}Y_{i,j} = 0.$$

Tiếp theo, ta xét trường hợp $1 < p < 2$. Ta có

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mathbb{E}Y_{m,n}|}{(mn)^{1/p}} \\ & \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mathbb{E}Y_{m,n}|}{g(mn)} \\ & \leq 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(|X| \mathbf{1}(|X| > g(mn)))}{g(mn)} \\ & = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(k) \mathbb{E}(|X| \mathbf{1}(|X| > g(k)))}{g(k)} \\ & = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(k)}{g(k)} \sum_{\ell=k}^{\infty} \mathbb{E}(|X| \mathbf{1}(g(\ell) < |X| \leq g(\ell+1))) \\ & \leq C \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\ell} \frac{d(k) (\log k)^2}{k^{1/p}} \mathbb{E}(|X| \mathbf{1}(g(\ell) < |X| \leq g(\ell+1))) \\ & \leq C \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^{1-1/p} (\log \ell)^3 \mathbb{E}(|X| \mathbf{1}(g(\ell) < |X| \leq g(\ell+1))). \end{aligned} \tag{2.46}$$

Với ℓ đủ lớn và với $\omega \in (g(\ell) < |X| \leq g(\ell+1))$,

$$\begin{aligned} \ell^{1-1/p} (\log \ell)^3 &= \frac{(g(\ell))^{p-1} (\log(g(\ell)))^{1+2p}}{(\log \ell)^{-(1+2p)} (\log(\ell^{1/p} (\log \ell)^{-2}))^{(1+2p)}} \\ &\leq C (g(\ell))^{p-1} \log^{1+2p}(g(\ell)) \\ &\leq C |X(\omega)|^{p-1} (\log |X(\omega)|)^{1+2p}. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Từ (2.34), (2.46) và (2.47) ta suy ra

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mathbb{E}Y_{m,n}|}{(mn)^{1/p}} &\leq C + C \mathbb{E}(|X|^p \log^{1+2p} |X|) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Áp dụng bổ đề Kronecker ta suy ra (2.44). □

Áp dụng Bổ đề 2.1.1 và Định lý 2.2.2 ta có kết quả sau đây.

Hệ quả 2.2.3. *Giả sử $1 \leq p < 2$ và giả sử $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một theo khối, kỳ vọng 0. Nếu $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X thoả mãn (2.34) thì*

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \frac{1}{(mn)^{1/p}} \max_{k \leq m, \ell \leq n} \left| \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} X_{i,j} \right| = 0 \text{ h.c.c.}$$

Hệ quả sau đây là một luật mạnh số lớn dạng Marcinkiewicz–Zygmund cho mảng kép các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một theo khối với điều kiện monent bị chặn đều.

Hệ quả 2.2.4. *Giả sử $1 \leq p < 2$ và giả sử $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một theo khối thoả mãn*

$$\sup_{m \geq 1, n \geq 1} \mathbb{E} (|X_{m,n}|^p (\log |X_{m,n}|)^{2p+2} (\log \log |X_{m,n}|)^2) < \infty. \quad (2.48)$$

Khi đó

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \frac{1}{(mn)^{1/p}} \max_{k \leq m, \ell \leq n} \left| \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} X_{i,j} \right| = 0 \text{ h.c.c.} \quad (2.49)$$

Chứng minh. Áp dụng Mệnh đề 3.2 của Dzung và Thành [8], từ (2.48) ta suy ra tồn tại biến ngẫu nhiên X thoả mãn $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ bị chặn ngẫu nhiên bởi X và

$$\mathbb{E} (|X|^p (\log |X|)^{2p+1}) < \infty.$$

Do đó, áp dụng Hệ quả 2.2.3 ta suy ra

$$\lim_{m \vee n \rightarrow \infty} \frac{1}{(mn)^{1/p}} \max_{k \leq m, \ell \leq n} \left| \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} X_{i,j} \right| = 0 \text{ h.c.c.}$$

□

2.3. SỰ HỘI TỤ THEO TRUNG BÌNH CHO TỔNG KÉP CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN PHỤ THUỘC THEO KHỐI

Định lý 2.5 của Hong và Hwang [3] đã xây dựng sự hội tụ trong L^1 cho tổng kép các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một. Đó là, nếu $1 < p < 2$ và

$\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một và bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X thoả mãn

$$\mathbb{E}(|X|^p \log |X|) < \infty,$$

thì

$$\frac{1}{(mn)^{1/p}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{i,j} - \mathbb{E}X_{i,j}) \rightarrow 0 \text{ trong } L^1 \text{ khi } m \vee n \rightarrow \infty.$$

Trong mục này, chúng tôi mở rộng Định lý 2.5 của Hong và Hwang [3] cho mảng kép các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một theo khối. Phương pháp chứng minh của Hong và Hwang [3] không áp dụng đối với mảng kép các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một theo khối ngay cả với $M = 0$. Để đạt được các kết quả ở đây, chúng tôi phải phát triển một kỹ thuật mới để áp dụng được trong cấu trúc phụ thuộc trong mỗi khối. Kỹ thuật này hoàn toàn khác với kỹ thuật trong [3].

Định lý 2.3.1. *Giả sử $1 < p < 2$ và giả sử $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một theo khối và bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X thoả mãn*

$$\mathbb{E}(|X|^p \log |X|) < \infty. \quad (2.50)$$

Khi đó

$$\frac{1}{(mn)^{1/p}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{i,j} - \mathbb{E}X_{i,j}) \rightarrow 0 \text{ trong } L^1 \text{ khi } m \vee n \rightarrow \infty. \quad (2.51)$$

Chứng minh. Với $m \geq 1, n \geq 1$, đặt

$$\begin{aligned} Y_{m,n} &= -(mn)^{1/p} \mathbf{1}(X_{m,n} < -(mn)^{1/p}) + X_{m,n} \mathbf{1}(|X_{m,n}| \leq (mn)^{1/p}) \\ &\quad + (mn)^{1/p} \mathbf{1}(X_{m,n} > (mn)^{1/p}), \\ Z_{m,n} &= X_{m,n} - Y_{m,n}. \end{aligned}$$

Với $m \geq 0, n \geq 0$, đặt

$$\tau_{m,n} = \frac{1}{2^{(m+1)/p} 2^{(n+1)/p}} \left| \sum_{i=2^m}^{2^{m+1}-1} \sum_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} (Y_{i,j} - \mathbb{E}Y_{i,j}) \right|.$$

Chú ý rằng,

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(|X| \mathbf{1}(|X| > (mn)^{1/p}))}{(mn)^{1/p}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(k) \mathbb{E}(|X| \mathbf{1}(|X| > k^{1/p}))}{k^{1/p}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(k)}{k^{1/p}} \sum_{\ell=k}^{\infty} \mathbb{E}(|X| \mathbf{1}(\ell^{1/p} < |X| \leq (\ell+1)^{1/p})) \\
&= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\ell} \frac{d(k)}{k^{1/p}} \mathbb{E}(|X| \mathbf{1}(\ell^{1/p} < |X| \leq (\ell+1)^{1/p})) \tag{2.52} \\
&\leq C \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^{1-1/p} \log \ell \mathbb{E}(|X| \mathbf{1}(\ell^{1/p} < |X| \leq (\ell+1)^{1/p})) \\
&\quad \text{(do (2.31))} \\
&\leq C \mathbb{E}(|X|^p \log |X|) \\
&< \infty \quad \text{(do (2.50))},
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(X^2 \mathbf{1}(|X| \leq (mn)^{1/p}))}{(mn)^{2/p}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(k) \mathbb{E}(X^2 \mathbf{1}(|X| \leq k^{1/p}))}{k^{2/p}} \\
&\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(k)}{k^{2/p}} \sum_{\ell=1}^k \mathbb{E}(X^2 \mathbf{1}((\ell-1)^{1/p} < |X| \leq \ell^{1/p})) \\
&= C \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=\ell}^{\infty} \frac{d(k)}{k^{2/p}} \mathbb{E}(X^2 \mathbf{1}((\ell-1)^{1/p} < |X| \leq \ell^{1/p})) \tag{2.53} \\
&\leq C \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^{1-2/p} \log \ell \mathbb{E}(X^2 \mathbf{1}((\ell-1)^{1/p} < |X| \leq \ell^{1/p})) \\
&\quad \text{(do (2.32))} \\
&\leq C \mathbb{E}(|X|^p \log |X|) \\
&< \infty \quad \text{(do (2.50))}.
\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}Y_{m,n}^2}{(mn)^{2/p}} \\
& \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mathbb{E}(X_{m,n}^2 \mathbf{1}(|X_{m,n}| \leq (mn)^{1/p}))}{(mn)^{2/p}} + \mathbb{P}(|X_{m,n}| > (mn)^{1/p}) \right) \\
& \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mathbb{E}(X^2 \mathbf{1}(|X| \leq (mn)^{1/p}))}{(mn)^{2/p}} + 2\mathbb{P}(|X| > (mn)^{1/p}) \right) \\
& \quad (\text{do (1.18)}) \\
& \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mathbb{E}(X^2 \mathbf{1}(|X| \leq (mn)^{1/p}))}{(mn)^{2/p}} + \frac{2}{(mn)^{1/p}} \mathbb{E}(|X| \mathbf{1}(|X| > (mn)^{1/p})) \right) \\
& < \infty \quad (\text{do (2.52) và (2.53)}).
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Chú ý rằng $\{Y_{m,n} - \mathbb{E}Y_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một theo khối, kỳ vọng 0. Từ Bổ đề 1.2.10 suy ra với $m \geq 0, n \geq 0$ ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\tau_{m,n}^2 & \leq \frac{1}{2^{2(m+1)/p} 2^{2(n+1)/p}} \sum_{i=2^m}^{2^{m+1}-1} \sum_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} \mathbb{E}(Y_{i,j} - \mathbb{E}Y_{i,j})^2 \\
& \leq C \sum_{i=2^m}^{2^{m+1}-1} \sum_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{\mathbb{E}Y_{i,j}^2}{(ij)^{2/p}}.
\end{aligned}$$

Từ đó và (2.54) suy ra

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\tau_{m,n}^2 < \infty.$$

Do đó

$$\tau_{m,n} \rightarrow 0 \text{ trong } L^2 \text{ (khi } m \vee n \rightarrow \infty)$$

và do đó

$$\tau_{m,n} \rightarrow 0 \text{ trong } L^1 \text{ khi } m \vee n \rightarrow \infty. \tag{2.55}$$

Từ (2.55) và bổ đề Toeplitz suy ra

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2^{k/p} 2^{\ell/p}} \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^{2^{k+1}-1} \sum_{j=1}^{2^{\ell+1}-1} (Y_{i,j} - \mathbb{E}Y_{i,j}) \right| \\
& \leq \sum_{u=0}^k \sum_{v=0}^{\ell} \frac{2^{(u+1)/p} 2^{(v+1)/p}}{2^{k/p} 2^{\ell/p}} \mathbb{E}\tau_{u,v} \rightarrow 0 \text{ khi } k \vee \ell \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Giả sử $2^k \leq m < 2^{k+1}$, $2^\ell \leq n < 2^{\ell+1}$, ta có

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left| \frac{1}{(mn)^{1/p}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (Y_{i,j} - \mathbb{E}Y_{i,j}) \right| \\ & \leq \frac{1}{2^{k/p} 2^{\ell/p}} \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^{2^{k+1}-1} \sum_{j=1}^{2^{\ell+1}-1} (Y_{i,j} - \mathbb{E}Y_{i,j}) \right| + I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned} \quad (2.57)$$

trong đó

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{(mn)^{1/p}} \mathbb{E} \left| \sum_{i=m+1}^{2^{k+1}-1} \sum_{j=1}^{2^{\ell+1}-1} (Y_{i,j} - \mathbb{E}Y_{i,j}) \right|, \\ I_2 &= \frac{1}{(mn)^{1/p}} \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^{2^{k+1}-1} \sum_{j=n+1}^{2^{\ell+1}-1} (Y_{i,j} - \mathbb{E}Y_{i,j}) \right|, \end{aligned}$$

và

$$I_3 = \frac{1}{(mn)^{1/p}} \mathbb{E} \left| \sum_{i=m+1}^{2^{k+1}-1} \sum_{j=n+1}^{2^{\ell+1}-1} (Y_{i,j} - \mathbb{E}Y_{i,j}) \right|.$$

Với $2^k \leq m < 2^{k+1}$, $2^\ell \leq n < 2^{\ell+1}$, ta có

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \frac{1}{(mn)^{1/p}} \sqrt{\mathbb{E} \left| \sum_{i=m+1}^{2^{k+1}-1} \sum_{j=n+1}^{2^{\ell+1}-1} (Y_{i,j} - \mathbb{E}Y_{i,j}) \right|^2} \\ &\leq \frac{C}{(mn)^{1/p}} \sqrt{\sum_{i=m+1}^{2^{k+1}-1} \sum_{j=n+1}^{2^{\ell+1}-1} \mathbb{E}Y_{i,j}^2} \\ &\quad (\text{do Bổ đề 1.2.10}) \\ &\leq \frac{C}{(mn)^{1/p}} \sqrt{\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}-1} \sum_{j=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}-1} \mathbb{E}Y_{i,j}^2} \leq C \sqrt{\sum_{i=2^k}^{\infty} \sum_{j=2^\ell}^{\infty} \frac{\mathbb{E}Y_{i,j}^2}{(ij)^{2/p}}} \\ &\rightarrow 0 \text{ khi } k \vee \ell \rightarrow \infty \quad (\text{do (2.54)}), \end{aligned} \quad (2.58)$$

và

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \frac{1}{(mn)^{1/p}} \sum_{h=0}^{\ell} \mathbb{E} \left| \sum_{i=m+1}^{2^{k+1}-1} \sum_{j=2^h}^{2^{h+1}-1} (Y_{i,j} - \mathbb{E}Y_{i,j}) \right| \\
&\leq \frac{1}{(mn)^{1/p}} \sum_{h=0}^{\ell} \sqrt{\mathbb{E} \left| \sum_{i=m+1}^{2^{k+1}-1} \sum_{j=2^h}^{2^{h+1}-1} (Y_{i,j} - \mathbb{E}Y_{i,j}) \right|^2} \\
&\quad (\text{do Bổ đề 1.2.10}) \\
&\leq \frac{C}{(mn)^{1/p}} \sum_{h=0}^{\ell} \sqrt{\sum_{i=m+1}^{2^{k+1}-1} \sum_{j=2^h}^{2^{h+1}-1} \mathbb{E}Y_{i,j}^2} \\
&\leq C2^{-\ell/p} \sum_{h=0}^{\ell} \frac{2^{h/p}}{2^{(h+1)/p} 2^{(k+1)/p}} \sqrt{\sum_{i=m+1}^{2^{k+1}-1} \sum_{j=2^h}^{2^{h+1}-1} \mathbb{E}Y_{i,j}^2} \\
&\leq C2^{-\ell/p} \sum_{h=0}^{\ell} 2^{h/p} \sqrt{\sum_{i=m+1}^{2^{k+1}-1} \sum_{j=2^h}^{2^{h+1}-1} \frac{\mathbb{E}Y_{i,j}^2}{(ij)^{2/p}}} \\
&\leq C2^{-\ell/p} \sum_{h=0}^{\ell} 2^{h/p} \sqrt{\sum_{i=2^k}^{\infty} \sum_{j=2^h}^{\infty} \frac{\mathbb{E}Y_{i,j}^2}{(ij)^{2/p}}} \\
&\rightarrow 0 \text{ khi } k \vee \ell \rightarrow \infty \quad (\text{do (2.54) và Bổ đề 1.1.7}),
\end{aligned} \tag{2.59}$$

áp dụng thuật toán tương tự như trong (2.59), ta chứng minh được

$$I_2 \leq C2^{-k/p} \sum_{h=0}^k 2^{h/p} \sqrt{\sum_{i=2^h}^{\infty} \sum_{j=2^\ell}^{\infty} \frac{\mathbb{E}Y_{i,j}^2}{(ij)^{2/p}}} \rightarrow 0 \text{ khi } k \vee \ell \rightarrow \infty, \tag{2.60}$$

Kết hợp (2.56)–(2.60) ta suy ra

$$\frac{1}{(mn)^{1/p}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (Y_{i,j} - \mathbb{E}Y_{i,j}) \rightarrow 0 \text{ trong } L^1 \text{ khi } m \vee n \rightarrow \infty. \tag{2.61}$$

Với $m \geq 1, n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|Z_{m,n} - \mathbb{E}Z_{m,n}| &\leq 2\mathbb{E}|Z_{m,n}| \\
&\leq 2(mn)^{1/p} \mathbb{P}(|X_{m,n}| > (mn)^{1/p}) + 2\mathbb{E}(|X_{m,n}| \mathbf{1}(|X_{m,n}| > (mn)^{1/p})) \\
&\leq 4\mathbb{E}(|X_{m,n}| \mathbf{1}(|X_{m,n}| > (mn)^{1/p})) \leq 4\mathbb{E}(|X| \mathbf{1}(|X| > (mn)^{1/p})) \\
&\quad (\text{do (1.17)}).
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Kết hợp (2.52) và (2.62), ta có

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|Z_{m,n} - \mathbb{E}Z_{m,n}|}{(mn)^{1/p}} < \infty.$$

Từ bổ đề Kronecker ta suy ra

$$\frac{1}{(mn)^{1/p}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (Z_{i,j} - \mathbb{E}Z_{i,j}) \rightarrow 0 \text{ trong } L^1 \text{ khi } m \vee n \rightarrow \infty. \quad (2.63)$$

Kết hợp (2.61) và (2.63) ta suy ra (2.51). $\square$

Ví dụ sau đây minh hoạ cho Định lý 2.3.1.

Ví dụ 2.3.2. Giả sử $1 < p < 2$ và giả sử $\{Y_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng kép các biến ngẫu nhiên 0-phụ thuộc âm đôi một, cùng phân phối, không suy biến thoả mãn

$$\mathbb{E}(|Y_1|^p \log |Y_1|) < \infty.$$

Đặt

$$X_{i,j} = Y_{i-2^k+1, j-2^\ell+1}, \quad 2^k \leq i < 2^{k+1}, \quad 2^\ell \leq j < 2^{\ell+1}, \quad k \geq 0, \quad \ell \geq 0.$$

Khi đó $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là mảng kép các biến ngẫu nhiên 0-phụ thuộc âm đôi một theo khối nhưng không là M -phụ thuộc âm đôi một với mọi số nguyên dương M . Áp dụng Định lý 2.3.1, ta suy ra

$$\frac{1}{(mn)^{1/p}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{i,j} - \mathbb{E}X_{i,j}) \rightarrow 0 \text{ trong } L^1 \text{ khi } m \vee n \rightarrow \infty.$$

Vì $\{X_{m,n}, m \geq 1, n \geq 1\}$ là không độc lập đôi một nên chúng ta không thể áp dụng Định lý 2.5 của Hong và Hwang [3].

KẾT LUẬN - KIẾN NGHỊ

Kết quả đã đạt được:

- Xây dựng luật mạnh số lớn dạng Loève cho mảng kép các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một theo khối. Kết quả thu được là Định lý 2.1.3, Định lý 2.1.4 và Định lý 2.1.8.
- Xây dựng luật mạnh số lớn dạng Marcinkiewicz–Zygmund cho mảng kép các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một theo khối. Kết quả thu được là Định lý 2.2.2.
- Xây dựng kết quả hội tụ trong L^1 cho tổng kép các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một theo khối. Kết quả thu được là Định lý 2.3.1.

Hướng phát triển:

- Xây dựng luật mạnh số lớn dạng Loève và luật mạnh số lớn dạng Marcinkiewicz–Zygmund cho mảng kép các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một theo khối đối với các khối bất kỳ và mở rộng sang phần tử ngẫu nhiên nhận giá trị không gian Hilbert.
- Xây dựng kết quả hội tụ trong L^1 cho tổng kép các biến ngẫu nhiên M -phụ thuộc âm đôi một theo khối đối với các khối bất kỳ và mở rộng sang phần tử ngẫu nhiên nhận giá trị không gian Hilbert.

**DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH
CỦA TÁC GIẢ (NHÓM TÁC GIẢ) ĐÃ CÔNG BỐ
CÓ LIÊN QUAN ĐẾN NỘI DUNG ĐỀ TÀI**

Vu Thi Ngoc Anh, Nguyen Thi Thanh Hien, “A Strong Limit Theorem for Double Arrays of Dependent Random Variables”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, accepted 2022.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] S. Csörgő, K. Tandori and V. Totik (1983), “On the strong law of large numbers for pairwise independent random variables”, *Acta Mathematica Hungarica*, 42, 319–330.
- [2] E.B. Czerebak-Mrozowicz, I. Oleg and Z. Rychlik (2002), “Marcinkiewicz-type strong law of large numbers for pairwise independent random fields”, *Probability and Mathematical Statistics*, 22, 127–139.
- [3] D.H. Hong, S.Y. Hwang (1999), “Marcinkiewicz-type strong law of large numbers for double arrays of pairwise independent random variables”, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 22, 171–177.
- [4] O. Klesov (2014), *Limit theorems for multi-indexed sums of random variables*, Springer-Verlag, New York.
- [5] E. L. Lehmann (1966), “Some concepts of dependence”, *The Annals of Mathematical Statistics*, 37, 1137–1153.
- [6] F. Móricz (1977), “Moment inequalities for the maximum of partial sums of random fields”, *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 39, 353–366.
- [7] F. Móricz (1981), The Kronecker lemmas for multiple series and some applications, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 37, 39–50.
- [8] N.C. Dzung and L.V. Thành (2021), “On the complete convergence for sequences of dependent random variables via stochastic domination conditions and regularly varying functions theory”, *arXiv2107.12690 Preprint*, 1–18.
- [9] R. Parker and A. Rosalsky (2017), “On complete convergence in mean for double sums of independent random elements in Banach spaces”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 38, 177–191.

- [10] A. Rosalsky and L.V. Thanh (2021), “A note on the stochastic domination condition and uniform integrability with applications to the strong law of large numbers”, *Statistics and Probability Letters*, 178, 109181.
- [11] S.H. Sung (2014), “Marcinkiewicz–Zygmund Type Strong Law of Large Numbers for Pairwise i.i.d. Random Variables”, *Journal of Theoretical Probability*, 27, 96–106.
- [12] U. Stadtmüller and L. V. Thành (2011), “On the strong limit theorems for double arrays of blockwise M -dependent random variables”, *Acta Mathematica Sinica, English*, 27, 1923-1934.
- [13] V. T. N. Anh (2014), “A strong law of large numbers for sequences of pairwise negative quadrant m -dependent random variables”, *Journal of science - Vinh university*, 43, no. 3A, 5-10.
- [14] V.T.V. Anh, N.T.N. Anh, N.T.T. Hien, N.N. Tu (2022), “Convergence in mean for double arrays of M -pairwise negatively dependent random variables”, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 45, 1507–1520.