

TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ
KHOA SƯ PHẠM TIỂU HỌC – MẦM NON

Phạm Vũ Hương Giang

KHÓA LUẬN TỐT NGHIỆP

MỘT SỐ BÀI TOÁN TÍNH TỔNG
CÓ QUY LUẬT ĐẶC BIỆT Ở TIỂU HỌC

Mã sinh viên: 2552020352

Ngành: Giáo dục Tiểu học

NINH BÌNH, 2025

TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ
KHOA SƯ PHẠM TIỂU HỌC – MẦM NON

Phạm Vũ Hương Giang

KHOÁ LUẬN TỐT NGHIỆP

MỘT SỐ BÀI TOÁN TÍNH TỔNG
CÓ QUY LUẬT ĐẶC BIỆT Ở TIỂU HỌC

Mã sinh viên: 2552020352

Ngành: Giáo dục Tiểu học

Người hướng dẫn: ThS. Bùi Thị Hải Yến

NINH BÌNH, 2025

LỜI CẢM ƠN

Trước hết, em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới ThS. Bùi Thị Hải Yến – người đã tận tình hướng dẫn, chỉ bảo em trong suốt quá trình thực hiện khoá luận tốt nghiệp. Nhờ sự giúp đỡ quý báu, những góp ý chân thành và sự đồng hành của cô mà em đã hoàn thành tốt đề tài “Một số bài toán tính tổng có quy luật đặc biệt ở Tiểu học”.

Em cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành tới các thầy cô trong khoa Sư phạm Tiểu học – Mầm non của trường Đại học Hoa Lư, những người đã cho em kiến thức, kỹ năng và tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình em học tập và nghiên cứu.

Do đây là lần đầu tiên em tiếp cận với một đề tài này nên không tránh khỏi những thiếu sót. Em rất mong nhận được sự góp ý, chỉ dẫn của các thầy cô để đề tài của em được hoàn thiện hơn.

Em xin chân thành cảm ơn!

LỜI CAM ĐOAN

Tôi tên là Phạm Vũ Hương Giang, hiện đang là sinh viên lớp D14TH2, khoa Sư phạm Tiểu học – Mầm non, trường Đại học Hoa Lư. Tôi xin cam đoan rằng khoá luận tốt nghiệp với đề tài “Một số bài toán tính tổng có quy luật đặc biệt ở Tiểu học” là kết quả của quá trình nghiên cứu do chính tôi thực hiện. Toàn bộ số liệu, thông tin và tài liệu được sử dụng trong khoá luận này đều được thu thập từ các nguồn gốc của các tài liệu tham khảo, theo đúng quy định về bản quyền, dưới sự hướng dẫn tận tình của ThS. Bùi Thị Hải Yến.

Tôi xin chịu hoàn toàn trách nhiệm về tính chính xác và trung thực của các nội dung, số liệu và thông tin được trình bày trong khoá luận. Nếu có bất kì sự gian lận nào tôi xin chịu hoàn toàn trách nhiệm trước hội đồng cũng như kết quả khoá luận của mình.

Ninh Bình, ngày tháng năm 2025

Người thực hiện

Phạm Vũ Hương Giang

XÁC NHẬN CỦA GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN

Đề tài “**Một số bài toán tính tổng có quy luật đặc biệt ở Tiểu học**” là công trình nghiên cứu của sinh viên Phạm Vũ Hương Giang không trùng lặp với bất kì đề tài nào trước đó. Trong đề tài có sự tham khảo một số tài liệu có nguồn gốc và được trích dẫn rõ ràng, rành mạch.

Ninh Bình, ngày tháng năm 2025

Người hướng dẫn

ThS. Bùi Thị Hải Yến

Mục Lục

MỞ ĐẦU	1
NỘI DUNG.....	4
Chương 1.....	4
CƠ SỞ LÝ LUẬN.....	4
1.1 . Vị trí, vai trò của hoạt động giải toán trong dạy và học Toán ở Tiểu học.....	4
1.2 . Quy trình chung để giải một bài toán ở Tiểu học.....	5
1.3. Tìm hiểu về các bài toán tính tổng ở Tiểu học	6
KẾT LUẬN CHƯƠNG 1	9
Chương 2.....	10
MỘT SỐ BÀI TOÁN TÍNH TỔNG	10
CÓ QUY LUẬT ĐẶC BIỆT Ở TIỂU HỌC.....	10
2.1. Bài toán tính tổng các dãy số tự nhiên có quy luật.....	10
2.1.1. Tính tổng các dãy số tự nhiên cách đều	10
2.1.2. Tính tổng các dãy số tự nhiên có quy luật nhân	15
2.1.3. Tính tổng các dãy số tự nhiên có quy luật khác.....	17
2.1.4. Bài tập đề xuất.....	20
2.2. Bài toán tính tổng các phân số dạng đặc biệt.....	25
2.2.1. Tính tổng các phân số có quy luật nhân	25
2.2.2. Tính tổng các phân số có quy luật khác.....	27
2.2.3. Bài tập đề xuất.....	35
2.3. Bài toán tính nhanh các giá trị biểu thức	42
2.3.1. Ví dụ	42
2.3.2. Bài tập đề xuất.....	45
KẾT LUẬN CHƯƠNG 2	50
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ.....	51
DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	52

MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài

Trong hệ thống giáo dục quốc dân, Tiểu học được coi là bậc học nền móng. Các môn học ở bậc Tiểu học nói chung và môn Toán nói riêng góp phần không nhỏ vào việc góp phần hình thành và phát triển phẩm chất, năng lực của học sinh. Môn Toán ở Tiểu học có rất nhiều ứng dụng trong cuộc sống, là cơ sở cho việc học tập các môn học khác và học tiếp ở các lớp trên. Môn Toán Tiểu học góp phần quan trọng trong việc rèn luyện tư duy, suy luận, giải quyết vấn đề, hình thành các phẩm chất cần thiết và quan trọng của con người như: chăm chỉ, cẩn thận, có ý chí vượt khó...

Trong nội dung chương trình Toán Tiểu học, tính tổng có quy luật đặc biệt là một trong những nội dung trọng tâm của chương trình Toán Tiểu học và thường xuyên xuất hiện trong các bài tập, các đề thi, đặc biệt là các đề thi học sinh giỏi. Bên cạnh đó, dạy học về tính tổng có quy luật đặc biệt còn giúp học sinh được củng cố và hệ thống các kiến thức của nội dung số và phép tính: đọc, viết số, rèn luyện kỹ năng thực hiện phép tính, tính chất của các phép tính. Tuy nhiên, do tính trừu tượng và đa dạng của các quy luật, nhiều học sinh gặp khó khăn trong việc nhận biết và vận dụng để giải toán. Điều này khiến học sinh thường khá lúng túng, mơ hồ và sai lầm; khó tìm ra hướng giải quyết và thường nhầm lẫn từ dạng này sang dạng khác, không phát hiện ra quy luật đặc biệt của phép tính và cách giải, gây không ít khó khăn trong quá trình dạy và học dẫn đến việc mất tự tin và giảm hứng thú với môn Toán.

Xuất phát từ những lý do trên, tôi đã lựa chọn đề tài **“Một số bài toán tính tổng có quy luật đặc biệt ở Tiểu học”** làm đề tài khóa luận tốt nghiệp. Đề tài tổng hợp các dạng toán tính tổng có quy luật đặc biệt ở Tiểu học, từ đó giúp bản thân và các em học sinh Tiểu học được rèn luyện giải các bài toán về tính tổng có quy luật đặc biệt, đồng thời góp phần nâng cao chất lượng học tập môn Toán cho học sinh Tiểu học.

2. Tổng quan tình hình nghiên cứu

Một trong những nội dung kiến thức được quan tâm hiện nay là dạy học các bài toán liên quan đến tính tổng có quy luật đặc biệt. Theo sự tìm hiểu của

tôi về những nghiên cứu xoay quanh nội dung, trong đó có một số các đề tài như:

Nguyễn Ngọc Giang ([8]) đã dựa trên cơ sở nội dung, chương trình dạy học giải toán ở Tiểu học nói chung và ở lớp 4, 5 nói riêng, tìm hiểu về các dạng toán về bài toán tính tổng có quy luật đặc biệt trong chương trình ở Tiểu học để giúp học sinh nắm bắt được các kiến thức cần ghi nhớ trước khi áp dụng vào giải các bài toán tính tổng có quy luật đặc biệt. Trên cơ sở đó, học sinh nắm được cách giải các bài toán tính tổng có quy luật đặc biệt được phân chia theo dạng từ dễ đến khó.

Trần Thị Kim Cương – Tạ Hoàng Đồng ([2]) đã củng cố kiến thức cơ bản về các dạng toán về cấp số cộng, cấp số nhân..., đề ra một số giải pháp nhằm khắc phục những khó khăn, sai lầm của học sinh khi giải toán có liên quan đến dạng toán tính tổng của cấp số cộng và cấp số nhân.

Võ Thị Hoài Tâm – Nguyễn Hùng Tân – Nguyễn Thị Thanh Phương ([27]) đã nghiên cứu về các phép suy luận, tư duy trong dạy học các bài toán tính tổng có quy luật đặc biệt ở chương trình toán lớp 4.

Có thể thấy rằng, hiện nay, đã có các đề tài nghiên cứu nội dung về bài toán tính tổng có quy luật đặc biệt trong chương trình Toán ở bậc Tiểu học. Tuy nhiên, các đề tài thường nghiên cứu theo chương trình khối lớp và việc hệ thống hoá các dạng bài toán tính tổng có quy luật đặc biệt còn hạn chế. Vì vậy, việc tổng hợp các dạng bài toán tính tổng có quy luật đặc biệt ở Tiểu học là cần thiết, nhằm tạo ra tài liệu tham khảo cho giáo viên và học sinh, từ đó nâng cao chất lượng dạy và học môn Toán tại các trường Tiểu học.

3. Mục đích nghiên cứu, nhiệm vụ nghiên cứu

3.1. Mục đích nghiên cứu

Mục đích nghiên cứu của đề tài là tổng hợp các dạng bài toán tính tổng có quy luật đặc biệt ở Tiểu học.

3.2. Nhiệm vụ nghiên cứu

- Phân dạng các bài toán về tính tổng có quy luật đặc biệt ở Tiểu học; giải các bài toán về tính tổng có quy luật đặc biệt ở Tiểu học.

- Đề xuất thêm bài toán theo các dạng bài toán về tính tổng có quy luật đặc biệt.

4. Đối tượng nghiên cứu, phạm vi nghiên cứu

4.1. Đối tượng nghiên cứu

Các bài toán về tính tổng ở bậc Tiểu học.

4.2. Phạm vi nghiên cứu

Các bài toán tính tổng có quy luật đặc biệt ở Tiểu học.

5. Phương pháp nghiên cứu

5.1. Phương pháp nghiên cứu lý luận

Đọc và tìm hiểu, nghiên cứu các tài liệu liên quan đến đề tài.

5.2. Phương pháp phỏng vấn

Xin ý kiến của một số thầy cô giáo ở bộ môn Toán của Trường Đại học Hoa Lư và ở trường Tiểu học.

5.3. Phương pháp phân tích, tổng hợp

Phân tích, so sánh, hệ thống hóa, khái quát hóa các vấn đề nghiên cứu có liên quan đến đề tài.

6. Ý nghĩa khoa học và ý nghĩa thực tiễn

6.1 Ý nghĩa khoa học

Đề tài góp phần tổng hợp các dạng bài toán tính tổng có quy luật đặc biệt ở Tiểu học.

6.2 Ý nghĩa thực tiễn

Đề tài sẽ trở thành nguồn tài liệu tham khảo hữu ích cho các sinh viên chuyên ngành Giáo dục Tiểu học của Trường Đại học Hoa Lư, giáo viên dạy Tiểu học và những người quan tâm đến vấn đề này.

NỘI DUNG

Chương 1

CƠ SỞ LÝ LUẬN

1.1. Vị trí, vai trò của hoạt động giải toán trong dạy và học Toán ở Tiểu học

Môn toán ở Tiểu học là một môn học thống nhất không chia thành các phân môn. Theo Chương trình Giáo dục phổ thông mới (2018), Chương trình toán ở Tiểu học bao gồm các tuyến kiến thức: Số và phép tính, hình học và đo lường, thống kê và xác suất. Các tuyến kiến thức này luôn được sắp xếp xen kẽ, hỗ trợ lẫn nhau.

Trong hoạt động dạy và học toán ở Tiểu học, giải toán có một vị trí quan trọng. Thông qua hoạt động giải toán, học sinh biết vận dụng các khái niệm, quy tắc, công thức đã học để xử lý những tình huống đặt ra trong toán học, trong các môn học khác và trong thực tế đời sống lao động sản xuất. Đồng thời, thông qua hoạt động giải toán, giáo viên có thể phát hiện những ưu điểm cũng như thiếu sót của học sinh về kiến thức, kỹ năng và tư duy để có biện pháp kịp thời trong giảng dạy.

Mặt khác, cũng thông qua hoạt động giải toán, học sinh được rèn luyện ý chí khắc phục và vượt qua khó khăn, lòng say mê tìm tòi, sáng tạo trong học tập. Hình thành cho học sinh thói quen làm việc có kế hoạch, có kiểm tra kết quả. Từng bước hình thành và rèn luyện cho học sinh thói quen suy nghĩ độc lập, linh hoạt, khả năng trình bày, diễn đạt vấn đề một cách chặt chẽ, mạch lạc.

Như chúng ta đã biết, chương trình môn Toán ở Tiểu học được chia làm 3 mạch kiến thức chính. Ở các mạch kiến thức đó thì số học là mạch kiến thức quan trọng của môn học, đóng vai trò hạt nhân. Hiện nay, phong trào giải Toán trên internet được triển khai rộng rãi, học sinh hưởng ứng tham gia đông đảo. Trong mạch kiến thức số học, thì các bài toán về dãy số liên tục xuất hiện ở các kì thi Violympic và trong các kì thi chọn học sinh giỏi. Việc giúp học sinh phát hiện ra quy luật của dãy số và tìm cách giải các bài toán về dãy số là việc làm hết sức quan trọng, giúp học sinh có khả năng phân tích, tổng hợp, tư duy nhằm nâng cao chất lượng học toán và đáp ứng các kì thi. Ngoài ra, nó còn giúp

học sinh phát triển tư duy lô-gíc, trí tưởng tượng không gian, sự tìm tòi sáng tạo, phương pháp suy luận. Đồng thời giúp học sinh rèn kĩ năng thực hành, vận dụng kiến thức vào thực tiễn cuộc sống.

1.2. Quy trình chung để giải một bài toán ở Tiểu học

Hướng dẫn học sinh hình thành kĩ năng giải toán là một hoạt động khó bởi mỗi bài toán là sự kết hợp đa dạng nhiều quan hệ toán học. Hoạt động giải toán gây nhiều khó khăn đối với một số học sinh bởi giải toán yêu cầu học sinh nắm rõ các khái niệm toán học, quan hệ toán học, cần có tư duy logic để nắm rõ đề bài, yêu cầu bài toán. Bên cạnh đó, sự phát triển chưa hoàn thiện về tri giác, trí nhớ, tư duy, tưởng tượng cũng hạn chế phần nào khả năng giải toán của học sinh Tiểu học.

Để giúp học sinh giải toán đạt hiệu quả, hình thành tư duy suy luận logic với mỗi bài toán, thông thường, người giáo viên thường hướng dẫn học sinh nắm vững 4 bước của quá trình giải toán:

Bước 1: Tìm hiểu đề bài

Một đề bài toán có thể là sự kết hợp giữa ba ngôn ngữ: Ngôn ngữ tự nhiên, ngôn ngữ toán học và ngôn ngữ kí hiệu. Để hiểu được đề bài, học sinh cần phải đọc kĩ đề bài, hiểu được ý nghĩa của các thuật ngữ. Một trong những việc làm giúp học sinh hiểu đề bài là yêu cầu học sinh nhắc lại đề bài theo cách diễn tả của mình, từ đó giúp học sinh nắm được: Những dữ kiện bài toán, những ẩn số, những điều kiện (quan hệ giữa các dữ kiện và ẩn số).

Bước 2: Phân tích đề bài, lập kế hoạch giải

Lập kế hoạch giải là đi tìm hướng giải cho bài toán. Muốn giải đáp những yêu cầu của đề bài thì cần phải biết những gì? Những điều đó đề bài đã cho biết chưa? Nếu chưa biết thì tìm bằng cách nào? dựa vào đâu để tìm? Cứ lần lượt như vậy cho đến khi nào học sinh có thể tìm được cách giải đáp từ những dữ kiện cho sẵn trong đề bài.

Đây là hoạt động tư duy khó với học sinh Tiểu học. Song lại là một hoạt động quan trọng của quá trình giải toán, nên giáo viên cần kiên trì dẫn dắt giúp học sinh tìm được cách giải bài toán.

Bước 3: Trình bày lời giải

Đây là bước học sinh trình bày lời giải một cách hoàn chỉnh dựa vào bước 2.

Bước 4: Kiểm tra lời giải và đánh giá cách giải

Đây không phải là bước bắt buộc đối với quá trình giải toán, nhưng lại là bước không thể thiếu trong dạy học toán. Bước này có mục đích:

- Kiểm tra lại phép tính đã đúng hay chưa. Kết quả đã chính xác chưa.
- Tìm cách giải khác và so sánh với cách giải khác để chọn được cách giải phù hợp nhất với học sinh.
- Khai thác đề bài toán, mở rộng và phát triển bài toán...

1.3. Tìm hiểu về các bài toán tính tổng ở Tiểu học

1.3.1. Một số kiến thức cơ sở

Các tính chất về phép toán

$$a + b = b + a$$

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$a - (b + c) = (a - c) - b = (a - b) - c.$$

$$a \times b = b \times a, a \times 0 = 0 \times a = 0$$

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$$

Các tính chất của dãy số

- Dãy số cách đều: Các phần tử liên tiếp hơn kém nhau một số không đổi.
Ví dụ: Dãy số 2, 4, 6, 8, 10,... là dãy số cách đều, các phần tử liên tiếp hơn kém nhau 2 đơn vị.

- Dãy số có quy luật nhân: Mỗi phần tử bằng phần tử liền trước nhân với một số không đổi.

Ví dụ: Dãy số 1, 3, 9, 27,... là dãy số có quy luật nhân, có mỗi phần tử bằng phần tử liền trước nó nhân với 3 đơn vị.

- Dãy số có quy luật khác: Kết hợp cả cộng, trừ, nhân, chia.
Ví dụ: Dãy số 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,... là dãy số mà mỗi phần tử là tổng của 2 phần tử liền trước nó.

1.3.2. Các câu hỏi về bài toán tính tổng thường gặp

- Tính tổng một dãy số cho trước.

- Tìm số hạng chưa biết để tổng bằng một giá trị cho trước.
- So sánh tổng của hai dãy số.

1.3.3. Các phương pháp thường dùng để giải bài toán tính tổng

- **Phương pháp trực tiếp:** Cộng từng số hạng của dãy số.

Ví dụ: Tính tổng

$$A = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9.$$

Giải:

Ta có

$$A = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

- **Phương pháp ghép cặp:** Ghép các số hạng có tổng bằng nhau để tính nhanh.

Ví dụ: Tính tổng

$$A = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9.$$

Giải:

Ta có

$$A = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$$

$$A = (1 + 9) + (2 + 8) + (3 + 7) + (4 + 6) + 5$$

$$A = 10 + 10 + 10 + 10 + 5$$

$$A = 45.$$

- **Phương pháp quy nạp:** Tìm quy luật của dãy số và tổng quát hóa lên để tính tổng.

Ví dụ: Quan sát dãy số 2, 4, 6, 8,...

Số tiếp theo là số mấy? Tính tổng dãy số đó.

Giải:

Ta có: Số sau hơn số trước: 2 đơn vị.

Số tiếp theo là: $8 + 2 = 10$.

Tổng dãy số đó là:

$$S = 2 + 4 + 6 + 8 + 10$$

$$S = (2 + 8) + (4 + 6) + 10$$

$$S = 10 + 10 + 10$$

$$S = 30.$$

- **Phương pháp sử dụng các tính chất của phép toán:**

Ví dụ: Tính tổng

$$A = 11 \times 3 + 11 \times 84 + 11 \times 13.$$

Giải:

Ta có

$$\begin{aligned} A &= 11 \times 3 + 11 \times 84 + 11 \times 13 \\ &= 11 \times (3 + 84 + 13) \\ &= 11 \times 100 = 1\,100. \end{aligned}$$

1.3.4. Các khó khăn mà học sinh thường gặp

- Khó khăn trong việc nhận biết quy luật của dãy số.
- Khó khăn trong việc lựa chọn phương pháp giải phù hợp.
- Khó khăn trong việc thực hiện các phép tính.
- Khó khăn trong việc kiểm tra lại kết quả.

1.3.5. Các giải pháp để khắc phục khó khăn

- **Dạy học phân dạng bài toán:** Giúp học sinh phân loại được các dạng bài toán khác nhau.
- **Rèn luyện kỹ năng nhận biết quy luật:** Cho học sinh làm nhiều bài tập tìm quy luật của dãy số.
- **Tổ chức các hoạt động nhóm:** Tạo điều kiện cho học sinh trao đổi, thảo luận và học hỏi lẫn nhau.

1.3.6. Phân dạng các bài toán về tính tổng ở Tiểu học

Các bài toán về tính tổng trong chương trình Tiểu học rất phong phú và đa dạng. Sau đây là một số dạng cơ bản:

Dạng 1: Bài toán tính tổng các dãy số tự nhiên có quy luật.

Dạng 2: Bài toán tính tổng các phân số có quy luật.

Dạng 3: Bài toán tính nhanh các giá trị biểu thức.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 1

Qua nghiên cứu, phân tích cơ sở lý luận ở chương 1 em đã nghiên cứu vị trí, vai trò của hoạt động giải toán ở Tiểu học, tìm hiểu được các phương pháp thường dùng để giải các bài toán tính tổng. Đồng thời nêu được quy trình chung để giải một bài toán ở Tiểu học.

Chương 2

MỘT SỐ BÀI TOÁN TÍNH TỔNG CÓ QUY LUẬT ĐẶC BIỆT Ở TIỂU HỌC

2.1. Bài toán tính tổng các dãy số tự nhiên có quy luật

2.1.1. Tính tổng các dãy số tự nhiên cách đều

Ví dụ 1: Tính tổng

$$A = 1 + 2 + 3 + \dots + 100.$$

Giải:

Cách 1:

Số số hạng của tổng A là:

$$100 - 1 + 1 = 100 \text{ (số hạng).}$$

Nên khi ghép các số hạng của tổng A thành tổng các cặp hai số thì ta được 50 cặp. Do đó,

$$\begin{aligned} A &= 1 + 2 + 3 + \dots + 100 \\ &= (1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (49 + 52) + (50 + 51) \\ &= 101 + 101 + \dots + 101 + 101 \\ &= 101 \times 50 \\ &= 5\,050. \end{aligned}$$

Cách 2:

Số số hạng của tổng A là:

$$100 - 1 + 1 = 100 \text{ (số hạng).}$$

Ta viết

$$A = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$$

và $A = 100 + 99 + 98 + \dots + 1.$

Do đó,

$$\begin{aligned} 2 \times A &= (1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (99 + 2) + (100 + 1) \\ &= 101 + 101 + \dots + 101 + 101 \\ &= 101 \times 100 \\ &= 10\,100. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra, } A = \frac{10\,100}{2} = 5\,050.$$

Bài toán tổng quát: Tính tổng

$$1 + 2 + 3 + \dots + n \quad (\text{Với } n \in \mathbb{N}^*).$$

Giải:

Với cách làm như ví dụ 1, ta có công thức tính tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến n (Với $n \in \mathbb{N}^*$) như sau:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \times (n + 1)}{2} \quad (\text{Với } n \in \mathbb{N}^*).$$

Ví dụ 2: Tính tổng

$$A = 2 + 4 + 6 + \dots + 100.$$

Giải:

Cách 1:

Số số hạng của tổng A là:

$$(100 - 2) : 2 + 1 = 50 \quad (\text{số hạng}).$$

Nên khi ghép các số hạng của tổng A thành tổng các cặp hai số thì ta được 25 cặp. Do đó,

$$\begin{aligned} A &= 2 + 4 + 6 + \dots + 100 \\ &= (2 + 100) + (4 + 98) + \dots + (48 + 54) + (50 + 52) \\ &= 102 + 102 + \dots + 102 + 102 \\ &= 101 \times 25 \\ &= 2\,550. \end{aligned}$$

Cách 2:

Số số hạng của tổng A là:

$$(100 - 2) : 2 + 1 = 50 \quad (\text{số hạng}).$$

Ta viết

$$A = 2 + 4 + 6 + \dots + 100$$

và $A = 100 + 98 + 96 + \dots + 2.$

Do đó,

$$\begin{aligned} 2 \times A &= (2 + 100) + (4 + 98) + \dots + (98 + 4) + (100 + 2) \\ &= 102 + 102 + \dots + 102 + 102 \\ &= 102 \times 50 \\ &= 5\,100. \end{aligned}$$

Suy ra, $A = \frac{5\,100}{2} = 2\,550$.

Bài toán tổng quát: Tính tổng

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n \text{ (Với } n \in \mathbb{N}^* \text{)}.$$

Giải:

Với cách làm như ví dụ 2, ta có công thức tính tổng các số tự nhiên chẵn liên tiếp từ 2 đến $2n$ (Với $n \in \mathbb{N}^*$) như sau:

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n \times (n + 1).$$

Ví dụ 3: Tính tổng

$$A = 1 + 3 + 5 + \dots + 49.$$

Giải:

Cách 1:

Số số hạng của tổng A là:

$$(49 - 1) : 2 + 1 = 25 \text{ (số hạng)}.$$

Nên khi ghép các số hạng của tổng A thành tổng các cặp hai số thì ta được 12 cặp và còn dư 1 số ở giữa là 25. Do đó,

$$\begin{aligned} A &= 1 + 3 + 5 + \dots + 49 \\ &= (1 + 49) + (3 + 47) + \dots + (23 + 27) + 25 \\ &= 50 + 50 + \dots + 50 + 25 \\ &= 50 \times 12 + 25 \\ &= 625. \end{aligned}$$

Cách 2:

Số số hạng của tổng A là:

$$(49 - 1) : 2 + 1 = 25 \text{ (số hạng)}$$

Ta viết

$$A = 1 + 3 + 5 + \dots + 49$$

và $A = 49 + 47 + 45 + \dots + 1.$

Do đó,

$$\begin{aligned} 2 \times A &= (1 + 49) + (3 + 47) + (5 + 45) + \dots + (49 + 1) \\ &= 50 + 50 + 50 + \dots + 50 \\ &= 50 \times 25 \\ &= 1\,250. \end{aligned}$$

Suy ra, $A = \frac{1\ 250}{2} = 625.$

Bài toán tổng quát: Tính tổng

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) \text{ (Với } n \in \mathbb{N}^*).$$

Giải:

Với cách làm như ví dụ 3, ta có công thức tính tổng các số tự nhiên lẻ liên tiếp từ 1 đến $2n - 1$ (Với $n \in \mathbb{N}^*$) như sau:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n \times n \text{ (Với } n \in \mathbb{N}^*).$$

Nhận xét: Với những tổng có nhiều số hạng và số số hạng là một số lẻ, cách giải thứ hai dễ hiểu hơn, vì việc tìm ra số hạng ở giữa còn dư ra ở cách thứ nhất gây khó khăn cho học sinh. Với những tổng có ít số hạng, thông thường học sinh giải bằng cách thứ nhất.

Ví dụ 4: Tính tổng

$$A = 1 + 4 + 7 + \dots + 103.$$

Phân tích: Đây là tổng có các số hạng cách đều với khoảng cách bằng 3.

Số số hạng của tổng A là:

$$(103 - 1) : 3 + 1 = 35 \text{ (số hạng)}$$

Thông thường với tổng này, ta làm theo cách viết A theo thứ tự ngược lại, sau đó tính 2A.

Giải:

Số số hạng của tổng A là:

$$(103 - 1) : 3 + 1 = 35 \text{ (số hạng)}$$

Ta viết

$$A = 1 + 4 + 7 + \dots + 103.$$

và $A = 103 + 100 + 97 + \dots + 1.$

Do đó,

$$\begin{aligned} 2 \times A &= (1 + 103) + (4 + 100) + (7 + 97) + \dots + (103 + 1) \\ &= 104 + 104 + 104 + \dots + 104 \\ &= 104 \times 35 \\ &= 3\ 640. \end{aligned}$$

Suy ra, $A = \frac{3\ 640}{2} = 1\ 820.$

Ví dụ 5: Tính tổng

$$A = 5 + 9 + 13 + \dots + 41.$$

Phân tích: Đây là tổng có các số hạng cách đều với khoảng cách bằng 4.

Số số hạng của tổng A là:

$$(41 - 5) : 4 + 1 = 10 \text{ (số hạng)}$$

Thông thường với tổng này, ta sẽ giải bằng cách ghép cặp trực tiếp.

Giải:

Ta có

$$\begin{aligned} A &= 5 + 9 + 13 + \dots + 41 \\ &= (5 + 41) + (9 + 37) + (13 + 33) + (17 + 29) + (21 + 25) \\ &= 46 + 46 + 46 + 46 + 46 \\ &= 46 \times 5 \\ &= 230. \end{aligned}$$

Ví dụ 6: Tính tổng 50 số lẻ liên tiếp biết số lớn nhất trong dãy là 2 025.

Giải:

Vì hai số lẻ liên tiếp hơn kém nhau 2 đơn vị nên số lớn nhất nhiều hơn số nhỏ nhất là $(50 - 1) \times 2 = 98$ đơn vị.

Số đầu tiên của dãy số trên là:

$$2\,025 - 98 = 1\,927$$

Tổng của 50 số lẻ liên tiếp nêu trên là:

$$\frac{(2\,025 + 1\,927) \times 50}{2} = 98\,800$$

Đáp số: 98 800.

Ví dụ 7: Tìm n, biết

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = 30.$$

Giải:

Đặt

$$A = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n.$$

Đây là một tổng gồm n số hạng, có các số hạng cách đều với khoảng cách bằng 2 đơn vị.

Ta viết

$$A = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$$

và $A = 2n + (2n - 2) + (2n - 4) + \dots + 2.$

Do đó,

$$\begin{aligned} 2 \times A &= (2 + 2n) + (4 + 2n - 2) + (6 + 2n - 4) + \dots + (2n + 2) \\ &= (2 + 2n) + (2 + 2n) + (2 + 2n) + \dots + (2 + 2n) \\ &= (2 + 2n) \times n \\ A &= \frac{(2 + 2n) \times n}{2} = n \times (n + 1). \end{aligned}$$

Vậy $n \times (n + 1) = 30 = 5 \times 6$. Suy ra, $n = 5$.

2.1.2. Tính tổng các dãy số tự nhiên có quy luật nhân

Ví dụ 1: Tính tổng

$$A = 2 + 6 + 18 + 54 + \dots + 486.$$

Giải:

Ta có

$$A = 2 + 6 + 18 + \dots + 486.$$

Đây là một tổng có quy luật nhân, mỗi số hạng sau bằng số hạng trước nhân với 3. Nhân cả hai vế với 3, ta được:

$$3 \times A = 6 + 18 + 54 + \dots + 1\,458.$$

Do đó,

$$\begin{aligned} 3 \times A - A &= (6 + 18 + 54 + \dots + 1\,458) - (2 + 6 + 18 + \dots + 486) \\ 2 \times A &= 1\,458 - 2 \\ 2 \times A &= 1\,456 \\ A &= 1\,456 : 2 \\ A &= 728. \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tính tổng

$$A = 2 + 10 + 50 + \dots + 1\,250.$$

Giải:

Ta có

$$A = 2 + 10 + 50 + \dots + 1\,250$$

Đây là một tổng có quy luật nhân, mỗi số hạng sau bằng số hạng trước nhân với 5. Nhân cả hai vế với 5, ta được:

$$5 \times A = 10 + 50 + 250 + \dots + 6\,250.$$

Do đó,

$$5 \times A - A = (10 + 50 + 250 + \dots + 6\,250) - (2 + 10 + 50 + \dots + 1\,250)$$

$$4 \times A = 6\,250 - 2$$

$$4 \times A = 6\,248$$

$$A = 6\,248 : 4$$

$$A = 1\,562.$$

Ví dụ 3: Một người bỏ 2 000 đồng vào lợn đất. Mỗi ngày sau số tiền gấp đôi số ngày trước. Hỏi sau 6 ngày người đó đã bỏ tổng cộng bao nhiêu tiền vào lợn đất?

Giải:

Cách 1:

Tổng số tiền người đó bỏ vào lợn đất là:

$$2\,000 + 4\,000 + 8\,000 + 16\,000 + 32\,000 + 64\,000 \text{ (đồng)}$$

Ta có

$$\begin{aligned} & 2\,000 + 4\,000 + 8\,000 + 16\,000 + 32\,000 + 64\,000 \\ &= 6\,000 + 8\,000 + 16\,000 + 32\,000 + 64\,000 \\ &= 14\,000 + 16\,000 + 32\,000 + 64\,000 \\ &= 30\,000 + 32\,000 + 64\,000 \\ &= 62\,000 + 64\,000 \\ &= 126\,000 \end{aligned}$$

Vậy, tổng số tiền người đó bỏ vào lợn đất là 126 000 (đồng).

Cách 2:

Tổng số tiền người đó bỏ vào lợn đất là:

$$2\,000 + 4\,000 + 8\,000 + 16\,000 + 32\,000 + 64\,000 \text{ (đồng)}$$

Ta có

$$\begin{aligned} A &= 2\,000 + 4\,000 + 8\,000 + 16\,000 + 32\,000 + 64\,000 \\ 2 \times A &= 4\,000 + 8\,000 + 16\,000 + 32\,000 + 64\,000 + 128\,000 \end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} 2 \times A - A &= (4\,000 + 8\,000 + 16\,000 + 32\,000 + 64\,000 + 128\,000) \\ &\quad - (2\,000 + 4\,000 + 8\,000 + 16\,000 + 32\,000 + 64\,000) \end{aligned}$$

$$A = 128\,000 - 2\,000$$

$$A = 126\,000.$$

Vậy, tổng số tiền người đó bỏ vào lợn đất là 126 000 (đồng).

Nhận xét: Cách giải thứ hai tính tổng một cách tổng quát hơn so với cách tính trực tiếp thứ nhất.

2.1.3. Tính tổng các dãy số tự nhiên có quy luật khác

Ví dụ 1: Tính tổng

$$A = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + 49 \times 50.$$

Giải:

Nhân cả 2 vế với 3, ta có

$$3 \times A = 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 3 + 3 \times 4 \times 3 + \dots + 49 \times 50 \times 3.$$

$$1 \times 2 \times 3 = 1 \times 2 \times 3 - 0 \times 1 \times 2$$

$$2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3 \times 4 - 1 \times 2 \times 3$$

$$3 \times 4 \times 3 = 3 \times 4 \times 5 - 2 \times 3 \times 4$$

...

$$49 \times 50 \times 3 = 49 \times 50 \times 51 - 48 \times 49 \times 50$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên, ta được:

$$\begin{aligned} 3 \times A &= (1 \times 2 \times 3 - 0 \times 1 \times 2) + (2 \times 3 \times 4 - 1 \times 2 \times 3) \\ &\quad + (3 \times 4 \times 5 - 2 \times 3 \times 4) + \dots + (49 \times 50 \times 51 - 48 \times 49 \times 50) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \times A &= 1 \times 2 \times 3 - 0 \times 1 \times 2 + 2 \times 3 \times 4 - 1 \times 2 \times 3 + 3 \times 4 \times 5 - 2 \times 3 \times 4 \\ &\quad + \dots + 49 \times 50 \times 51 - 48 \times 49 \times 50 \end{aligned}$$

$$3 \times A = 49 \times 50 \times 51 - 0 \times 1 \times 2$$

$$3 \times A = 49 \times 50 \times 51$$

$$3 \times A = 124\,950$$

$$A = 124\,950 : 3$$

$$A = 41\,650.$$

Bài toán tổng quát: Tính tổng

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n \times (n + 1).$$

Giải:

$$\begin{aligned}
& 3 \times [1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n \times (n+1)] \\
&= (1 \times 2 \times 3 - 0 \times 1 \times 2) + (2 \times 3 \times 4 - 1 \times 2 \times 3) + (3 \times 4 \times 5 - 2 \times 3 \times 4) \\
&\quad + \dots + [n \times (n+1) \times (n+2) - (n-1) \times n \times (n+1)] \\
&= n \times (n+1) \times (n+2) - 0 \times 1 \times 2 \\
&= n \times (n+1) \times (n+2)
\end{aligned}$$

Vậy

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n \times (n+1) = \frac{n \times (n+1) \times (n+2)}{3}.$$

Ví dụ 2: Tính tổng

$$A = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + \dots + 49 \times 49.$$

Giải:

Ta có

$$1 \times 1 = 1 \times (2 - 1) = 1 \times 2 - 1$$

$$2 \times 2 = 2 \times (3 - 1) = 2 \times 3 - 2$$

$$3 \times 3 = 3 \times (4 - 1) = 3 \times 4 - 3$$

...

$$49 \times 49 = 49 \times (50 - 1) = 49 \times 50 - 49$$

Cộng từng vế của các đẳng thức trên và áp dụng kết quả ví dụ 1, ta được

$$\begin{aligned}
A &= 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + \dots + 49 \times 49 \\
&= (1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + 49 \times 50) - (1 + 2 + 3 + \dots + 49) \\
&= 41\,650 - \frac{(49+1) \times 49}{2} = 41\,650 - 1\,225 \\
&= 40\,425.
\end{aligned}$$

Bài toán tổng quát: Tính tổng

$$1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + \dots + n \times n.$$

Giải:

Tương tự ví dụ trên, ta có

$$\begin{aligned}
& 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + \dots + n \times n \\
&= (1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n \times (n+1)) - (1 + 2 + 3 + \dots + n)
\end{aligned}$$

$$= \frac{n \times (n+1) \times (n+2)}{3} - \frac{n \times (n+1)}{2}$$

$$= \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6}.$$

Ví dụ 3: Tính tổng

$$A = 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 + \dots + 49 \times 50.$$

Giải:

Ta có

$$1 \times 4 = 1 \times (2 + 2) = 1 \times 2 + 1 \times 2$$

$$2 \times 5 = 2 \times (3 + 2) = 2 \times 3 + 2 \times 2$$

$$3 \times 6 = 3 \times (4 + 2) = 3 \times 4 + 3 \times 2$$

...

$$49 \times 50 = 49 \times (50 + 2) = 49 \times 50 + 49 \times 2$$

Cộng về với về các đẳng thức trên, ta được:

$$\begin{aligned} A &= (1 \times 2 + 1 \times 2) + (2 \times 3 + 2 \times 2) + (3 \times 4 + 3 \times 2) + \dots + (49 \times 50 + 49 \times 2) \\ &= (1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + 49 \times 50) + (1 \times 2 + 2 \times 2 + 3 \times 2 + \dots + 49 \times 2) \\ &= 41\,650 + (1 + 2 + 3 + \dots + 49) \times 2 \\ &= 41\,650 + \frac{(49+1) \times 49}{2} \times 2 \\ &= 41\,650 + 49 \times 50 \\ &= 41\,650 + 2\,450 \\ &= 44\,100. \end{aligned}$$

Bài toán tổng quát: Tính tổng

$$1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 + \dots + n \times (n+3).$$

Giải:

Ta có

$$\begin{aligned} &1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 + \dots + n \times (n+3) \\ &= (1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n \times (n+1)) - (1 \times 2 + 2 \times 2 + 3 \times 2 + \dots + n \times 2) \\ &= \frac{n \times (n+1) \times (n+2)}{3} - (1 + 2 + 3 + \dots + n) \times 2 \end{aligned}$$

$$= \frac{n \times (n+1) \times (n+2)}{3} + n \times (n+1)$$

$$= \frac{n \times (n+1) \times (n+5)}{3}$$

Vậy

$$1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 + \dots + n \times (n+3) = \frac{n \times (n+1) \times (n+5)}{3}.$$

2.1.4. Bài tập đề xuất

Bài 1. Tính tổng

a) $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 105.$

Đáp số: 5 565.

b) $2 + 3 + 4 + \dots + 107.$

Đáp số: 5 777.

c) $1 + 4 + 7 + 10 + \dots + 100.$

Đáp số: 1 717.

d) $2 + 5 + 8 + 11 + \dots + 95 + 98.$

Đáp số: 1 650.

e) $1 + 9 + 17 + 25 + \dots + 65 + 73.$

Đáp số: 370.

f) $6 + 12 + 18 + \dots + 54.$

Đáp số: 270.

g) $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18.$

Đáp số: 63.

h) $2 + 4 + 6 + \dots + 200.$

Đáp số: 10 100.

i) $4 + 6 + 8 + \dots + 100.$

Đáp số: 2 548.

k) $10 + 12 + 14 + \dots + 200.$

Đáp số: 10 080.

l) $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 97 + 99.$

Đáp số: 2 500.

m) $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 299$.

Đáp số: 22 500.

n) $100 + 102 + 104 + \dots + 200$.

Đáp số: 7 650.

p) $120 + 122 + 124 + \dots + 1\,000$.

Đáp số: 246 960.

q) $1\,001 + 1\,003 + 1\,005 + \dots + 1\,999$.

Đáp số: 750 000.

w) $1 + 3 + 5 + \dots + 1\,995$.

Đáp số: 996 004.

x) $3 + 6 + 9 + \dots + 147 + 150$.

Đáp số: 3 825.

y) $11 + 13 + 15 + \dots + 1\,999$.

Đáp số: 999 975.

z) $1 + 4 + 9 + 16 + \dots + 169$.

Đáp số: 819.

Bài 2. Tính tổng

a) $98 + 93 + 88 + 83 + \dots + 13 + 8 + 3$.

Đáp số: 1 010.

b) $70 + 67 + 64 + \dots + 10$.

Đáp số: 840.

c) $62 + 59 + 56 + \dots + 2$.

Đáp số: 672.

d) $85 + 79 + 75 + \dots + 7$.

Đáp số: 644.

e) $79 + 76 + 73 + \dots + 7 + 4$.

Đáp số: 1 079.

f) $98 + 94 + 90 + \dots + 10 + 6$.

Đáp số: 1 248.

g) $91 + 87 + 83 + \dots + 15 + 11$.

Đáp số: 1 071.

Bài 3. Tính tổng

a) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$.

Đáp số: 63.

b) $5 + 10 + 20 + 40 + 80$.

Đáp số: 155.

c) $5 + 10 + 20 + 40 + \dots + 640$.

Đáp số: 1 275.

d) $3 + 6 + 12 + 24 + \dots + 192$.

Đáp số: 381.

e) $2 + 6 + 18 + \dots + 1\,458$.

Đáp số: 2 186.

f) $4 + 8 + 16 + \dots + 1\,024$.

Đáp số: 2 044.

g) $1 + 5 + 25 + \dots + 3\,125$.

Đáp số: 3 906.

h) $5 + 15 + 45 + \dots + 3\,645$.

Đáp số: 5 465.

Bài 4. Tính tổng

a) $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + 99 \times 100$.

Đáp số: 333 300.

b) $1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 + \dots + 200 \times 203$.

Đáp số: 2 747 000.

c) $1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + \dots + 144 \times 144$.

Đáp số: 1 005 720.

d) $2 \times 5 + 4 \times 7 + 6 \times 9 + \dots + 20 \times 23$.

Đáp số: 1 870.

Bài 5. Tính tổng các phân tử của dãy số

a) 1, 6, 11, ..., 51.

Đáp số: 286.

b) 11, 13, 15, ..., 95, 97.

Đáp số: 2 376.

c) 21, 23, 25, ..., 201.

Đáp số: 10 101.

d) 100, 104, 108, ..., 1 000.

Đáp số: 124 300.

e) 1, 3, 9, 27, ..., 729.

Đáp số: 1 093.

f) 2, 8, 32, 128, ..., 8 192.

Đáp số: 10 922.

Bài 6. Tính tổng các số tự nhiên từ 1 tới 999.

Đáp số: 499 500.

Bài 7. Tính tổng các số tự nhiên từ 345 đến 999.

Đáp số: 440 640.

Bài 8. Tính tổng các số tự nhiên lẻ từ 1 tới 101.

Đáp số: 2 601.

Bài 9. Tính tổng các số tự nhiên lẻ từ 101 đến 999.

Đáp số: 247 500.

Bài 10. Tính tổng các số tự nhiên chẵn từ 2 tới 2 020.

Đáp số: 1 021 110.

Bài 11. Tính tổng các số chẵn từ 2 đến $2n$, với $n = 25$.

Đáp số: 650.

Bài 12. Tính tổng các số chẵn từ 2 đến $2n$, với $n = 75$.

Đáp số: 5 700.

Bài 13. Tính tổng các số lẻ có 3 chữ số chia hết cho 5.

Đáp số: 49 500.

Bài 14. Tính tổng 305 số chẵn liên tiếp bắt đầu bằng số 12.

Đáp số: 96 380.

Bài 15. Cho dãy số 1, 3, 5, 9, 13,... gồm 50 số phân tử. Tính tổng các phân tử của dãy số trên.

Đáp số: 4 950.

Bài 16. Tính tổng 50 số lẻ liên tiếp biết số lẻ lớn nhất trong dãy đó là 2 019?

Đáp số: 98 500.

Bài 17. Tính tổng 100 số chẵn liên tiếp bắt đầu từ 6.

Đáp số: 10 500.

Bài 18. Tính tổng 150 số lẻ liên tiếp bắt đầu từ 5.

Đáp số: 23 100.

Bài 19. Tính tổng 201 số lẻ liên tiếp có số hạng đầu là 1 001.

Đáp số: 241 401.

Bài 20. Tính tổng của 20 số chẵn liên tiếp mà số lớn nhất là 246.

Đáp số: 4 540.

Bài 21. Ta có dãy số gồm 15 số chẵn liên tiếp mà số lớn nhất là 192. Tính tổng dãy số đó.

Đáp số: 2 670.

Bài 22. Biết tổng của 50 số chẵn liên tiếp bằng 12 750. Tìm số đầu tiên trong dãy.

Đáp số: 206.

Bài 23. Tổng của 12 số tự nhiên liên tiếp bằng 798. Tìm số nhỏ nhất trong dãy.

Đáp số: 61.

Bài 24. Tính tổng 30 số tự nhiên liên tiếp mà số lớn nhất là 129.

Đáp số: 3 435.

Bài 25. Tìm n, biết

a) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = 144$.

Đáp số: $n = 11$.

b) $1 + 4 + 7 + \dots + (3n + 1) = 145$.

Đáp số: $n = 9$.

2.2. Bài toán tính tổng các phân số dạng đặc biệt

2.2.1. Tính tổng các phân số có quy luật nhân

Ví dụ 1: Tính tổng

$$A = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{1024}{5}.$$

Phân tích: Đây là tổng các phân số có mẫu số giống nhau, tử số có quy luật nhân, số hạng đứng sau gấp đôi số hạng liền trước nó.

Giải:

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{1024}{5} \\ 2 \times A &= \frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \frac{8}{5} + \dots + \frac{1024}{5} + \frac{2048}{5} \end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} 2 \times A - A &= \left(\frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \frac{8}{5} + \dots + \frac{1024}{5} + \frac{2048}{5} \right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{1024}{5} \right) \\ A &= \frac{2048}{5} - \frac{1}{5} \\ A &= \frac{2047}{5} \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tính tổng

$$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots + \frac{1}{729}.$$

Giải:

Ta có

$$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{729}.$$

Đây là tổng các phân số có tử số giống nhau, mẫu số có quy luật nhân, mỗi số hạng sau bằng số hạng trước nhân với $\frac{1}{3}$. Nhân cả hai vế với $\frac{1}{3}$, ta được:

$$\frac{1}{3} \times A = \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots + \frac{1}{2187}.$$

Do đó,

$$A - \frac{1}{3} \times A = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{729} \right) - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots + \frac{1}{2187} \right)$$

$$\frac{2}{3} \times A = \frac{1}{3} - \frac{1}{2187}$$

$$\frac{2}{3} \times A = \frac{728}{2187}$$

$$A = \frac{728}{2187} : \frac{2}{3}$$

$$A = \frac{728}{2187} \times \frac{3}{2}$$

$$A = \frac{364}{729}.$$

Ví dụ 3: Tính tổng

$$A = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{9}{8} + \dots + \frac{6561}{512}.$$

Giải:

Ta có

$$A = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{9}{8} + \dots + \frac{6561}{512}$$

Đây là tổng các phân số có tử số và mẫu số đều có quy luật nhân, mỗi số hạng sau bằng số hạng trước nhân với $\frac{3}{2}$. Nhân cả hai vế với $\frac{3}{2}$, ta được:

$$\frac{3}{2} \times A = \frac{3}{4} + \frac{9}{8} + \frac{27}{16} + \dots + \frac{6561}{512} + \frac{19683}{1024}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \times A - A &= \left(\frac{3}{4} + \frac{9}{8} + \frac{27}{16} + \dots + \frac{6561}{512} + \frac{19683}{1024} \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{9}{8} + \frac{27}{16} + \dots + \frac{6561}{512} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \times A = \frac{19683}{1024} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \times A = \frac{19171}{1024}$$

$$A = \frac{19171}{1024} : \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{19\,171}{512}.$$

2.2.2. Tính tổng các phân số có quy luật khác

Ví dụ 1: Tính tổng

$$A = \frac{1}{7} + \frac{3}{7} + \frac{5}{7} + \dots + \frac{2\,025}{7}.$$

Phân tích: Tổng trên là tổng các phân số có mẫu số giống nhau, các tử số có khoảng cách đều nhau, tử số sau lớn hơn tử số trước 2 đơn vị. Ta giải tương tự như bài toán tính tổng dãy số tự nhiên cách đều.

Giải:

Số số hạng của tổng A là

$$(2\,025 - 1) : 2 + 1 = 1\,013$$

Ta có

$$A = \frac{1}{7} + \frac{3}{7} + \frac{5}{7} + \dots + \frac{2\,025}{7}$$

$$A = \frac{2\,025}{7} + \frac{2\,023}{7} + \frac{2\,021}{7} + \dots + \frac{1}{7}.$$

Do đó,

$$2 \times A = \frac{1 + 2\,025}{7} + \frac{3 + 2\,023}{7} + \frac{5 + 2\,021}{7} + \dots + \frac{2\,025 + 1}{7}$$

$$2 \times A = \frac{2\,026}{7} + \frac{2\,026}{7} + \frac{2\,026}{7} + \dots + \frac{2\,026}{7}$$

$$2 \times A = \frac{2\,026}{7} \times 1\,013$$

$$2 \times A = \frac{2\,052\,338}{7}$$

$$A = \frac{2\,052\,338}{7} : 2$$

$$A = \frac{1\,026\,169}{7}$$

Ví dụ 2: Tính tổng

$$A = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{2\,024 \times 2\,025}.$$

Giải:

Ta có

$$\frac{1}{1 \times 2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

...

$$\frac{1}{2\,024 \times 2\,025} = \frac{1}{2\,024} - \frac{1}{2\,025}$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên, ta được:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{2\,024 \times 2\,025} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2\,024} - \frac{1}{2\,025} \\ &= 1 - \frac{1}{2\,025} \\ &= \frac{2\,025 - 1}{2\,025} = \frac{2\,024}{2\,025}. \end{aligned}$$

Bài toán tổng quát: Tính tổng

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)}.$$

Giải:

Ta có

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

Vậy

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Ví dụ 3: Tính tổng

$$\frac{5}{6} + \frac{5}{12} + \frac{5}{20} + \frac{5}{30} + \frac{5}{42} + \frac{5}{56} + \frac{5}{72} + \frac{5}{90}.$$

Phân tích: Tổng trên là tổng của các phân số có tử số là 5, mẫu là tích của 2 số tự nhiên liên tiếp. Do đó, nếu ta đặt 5 làm thừa số chung thì biểu thức trong ngoặc sẽ có dạng như ví dụ 1.

Giải:

$$\begin{aligned} & \frac{5}{6} + \frac{5}{12} + \frac{5}{20} + \frac{5}{30} + \frac{5}{42} + \frac{5}{56} + \frac{5}{72} + \frac{5}{90} \\ &= 5 \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} \right) \\ &= 5 \times \left(\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{7 \times 8} + \frac{1}{8 \times 9} + \frac{1}{9 \times 10} \right) \\ &= 5 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \\ &= 5 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10} \right) \\ &= 5 \times \left(\frac{5}{10} - \frac{1}{10} \right) \\ &= 5 \times \frac{4}{10} \\ &= \frac{20}{10} = 2. \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Tính tổng

$$\frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2}{2013 \times 2015}.$$

Giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{2}{1 \times 3} &= 1 - \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3 \times 5} &= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\frac{2}{5 \times 7} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$$

...

$$\frac{2}{2\,013 \times 2\,015} = \frac{1}{2\,013} - \frac{1}{2\,015}$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên, ta được:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2}{2\,013 \times 2\,015} \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2\,013} - \frac{1}{2\,015} \\ &= 1 - \frac{1}{2\,015} = \frac{2\,014}{2\,015}. \end{aligned}$$

Bài toán tổng quát: Tính tổng

$$\frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2}{n \times (n+2)} \quad (\text{Với } n \in \mathbb{N}^*, n \text{ lẻ}).$$

Giải:

Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2}{n \times (n+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \\ &= 1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}. \end{aligned}$$

Vậy

$$\frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2}{n \times (n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \quad (\text{Với } n \in \mathbb{N}^*, n \text{ lẻ}).$$

Ví dụ 5: Tính tổng

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{2\,009 \times 2\,011}.$$

Giải:

Ta có

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{2\,009 \times 2\,011} \\
&= \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{2\,009 \times 2\,011} \right) \\
&= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2\,009} - \frac{1}{2\,011} \right) \\
&= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2\,011} \right) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{2\,010}{2\,011} \\
&= \frac{1\,005}{2\,011}.
\end{aligned}$$

Nhận xét: Thông qua ví dụ trên cần phải khắc phục cho học sinh sai lầm thường

gặp: $\frac{1}{3 \times 5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$ là sai.

Cách khác:

Đặt

$$S = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{2\,009 \times 2\,011}.$$

Nhân cả 2 vế với 2, ta có:

$$\begin{aligned}
2 \times S &= 2 \times \left(\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{2\,009 \times 2\,011} \right) \\
2 \times S &= \frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2}{2\,009 \times 2\,011} \\
2 \times S &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2\,009} - \frac{1}{2\,011} \\
2 \times S &= 1 - \frac{1}{2\,011} \\
2 \times S &= \frac{2\,010}{2\,011}
\end{aligned}$$

$$S = \frac{2\ 010}{2\ 011} : 2$$

$$S = \frac{1\ 005}{2\ 011}.$$

Bài toán tổng quát: Tính tổng

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{n \times (n+2)} \quad (\text{Với } n \in \mathbb{N}^*, n \text{ lẻ}).$$

Giải:

Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{n \times (n+2)} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{n+1}{n+2}. \end{aligned}$$

Vậy

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{n \times (n+2)} = \frac{1}{2} \times \frac{n+1}{n+2} \quad (\text{Với } n \in \mathbb{N}^*, n \text{ lẻ}).$$

Ví dụ 6: Tính tổng

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{66} + \frac{1}{176} + \frac{1}{336} + \dots + \frac{1}{248\ 496}.$$

Giải:

Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} + \frac{1}{66} + \frac{1}{176} + \frac{1}{336} + \dots + \frac{1}{248\ 496} \\ &= \frac{1}{1 \times 6} + \frac{1}{6 \times 11} + \frac{1}{11 \times 16} + \dots + \frac{1}{496 \times 501} \\ &= \frac{1}{5} \times \left(\frac{5}{1 \times 6} + \frac{5}{6 \times 11} + \frac{5}{11 \times 16} + \frac{5}{16 \times 21} + \dots + \frac{5}{496 \times 501} \right) \\ &= \frac{1}{5} \times \left(1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{496} - \frac{1}{501} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5} \times \left(1 - \frac{1}{501} \right) \\
&= \frac{1}{5} \times \frac{500}{501} \\
&= \frac{100}{501}.
\end{aligned}$$

Bài toán tổng quát: Tính tổng

$$\frac{1}{1 \times 6} + \frac{1}{6 \times 11} + \frac{1}{11 \times 16} + \dots + \frac{1}{(5n-4) \times (5n+1)}.$$

Giải:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1 \times 6} + \frac{1}{6 \times 11} + \frac{1}{11 \times 16} + \dots + \frac{1}{(5n-4) \times (5n+1)} \\
&= \frac{1}{5} \times \left(1 - \frac{1}{5n+1} \right) \\
&= \frac{1}{5} \times \frac{5n}{5n+1} \\
&= \frac{n}{5n+1}.
\end{aligned}$$

Ta có công thức:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6 \times 11} + \frac{1}{11 \times 16} + \dots + \frac{1}{(5n-4) \times (5n+1)} = \frac{n}{5n+1}.$$

Ví dụ 7: Tính

$$\frac{5}{1\,002 \times 1\,005} + \frac{5}{1\,005 \times 1\,008} + \frac{5}{1\,008 \times 1\,011} + \dots + \frac{5}{2\,010 \times 2\,013}.$$

Giải:

Ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{5}{1\,002 \times 1\,005} + \frac{5}{1\,005 \times 1\,008} + \frac{5}{1\,008 \times 1\,011} + \dots + \frac{5}{2\,010 \times 2\,013} \\
&= \frac{5}{3} \times \left(\frac{3}{1\,002 \times 1\,005} + \frac{3}{1\,005 \times 1\,008} + \frac{3}{1\,008 \times 1\,011} + \dots + \frac{3}{2\,010 \times 2\,013} \right) \\
&= \frac{5}{3} \times \left(\frac{1}{1\,002} - \frac{1}{1\,005} + \frac{1}{1\,005} - \frac{1}{1\,008} + \frac{1}{1\,008} - \frac{1}{1\,011} + \dots + \frac{1}{2\,010} - \frac{1}{2\,013} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5}{3} \times \left(\frac{1}{1\,002} - \frac{1}{2\,013} \right) \\
&= \frac{5}{3} \times \frac{1\,011}{1\,002 \times 2\,013} \\
&= \frac{1\,685}{1\,002 \times 2\,013}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 8: Tìm n , biết

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{n \times (n+2)} = \frac{29}{45}.$$

Giải:

Đặt

$$A = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{n \times (n+2)}$$

Ta có

$$\frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right)$$

$$\frac{1}{2 \times 4} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right)$$

$$\frac{1}{3 \times 5} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)$$

...

$$\frac{1}{n \times (n+2)} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên, ta được:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \times \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n+2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$$

Vì $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{n \times (n+2)} = \frac{29}{45}$ nên

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{29}{45}$$

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{29}{45} = \frac{19}{180}$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{19}{180} : \frac{1}{2} = \frac{19}{90} = \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$

$$n+1=9$$

$$n=9-1=8.$$

Đáp số: $n=8$.

2.2.3. Bài tập đề xuất

Bài 1: Tính tổng

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729} + \frac{1}{2187}.$

Đáp số: $\frac{1093}{2187}.$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{256}.$

Đáp số: $\frac{255}{256}.$

c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{54}.$

Đáp số: $\frac{20}{27}.$

d) $3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}.$

Đáp số: $\frac{40}{9}.$

e) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}.$

Đáp số: $\frac{15}{16}$.

f) $\frac{3}{5} + \frac{6}{25} + \frac{12}{125} + \dots + \frac{96}{15\,625}$.

Đáp số: $\frac{15\,561}{15\,625}$.

g) $\frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{8}{125} + \frac{16}{625}$.

Đáp số: $\frac{406}{625}$.

Bài 2: Tính tổng

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$.

Đáp số: $\frac{5}{6}$.

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56}$.

Đáp số: $\frac{7}{8}$.

c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{930} + \frac{1}{992}$.

Đáp số: $\frac{31}{32}$.

d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{9\,900}$.

Đáp số: $\frac{99}{100}$.

e) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{420}$.

Đáp số: $\frac{20}{21}$.

f) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{1\,014 \times 1\,015}$.

Đáp số: $\frac{1\,014}{1\,015}$.

g) $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{2\,023 \times 2\,024}$.

Đáp số: $\frac{2\,023}{2\,024}$.

h) $\frac{7}{2} + \frac{7}{6} + \frac{7}{12} + \frac{7}{20} + \frac{7}{30} + \frac{7}{42} + \frac{7}{56} + \frac{7}{72} + \frac{7}{90}$.

Đáp số: $\frac{63}{10}$.

i) $\frac{5}{11 \times 16} + \frac{5}{16 \times 21} + \frac{5}{21 \times 26} + \dots + \frac{5}{61 \times 66}$.

Đáp số: $\frac{5}{66}$.

j) $\frac{2}{2 \times 4} + \frac{2}{4 \times 6} + \dots + \frac{2}{200 \times 202}$.

Đáp số: $\frac{50}{101}$.

Bài 3: Tính tổng các phân tử của dãy số

a) $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \dots, \frac{2}{2\,187}$.

Đáp số: $\frac{2\,186}{2\,187}$.

b) $\frac{3}{5}, \frac{3}{25}, \frac{3}{125}, \frac{3}{625}, \dots, \frac{3}{3\,125}$.

Đáp số: $\frac{2\,343}{3\,125}$.

c) $\frac{2}{2 \times 4}, \frac{2}{4 \times 6}, \frac{2}{6 \times 8}, \dots, \frac{2}{50 \times 52}$.

Đáp số: $\frac{25}{52}$.

Bài 4: Tính tổng

a) $\frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \dots + \frac{2}{1\,295}$.

Đáp số: $\frac{36}{37}$.

b) $\frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \dots + \frac{2}{99 \times 101}$.

Đáp số: $\frac{100}{101}$.

c) $\frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \dots + \frac{2}{2\,003 \times 2\,005}$.

Đáp số: $\frac{2\,004}{2\,005}$.

f) $\frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2}{103 \times 105}$.

Đáp số: $\frac{104}{105}$.

g) $\frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2}{1\,007 \times 1\,009}$.

Đáp số: $\frac{1\,008}{1\,009}$.

h) $\frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2}{2\,023 \times 2\,025}$.

Đáp số: $\frac{2\,024}{2\,025}$.

i) $\frac{3}{1 \times 4} + \frac{3}{4 \times 7} + \frac{3}{7 \times 10} + \dots + \frac{3}{47 \times 50}$.

Đáp số: $\frac{49}{50}$.

j) $\frac{3}{1 \times 4} + \frac{3}{4 \times 7} + \frac{3}{7 \times 10} + \dots + \frac{3}{1\,012 \times 1\,015}$.

Đáp số: $\frac{1\,014}{1\,015}$.

k) $\frac{3}{1 \times 4} + \frac{3}{4 \times 7} + \frac{3}{7 \times 10} + \dots + \frac{3}{2\,001 \times 2\,004}$.

Đáp số: $\frac{2\,003}{2\,004}$.

l) $\frac{3}{4} + \frac{3}{28} + \frac{3}{70} + \dots + \frac{3}{62 \times 65}$.

Đáp số: $\frac{64}{65}$.

m) $\frac{3}{4} + \frac{3}{28} + \frac{1}{70} + \dots + \frac{3}{106 \times 109}$.

Đáp số: $\frac{108}{109}$.

n) $\frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2}{1\,999 \times 2\,001}$.

Đáp số: $\frac{2\,000}{2\,001}$.

p) $\frac{2}{5 \times 7} + \frac{2}{7 \times 9} + \dots + \frac{2}{101 \times 103}$.

Đáp số: $\frac{98}{515}$.

Bài 5: Tính tổng

a) $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{7 \times 9} + \frac{1}{9 \times 11}$.

Đáp số: $\frac{5}{11}$.

b) $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{25 \times 27}$.

Đáp số: $\frac{13}{27}$.

c) $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{97 \times 99}$.

Đáp số: $\frac{49}{99}$.

$$d) \frac{2}{3 \times 7} + \frac{2}{7 \times 11} + \frac{2}{11 \times 15} + \dots + \frac{2}{99 \times 103}.$$

Đáp số: $\frac{50}{309}$.

$$e) \frac{1}{6} + \frac{1}{66} + \frac{1}{176} + \frac{1}{336} + \frac{1}{546}.$$

Đáp số: $\frac{5}{26}$.

$$f) \frac{1}{6} + \frac{1}{66} + \frac{1}{176} + \dots + \frac{1}{1116}.$$

Đáp số: $\frac{7}{36}$.

$$g) \frac{1}{1 \times 6} + \frac{1}{6 \times 11} + \frac{1}{11 \times 16} + \dots + \frac{1}{246 \times 251}.$$

Đáp số: $\frac{50}{251}$.

$$h) \frac{1}{1 \times 6} + \frac{1}{6 \times 11} + \frac{1}{11 \times 16} + \dots + \frac{1}{396 \times 401}.$$

Đáp số: $\frac{80}{401}$.

$$i) \frac{6}{13 \times 18} + \frac{6}{18 \times 23} + \dots + \frac{6}{48 \times 53}.$$

Đáp số: $\frac{48}{689}$.

$$j) \frac{5}{11 \times 12} + \frac{5}{12 \times 13} + \frac{5}{13 \times 14} + \dots + \frac{5}{49 \times 50}.$$

Đáp số: $\frac{39}{110}$.

$$k) \frac{13}{90 \times 94} + \frac{13}{94 \times 98} + \frac{13}{98 \times 102} + \dots + \frac{13}{146 \times 150}.$$

Đáp số: $\frac{13}{900}$.

$$l) \frac{5}{20 \times 24} + \frac{5}{24 \times 28} + \frac{5}{28 \times 32} + \frac{5}{32 \times 36}.$$

Đáp số: $\frac{1}{36}$.

$$m) \frac{7}{56 \times 60} + \frac{7}{60 \times 64} + \frac{7}{64 \times 68} + \frac{7}{68 \times 72}.$$

Đáp số: $\frac{1}{144}$.

$$n) \frac{9}{72 \times 76} + \frac{9}{76 \times 80} + \frac{9}{80 \times 84} + \frac{9}{84 \times 88} + \frac{9}{88 \times 92}.$$

Đáp số: $\frac{5}{736}$.

$$o) \frac{6}{18 \times 22} + \frac{6}{22 \times 26} + \frac{6}{26 \times 30}.$$

Đáp số: $\frac{1}{30}$.

$$q) \frac{10}{40 \times 44} + \frac{10}{44 \times 48} + \frac{10}{48 \times 52} + \frac{10}{52 \times 56} + \frac{10}{56 \times 60}.$$

Đáp số: $\frac{1}{48}$.

$$r) \frac{9}{3 \times 6} + \frac{9}{6 \times 9} + \frac{9}{9 \times 12} + \dots + \frac{9}{27 \times 30}.$$

Đáp số: $\frac{9}{10}$.

Bài 6: Tìm n, biết

$$a) \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{2\,004}{2\,005}.$$

Đáp số: $n = 2\,004$.

$$b) \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{9}{10}.$$

Đáp số: $n = 9$.

$$c) \frac{3}{4} + \frac{3}{4 \times 7} + \frac{3}{7 \times 10} + \dots + \frac{3}{(3n+1) \times (3n+4)} = \frac{303}{304}.$$

Đáp số: $n = 100$.

$$d) \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{7 \times 8} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{3}{20}.$$

Đáp số: $n = 19$.

$$e) \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{7}{30}.$$

Đáp số: $n = 9$.

2.3. Bài toán tính nhanh các giá trị biểu thức

2.3.1. Ví dụ

Ví dụ 1: Tính nhanh

$$a) 254 + 391 + 146 + 209$$

$$= (254 + 146) + (391 + 209)$$

$$= 400 + 600$$

$$= 1000.$$

$$b) 168 + 288 + 212 + 232$$

$$= (168 + 232) + (288 + 212)$$

$$= 400 + 500$$

$$= 900.$$

$$c) 366 - 155 + 255 - 166$$

$$= (366 - 166) + (255 - 155)$$

$$= 200 + 100$$

$$= 300.$$

$$d) 524 + 397 + 103 - 224$$

$$= (524 - 224) + (397 + 103)$$

$$= 300 + 500$$

$$= 800.$$

$$e) 36 \times 327 + 60 \times 327 + 4 \times 327$$

$$= 327 \times (36 + 60 + 4)$$

$$= 327 \times 100$$

$$= 32\,700.$$

$$\text{f) } 99 \times 98 + 98$$

$$= 98 \times (99 + 1)$$

$$= 98 \times 100$$

$$= 9\,800.$$

$$\text{g) } 88 \times 1\,996 + 1\,997 \times 11 + 1\,985$$

$$= 88 \times 1\,996 + (1\,996 + 1) \times 11 + 1\,985$$

$$= 88 \times 1\,996 + 1\,996 \times 11 + 11 + 1\,985$$

$$= 88 \times 1\,996 + 1\,996 \times 11 + 1\,996$$

$$= 1\,996 \times (88 + 11 + 1)$$

$$= 1\,996 \times 100$$

$$= 199\,600.$$

$$\text{h) } 117 \times (36 + 62) - 17 \times (62 + 36)$$

$$= (117 - 17) \times (36 + 62)$$

$$= 100 \times (36 + 62)$$

$$= 100 \times 98$$

$$= 9\,800.$$

Ví dụ 2: Tính nhanh

$$\text{a) } \frac{3}{5} + \frac{6}{11} + \frac{7}{13} + \frac{2}{5} + \frac{16}{11} + \frac{19}{13}$$

$$= \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5} \right) + \left(\frac{6}{11} + \frac{16}{11} \right) + \left(\frac{7}{13} + \frac{19}{13} \right)$$

$$= 1 + 2 + 2 = 5.$$

$$\text{b) } \frac{1}{11} + \frac{2}{11} + \frac{3}{11} + \frac{4}{11} + \frac{5}{11} + \frac{6}{11} + \frac{7}{11} + \frac{8}{11} + \frac{9}{11} + \frac{10}{11}$$

$$= \left(\frac{1}{11} + \frac{10}{11} \right) + \left(\frac{2}{11} + \frac{9}{11} \right) + \left(\frac{3}{11} + \frac{8}{11} \right) + \left(\frac{4}{11} + \frac{7}{11} \right) + \left(\frac{5}{11} + \frac{6}{11} \right)$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

Ví dụ 3: Tính nhanh

$$\begin{aligned}
& \text{a) } 0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,4 + 0,5 + 0,6 + 0,7 + 0,8 + 0,9 \\
&= (0,1 + 0,9) + (0,2 + 0,8) + (0,3 + 0,7) + (0,4 + 0,6) + 0,5 \\
&= 1 + 1 + 1 + 1 + 0,5 \\
&= 4,5.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{b) } 0,25 \times 8 + 0,5 \times 4 + 0,25 \times 2 + 0,5 \times 6 \\
&= 0,25 \times (8 + 2) + 0,5 \times (4 + 6) \\
&= 0,25 \times 10 + 0,5 \times 10 \\
&= 2,5 + 5 = 7,5.
\end{aligned}$$

Ví dụ 4: Tính nhanh

$$A = 0,01 + 0,02 + 0,03 + \dots + 0,99 + 1.$$

Giải:

Cách 1:

Số số hạng của tổng A là:

$$100 - 1 + 1 = 100 \text{ (số hạng).}$$

Nên khi ghép các số hạng của tổng A thành tổng các cặp hai số thì ta được 50 cặp. Do đó,

$$\begin{aligned}
A &= 0,01 + 0,02 + 0,03 + \dots + 0,99 + 1 \\
&= (0,01 + 1) + (0,02 + 0,99) + \dots + (0,49 + 0,52) + (0,5 + 0,51) \\
&= 1,01 + 1,01 + \dots + 1,01 + 1,01 \\
&= 1,01 \times 50 \\
&= 50,5.
\end{aligned}$$

Cách 2:

Số số hạng của tổng A là:

$$100 - 1 + 1 = 100 \text{ (số hạng).}$$

Ta viết

$$A = 0,01 + 0,02 + 0,03 + \dots + 0,99 + 1$$

và $A = 1 + 0,99 + 0,98 + \dots + 0,02 + 0,01$

Do đó,

$$\begin{aligned}
2 \times A &= (0,01 + 1) + (0,02 + 0,99) + \dots + (0,99 + 2) + (1 + 0,01) \\
&= 1,01 + 1,01 + \dots + 1,01 + 1,01 \\
&= 1,01 \times 100 \\
&= 101.
\end{aligned}$$

Suy ra, $A = \frac{101}{2} = 50,5$.

Ví dụ 5: Tìm x, biết

$$\begin{aligned}
x - 0,125 &= 7,875 + 4,5 \\
x &= 7,875 + 4,5 + 0,125 \\
x &= (7,875 + 0,125) + 4,5 \\
x &= 8 + 4,5 \\
x &= 12,5.
\end{aligned}$$

Vậy $x = 12,5$.

2.3.2. Bài tập đề xuất

Bài 1: Tính nhanh giá trị biểu thức

a) $321 \times 49 + 321$.

Đáp số: 16 050.

b) $88 \times 2\,010 + 2\,011 \times 11 + 1\,989 + 2\,010$.

Đáp số: 2 030 000.

c) $124 \times 36 + 36 \times 50 + 36 \times (12 + 14)$.

Đáp số: 7 200.

d) $84 \times 2\,025 + 2\,026 \times 15 + 2\,010$.

Đáp số: 202 500.

e) $89 \times 1\,995 + 1\,996 \times 10 + 1\,985$.

Đáp số: 199 500.

f) $25 \times 4 + 24 \times 3 + 24 \times 2$.

Đáp số: 220.

g) $456 \times 36 + 456 \times 61 + 3 \times 456$.

Đáp số: 45 600.

h) $213 \times 37 + 213 \times 39 + 23 \times 213 + 213.$

Đáp số: 21 300.

i) $2\,007 \times 16 - 2\,007 \times 14 - 2\,007 \times 2 + 2\,007.$

Đáp số: 2 007.

j) $(145 \times 99 + 145) - (143 \times 101 - 143).$

Đáp số: 200.

k) $2\,006 \times (43 \times 10 - 2 \times 43 \times 5) + 100.$

Đáp số: 100.

l) $94 + 87 + 81 - 71 - 77 - 84.$

Đáp số: 30.

m) $79 \times 28 + 21 \times 79 + 79.$

Đáp số: 3 950.

n) $3\,145 + 2\,496 + 5\,347 + 7\,504 + 4\,653.$

Đáp số: 23 145.

p) $4 \times 113 \times 25 - 5 \times 112 \times 20.$

Đáp số: 100.

q) $208 \times 67 + 209 \times 33.$

Đáp số: 20 833.

t) $(18 - 9 \times 2) \times (26 + 45 + 30 : 3 + 234).$

Đáp số: 0.

Bài 2: Tính bằng cách thuận tiện

a) $\frac{5}{9} + \frac{13}{7} + \frac{15}{13} + \frac{8}{7} + \frac{4}{9} + \frac{11}{13}.$

Đáp số: 6.

b) $\frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{11}{12} + \frac{19}{20} + \frac{29}{30} + \frac{41}{42} + \frac{55}{56} + \frac{71}{72} + \frac{89}{90}.$

Đáp số: $\frac{81}{10}.$

c) $\frac{1}{7} + \frac{1}{91} + \frac{1}{247} + \frac{1}{475} + \frac{1}{775} + \frac{1}{1147}.$

Đáp số: $\frac{6}{37}$.

d) $\frac{75}{100} + \frac{18}{21} + \frac{19}{32} + \frac{1}{4} + \frac{3}{21} + \frac{13}{32}$.

Đáp số: 3.

Bài 3: Tính nhanh giá trị biểu thức:

a) $\frac{2\,003 \times 1\,999 - 2\,003 \times 999}{2\,004 \times 999 + 1\,004}$.

Đáp số: 1.

b) $\frac{1\,996 \times 1\,995 - 996}{1\,000 + 1\,996 \times 1\,994}$.

Đáp số: 1.

c) $\frac{1\,997 \times 1\,996 - 1}{1\,995 \times 1\,997 + 1\,996}$.

Đáp số: 1.

d) $\frac{1\,998 \times 1\,996 + 1\,997 \times 11 + 1\,985}{1\,997 \times 1\,996 - 1\,995 \times 1\,996}$.

Đáp số: 1 005.

e) $\frac{1\,999 \times 2\,001 - 1}{1\,998 + 1\,999 \times 2\,000} \times \frac{7}{5}$.

Đáp số: $\frac{7}{5}$.

f) $\frac{1\,995 \times 1\,993 - 18}{1\,975 + 1\,993 \times 1\,994} + 2\,024$.

Đáp số: 2 025.

Bài 4: Tính nhanh

a) $5,26 + 8,85 + 1,15 + 4,74$

Đáp số: 20.

b) $0,75 + 1,19 + 2,25 + 0,81$

Đáp số: 5.

c) $12,5 + 2,3 + 7,5 + 7,7$

Đáp số: 30.

d) $3,6 \times 99 + 3,6$

Đáp số: 360.

e) $13,5 + 7,9 + 6,5 + 2,1$

Đáp số: 30.

f) $34,5 \times 6,7 + 34,5 \times 3,3$

Đáp số: 345.

g) $87,5 \times 59 + 87,5 \times 42 - 87,5$.

Đáp số: 8 750.

h) $3,6 : 2,5 + 1,4 : 2,5$

Đáp số: 2

i) $32 \times 47,8 + 320 \times 0,1 + 3\,200 \times 0,512$.

Đáp số: 3 200.

Bài 5: Tính nhanh

a) $0,1 + 0,2 + 0,3 + \dots + 1,9$

Đáp số: 19.

b) $0,05 + 0,1 + 0,15 + \dots + 2$.

Đáp số: 41.

c) $1,1 + 1,2 + 1,3 + \dots + 9,9$.

Đáp số: 489,5.

d) $0,25 + 0,5 + 0,75 + \dots + 10$.

Đáp số: 205.

e) $5,0 + 5,1 + 5,2 + \dots + 12,5$.

Đáp số: 665.

Bài 3: Tìm x, biết

a) $x - 7,95 = 4,05 + 1,25$.

Đáp số: $x = 13,25$.

b) $x \times 1,5 + 2,5 + x \times 1,5 - 3 = 8,5$.

Đáp số: $x = 3$.

c) $x + x : 0,5 + x : 0,25 + x : 0,125 = 15$.

Đáp số: $x = 1$.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 2

Dựa trên cơ sở lý luận và thực tiễn đã được trình bày ở Chương 1, trong Chương 2 đề tài đã giới thiệu một số dạng toán về tính tổng có quy luật đặc biệt trong chương trình Tiểu học, bao gồm: tính tổng các dãy số tự có quy luật, tính tổng các phân số có quy luật, tính nhanh các giá trị biểu thức. Mỗi dạng toán đều cung cấp những kiến thức quan trọng, kèm theo ví dụ và cách giải cụ thể. Đồng thời, hệ thống bài tập đề xuất được đưa ra nhằm giúp học sinh ôn tập, củng cố khắc sâu kiến thức, rèn luyện kỹ năng giải toán, từ đó phát huy tính tích cực, chủ động của học sinh trong quá trình học tập.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Được sự đồng ý của nhà trường, em đã tiến hành nghiên cứu đề tài khóa luận tốt nghiệp: “Một số bài toán tính tổng của quy luật đặc biệt”. Trong quá trình nghiên cứu, đề tài đã đạt được kết quả sau:

- Trình bày cơ sở lý luận về việc phát triển kỹ năng giải các bài toán về dãy số có quy luật đặc biệt, phân số dạng đặc biệt, tính nhanh các giá trị biểu thức cho học sinh Tiểu học: một số các vấn đề về hoạt động giải toán, kỹ năng giải toán, phân dạng các bài toán về tính tổng có quy luật đặc biệt ở Tiểu học.

- Trình bày một cách có hệ thống các dạng bài toán về tính tổng có quy luật đặc biệt ở Tiểu học: Bài toán tính tổng các dãy số có quy luật, bài toán tính tổng các phân số có quy luật, bài toán tính nhanh các giá trị biểu thức.

- Trình bày bài giải cho mỗi bài toán minh họa trong mỗi dạng toán. Khóa luận đưa ra một cách hệ thống phong phú các bài toán minh họa cho mỗi dạng toán và các bài tập đề xuất.

Về cơ bản khóa luận đã đạt được các mục tiêu và hoàn thành các nhiệm vụ đặt ra khi tiến hành nghiên cứu. Đề tài là tài liệu tham khảo giúp các em học sinh Tiểu học rèn luyện kỹ năng làm bài và giải các bài tập tính tổng có quy luật đặc biệt ở Tiểu học, tài liệu tham khảo hữu ích cho sinh viên ngành Giáo dục Tiểu học trường Đại học Hoa Lư khi học các học phần tự chọn, và một số thầy cô đang giảng dạy ở các trường Tiểu học muốn nghiên cứu dạng toán này. Tuy nhiên, do là lần đầu nghiên cứu một vấn đề khoa học nên chắc chắn khóa luận còn có thiếu sót, em mong muốn nhận được các ý kiến đóng góp của các thầy cô để đề tài được hoàn thiện hơn. Em xin chân thành cảm ơn.

DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Áng (chủ biên) – Dương Quốc Ân – Hoàng Thị Phước Hảo (2018), *Toán bồi dưỡng học sinh lớp 4*, Nxb Giáo dục Việt Nam.
2. Trần Thị Kim Cương – Tạ Hoàng Đồng (2023), *Rèn kỹ năng học tốt toán 4,5*, Nxb Đại học Quốc gia Hà Nội.
3. Trần Thị Kim Cương – Ngô Văn Nghi - Phạm Thị Yến (2023), *Nâng cao và phát triển toán 5 theo chuyên đề*, Nxb Đại học sư phạm.
4. Khúc Thành Chính (Chủ biên) – Đinh Thị Xuân Dung – Nguyễn Kính Đức – Đậu Thị Huế – Đinh Thị Kim Lan – Huỳnh Thị Kim Trang (2023), *Vở bài tập Toán 5*, Tập 1, Tập 2, Nxb Giáo dục Việt Nam.
5. Trần Nam Dũng (Tổng chủ biên) – Khúc Thành Chính (Chủ biên) – Đinh Thị Xuân Dung – Nguyễn Kính Đức – Đậu Thị Huế – Đinh Thị Kim Lan – Huỳnh Thị Kim Trang (2023), *Toán 5*, Nxb Giáo dục Việt Nam.
6. Trần Nam Dũng (Tổng chủ biên) – Khúc Thành Chính (Chủ biên) – Đinh Thị Xuân Dung – Nguyễn Kính Đức – Đậu Thị Huế – Đinh Thị Kim Lan – Huỳnh Thị Kim Trang (2022), *Toán 4*, Nxb Giáo dục Việt Nam.
7. Trần Nam Dũng (Tổng chủ biên) – Khúc Thành Chính (Chủ biên) – Đinh Thị Xuân Dung – Nguyễn Kính Đức – Đậu Thị Huế – Đinh Thị Kim Lan – Huỳnh Thị Kim Trang (2022), *Vở bài tập Toán 4*, Tập 1, Tập 2, Nxb Giáo dục Việt Nam.
8. Nguyễn Ngọc Giang (2017), *Phương pháp sáng tạo các bài toán Tiểu học*, Nxb Đại học Quốc Gia Hà Nội.
9. Trần Diên Hiền (2018), *Bồi dưỡng Toán dành cho học sinh lớp 3*, Nxb Giáo dục Việt Nam.
10. Trần Diên Hiền (2019), *10 Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán 4-5*, Tập 1, Nxb Giáo dục Việt Nam.
11. Trần Diên Hiền (2014), *Giáo trình chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán Tiểu học*, Nxb Đại học Sư Phạm.
12. Hà Huy Khoái (Tổng chủ biên) – Lê Anh Vinh (Chủ biên) – Nguyễn Áng – Vũ Văn Dương – Nguyễn Minh Hải – Hoàng Quế Hương – Bùi Bá Mạnh (2022), *Toán 4*, Nxb Giáo dục Việt Nam.

13. Hà Huy Khoái (Tổng chủ biên) – Lê Anh Vinh (Chủ biên) – Nguyễn Áng – Vũ Văn Dương – Nguyễn Minh Hải – Hoàng Quế Hương – Bùi Bà Mạnh (2023), *Toán 5*, Nxb Giáo dục Việt Nam.
14. Trần Ngọc Lan (2005), *Tuyển tập các đề thi học sinh giỏi toán lớp 4 – 5*, Nxb Đại học Sư phạm.
15. Trần Ngọc Lan (2008), *Giúp em giỏi toán 4*, Nxb Giáo dục.
16. Tô Hoàng Phong – Huỳnh Minh Chiến – Trần Huỳnh Thống (2000), *Tuyển chọn 400 bài tập toán lớp 4*, Nxb Đà Nẵng.
17. Tô Hoàng Phong – Huỳnh Minh Chiến – Trần Huỳnh Thống (2006), *Tuyển chọn 400 bài tập toán lớp 5*, Nxb Đại học Sư Phạm.
18. Lê Anh Vinh (Chủ biên) – Nguyễn Áng – Vũ Văn Dương – Nguyễn Minh Hải – Hoàng Quế Hương – Bùi Bà Mạnh (2023), *Vở bài tập Toán 5*, Tập 1, Tập 2, Nxb Giáo dục Việt Nam.
19. Lê Anh Vinh (Chủ biên) – Nguyễn Áng – Vũ Văn Dương – Nguyễn Minh Hải – Hoàng Quế Hương – Bùi Bà Mạnh (2022), *Vở bài tập Toán 4*, Tập 1, Tập 2, Nxb Giáo dục Việt Nam.
20. Đỗ Đức Thái (Tổng chủ biên) – Đỗ Tiến Đạt (Chủ biên) – Nguyễn Hoài Anh – Trần Thuý Ngà – Nguyễn Thị Thanh Sơn (2022), *Toán 4*, Nxb Đại học Sư Phạm.
21. Đỗ Đức Thái (Tổng chủ biên) – Đỗ Tiến Đạt (Chủ biên) – Nguyễn Hoài Anh – Trần Thuý Ngà – Nguyễn Thị Thanh Sơn (2023), *Toán 5*, Nxb Đại học Sư Phạm.
22. Đỗ Đức Thái (Tổng Chủ biên) – Đỗ Tiến Đạt (Chủ biên) – Nguyễn Hoài Anh – Trần Thuý Ngà – Nguyễn Thị Thanh Sơn (2023), *Vở bài tập Toán 5*, Tập 1, Tập 2, Nxb Đại học Sư Phạm.
23. Đỗ Đức Thái (Tổng chủ biên) – Đỗ Tiến Đạt (Chủ biên) – Nguyễn Hoài Anh – Trần Thuý Ngà – Nguyễn Thị Thanh Sơn (2022), *Vở bài tập Toán 4*, Tập 1, Tập 2, Nxb Đại học Sư Phạm.
24. Trần Huỳnh Thống – Bảo Châu – Lê Phú Hùng (2006), *Tuyển tập các bài toán hay và khó lớp 5*, Nxb Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh.

25. Nguyễn Đức Tấn (chủ biên) – Lê Thị Kim Phụng – Nguyễn Thị Trinh (2016), *Bồi dưỡng học sinh giỏi Toán 5 theo chuyên đề số tự nhiên*, Nxb Tổng hợp Thành phố Hồ Chí Minh.
26. Nguyễn Đức Tấn (Chủ biên) – Tô Thị Yến – Nguyễn Văn Sơn (2023), *Nâng cao và phát triển toán 5*, Nxb tổng hợp Thành phố Hồ Chí Minh.
27. Võ Thị Hoài Tâm – Nguyễn Hùng Tân – Nguyễn Thị Thanh Phương (2023), *Phát triển tư duy học Toán 4*, Nxb Đồng Nai.
28. Chuyên đề các dạng bài toán tính nhanh phân số.
Nguồn: <https://download.vn/chuyen-de-cac-dang-bai-toan-tinh-nhanh-phan-so-38733>
29. Các làm một số dạng toán tính nhanh ở Tiểu học.
Nguồn: <https://baitoan.com/cach-lam-mot-so-dang-toan-tinh-nhanh-tieu-hoc>.