

TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ
KHOA SƯ PHẠM TIỂU HỌC - MẦM NON

Đoàn Hương Giang

KHOÁ LUẬN TỐT NGHIỆP

ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGƯỢC TỪ CUỐI
TRONG DẠY HỌC TOÁN Ở TIỂU HỌC

Mã sinh viên: 2552020521

Ngành: Giáo dục Tiểu học

NINH BÌNH, 2025

TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ
KHOA SƯ PHẠM TIỂU HỌC - MẦM NON

Đoàn Hương Giang

KHOÁ LUẬN TỐT NGHIỆP

ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGƯỢC TỪ CUỐI
TRONG DẠY HỌC TOÁN Ở TIỂU HỌC

Mã sinh viên: 2552020521

Ngành: Giáo dục Tiểu học

Người hướng dẫn: ThS. Đặng Thị Thu Hiền

NINH BÌNH, 2025

LỜI CẢM ƠN

Trước tiên, em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Ban Giám hiệu Trường Đại học Hoa Lư, quý thầy cô trong Khoa Sư phạm Tiểu học - Mầm non, những người đã luôn tận tâm giảng dạy, tạo mọi điều kiện thuận lợi để em có thể học tập, rèn luyện và hoàn thành tốt nhiệm vụ trong suốt quá trình học tập tại trường. Sự hỗ trợ, quan tâm và định hướng quý báu từ quý thầy cô chính là nền tảng quan trọng giúp em có được hành trang kiến thức, kỹ năng và lòng yêu nghề để bước vào con đường làm nghề giáo đầy ý nghĩa.

Em xin gửi lời cảm ơn trân trọng và lòng biết ơn sâu sắc nhất đến Thạc sĩ Đặng Thị Thu Hiền - Giảng viên Khoa Sư phạm Trung học, người đã trực tiếp hướng dẫn, tận tình chỉ bảo em trong suốt quá trình thực hiện khóa luận tốt nghiệp. Với chuyên môn vững vàng, sự tận tâm và tinh thần trách nhiệm cao, cô không chỉ là người định hướng học thuật mà còn là nguồn động viên to lớn, giúp em luôn giữ được niềm tin, sự kiên trì và nhiệt huyết với đề tài nghiên cứu mà mình theo đuổi. Em vô cùng trân trọng những đóng góp quý giá, những nhận xét chân thành và cả những lời động viên đầy nhân văn mà cô đã dành cho em.

Dù đã nỗ lực hết mình để hoàn thiện đề tài, nhưng do giới hạn về thời gian, kinh nghiệm thực tiễn còn hạn chế, khóa luận chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót nhất định. Em rất mong nhận được những ý kiến góp ý chân thành, quý báu từ quý thầy cô và bạn bè để nội dung của khóa luận được hoàn thiện hơn trong những lần nghiên cứu sau.

Em xin trân trọng cảm ơn!

Ninh Bình, ngày tháng năm 2025

Sinh viên

Đoàn Hương Giang

LỜI CAM ĐOAN

Em xin trân trọng cam đoan rằng khóa luận tốt nghiệp **“Ứng dụng phương pháp tính ngược từ cuối trong dạy học toán ở Tiểu học”** là công trình nghiên cứu độc lập của bản thân dưới sự hướng dẫn khoa học của ThS. Đặng Thị Thu Hiền. Đề tài này không trùng lặp với bất kỳ nghiên cứu nào trước đây, đồng thời mọi tài liệu tham khảo đều được ghi rõ nguồn gốc và trích dẫn đúng quy định.

NGƯỜI THỰC HIỆN

Đoàn Hương Giang

XÁC NHẬN CỦA NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

Đề tài “**Ứng dụng phương pháp tính ngược từ cuối trong dạy học toán ở Tiểu học**” do sinh viên Đoàn Hương Giang thực hiện là công trình nghiên cứu độc lập, không trùng lặp với bất kỳ nghiên cứu nào khác và chưa từng được công bố dưới mọi hình thức. Mọi tài liệu tham khảo trong khóa luận đều được trích dẫn nguồn gốc minh bạch, đầy đủ theo quy định học thuật.

Ninh Bình, ngày tháng năm 2025

Người hướng dẫn khoa học

ThS. Đặng Thị Thu Hiền

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU.....	1
1. Lý do chọn đề tài.....	1
2. Tổng quan tình hình nghiên cứu	2
3. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu.....	3
3.1. Mục đích nghiên cứu	3
3.2. Nhiệm vụ nghiên cứu.....	3
4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu	3
4.1. Đối tượng nghiên cứu	3
4.2. Phạm vi nghiên cứu	3
5. Phương pháp nghiên cứu	4
6. Ý nghĩa khoa học và ý nghĩa thực tiễn.....	4
6.1. Ý nghĩa khoa học	4
6.2. Ý nghĩa thực tiễn	4
CHƯƠNG I	5
CƠ SỞ LÝ LUẬN.....	5
1.1. Vị trí, vai trò và tầm quan trọng của hoạt động giải toán trong dạy và học toán ở Tiểu học.....	5
1.1.1. Vị trí, vai trò của hoạt động giải toán trong dạy và học toán ở Tiểu học	5
1.1.2. Các bước giải toán ở Tiểu học.....	8
1.2. Khái niệm phương pháp tính ngược từ cuối	10
1.3. Một số kĩ thuật trong xây dựng bài toán ở tiểu học.....	12
1.3.1. Một số thủ thuật trong xây dựng bài toán.....	12
1.3.2. Một số kĩ thuật trong xây dựng bài toán ở tiểu học.....	17

KẾT LUẬN CHƯƠNG I	24
CHƯƠNG II.....	25
ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGƯỢC TỪ CUỐI TRONG DẠY HỌC TOÁN Ở TIỂU HỌC	25
2.1. Ứng dụng phương pháp tính ngược từ cuối để giải toán số học.....	25
2.1.1. Ứng dụng phương pháp tính ngược từ cuối để giải toán có một đại lượng.....	25
2.1.2. Ứng dụng phương pháp tính ngược từ cuối để giải toán có nhiều đại lượng.....	32
2.2. Ứng dụng phương pháp tính ngược từ cuối để giải toán có lời văn	42
2.2.1. Ứng dụng phương pháp tính ngược từ cuối để giải toán có một đại lượng.....	42
2.2.2. Ứng dụng phương pháp tính ngược từ cuối để giải toán có nhiều đại lượng.....	50
2.3. Ứng dụng phương pháp tính ngược từ cuối để giải toán vui và toán cổ.....	61
2.4. Sáng tạo một số bài toán giải bằng phương pháp tính ngược từ cuối	66
2.4.1. Thủ thuật nêu các dữ kiện của bài toán đã cho dưới dạng gián tiếp	66
2.4.2. Thủ thuật thay đổi số liệu, văn cảnh của bài toán đã cho	70
2.4.3. Thủ thuật thêm/ bớt yêu cầu cho bài toán.....	74
KẾT LUẬN CHƯƠNG II.....	78
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ.....	79
DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO	80

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Toán học là môn khoa học tự nhiên ra đời sớm nhất, cùng với triết học. Là môn khoa học thuần túy tư duy, nghiên cứu về các khái niệm như số lượng, cấu trúc, không gian và sự thay đổi. Thông qua việc sử dụng các ký hiệu, lý thuyết và phương pháp Toán học không chỉ mô tả mà còn phân tích các mối quan hệ và các hiện tượng trong thế giới xung quanh. Toán có mối liên hệ mật thiết với các ngành nghề trong cuộc sống và có tính ứng dụng cao trong nhiều lĩnh vực như khoa học tự nhiên, kỹ thuật, kinh tế, tài chính và công nghệ thông tin. Đặc biệt, Toán học giữ một vai trò quan trọng không thể thiếu trong ngành giáo dục thế giới nói chung cũng như Việt Nam nói riêng.

Ở Tiểu học, môn Toán trang bị cho học sinh kiến thức về số học, đại lượng; các yếu tố hình học và thống kê; nhận biết được mối quan hệ về số lượng và hình dạng không gian của thế giới xung quanh; giải được các bài toán có lời văn,... Không chỉ thế, môn Toán góp phần quan trọng trong việc phát triển năng lực tư duy, khả năng suy luận và giải quyết vấn đề; phát triển trí thông minh, và cách suy nghĩ độc lập linh hoạt; logic cùng các kỹ năng làm việc có kế hoạch, khoa học, chủ động, linh hoạt, sáng tạo. Qua đó, góp phần cho học sinh hình thành các phẩm chất cần thiết và quan trọng như: cần cù, chăm chỉ, cẩn thận, có ý thức vượt khó,...

Trong nội dung chương trình Toán Tiểu học, phương pháp tính ngược từ cuối là một trong những phương pháp giải toán quan trọng. Khi làm phương pháp tính ngược từ cuối giúp học sinh phát triển khả năng phân tích và suy luận logic bằng cách bắt đầu từ dữ liệu đã cho ở đề bài, học sinh làm ngược lại để tìm ra dữ liệu ban đầu. Ngoài ra, học sinh được tiếp cận bài toán ở nhiều góc độ khác nhau để giúp nhận thức rõ hơn mối quan hệ giữa các yếu tố. Và rồi, mỗi học sinh có thể tìm ra nhiều cách giải khác nhau cho cùng một bài toán, từ đó khuyến khích sự sáng tạo và khả năng tư duy độc lập. Cùng với việc nâng cao chất lượng giáo dục đó là việc bồi dưỡng học sinh giỏi ở các Trường Tiểu

học là nhiệm vụ không thể thiếu. Để học sinh phát huy được tối đa khả năng, tư duy, óc sáng tạo và trí lực của bản thân, đặc biệt là học sinh ở các lớp 3, lớp 4 và lớp 5 thì bản thân người làm giáo dục, dạy học phải tìm cho mình được các phương pháp bồi dưỡng học sinh hợp lý, trong đó không thể không kể đến phương pháp tính ngược từ cuối.

Xuất phát từ những lí do trên, em đã lựa chọn đề tài **“Ứng dụng Phương pháp tính ngược từ cuối trong dạy học toán ở Tiểu học”** làm đề tài khoá luận tốt nghiệp. Với mong muốn đề tài khoá luận sẽ giúp bản thân có thêm kiến thức, hiểu rõ sâu sắc về Phương pháp tính ngược từ cuối để phục vụ cho công việc sau này đồng thời sẽ phần nào giúp các em học sinh Tiểu học được rèn luyện, phát triển kĩ năng giải các bài toán về phương pháp tính ngược từ cuối.

2. Tổng quan tình hình nghiên cứu

Dạy học nội dung các bài toán Phương pháp tính ngược từ cuối là một vấn đề được quan tâm và có một số đề tài nghiên cứu về vấn đề này. Trong đó, có các đề tài nghiên cứu tiêu biểu như:

- Phạm Văn Tuyên (2012), Sáng kiến kinh nghiệm *“Giải bài toán bằng phương pháp tính ngược từ cuối”*. Trong bài viết này, tác giả nghiên cứu cách nhận diện và hướng giải quyết về phương pháp tính ngược từ cuối cho học sinh Tiểu học. Từ đó, góp phần nâng cao bồi dưỡng học sinh giỏi cho lớp 4, lớp 5 ở Trường Tiểu học.

- Hoàng Thị Hiền, Sáng kiến kinh nghiệm *“Hướng dẫn một số phương pháp giải toán bồi dưỡng học sinh học tốt môn Toán lớp 5”*. Ở đề tài này, tác giả nghiên cứu một số phương pháp: phương pháp sơ đồ đoạn thẳng, phương pháp tính ngược từ cuối, phương pháp xét lần lượt các trường hợp,... Trên cơ sở này, học sinh nhận diện được các phương pháp và cách giải toán bằng các phương pháp đó.

- Nguyễn Thị Phương Thảo (2017), *“Phương pháp tính ngược từ cuối trong việc giải một số dạng toán bậc Tiểu học”*, Trường Đại học Sư phạm Hà

Nội 2. Ở khoá luận này, tác giả nghiên cứu, phân tích cách giải và ứng dụng của phương pháp này vào giải các bài toán ở Tiểu học.

Có thể thấy rằng, hiện nay, đã có các đề tài nghiên cứu về phương pháp tính ngược từ cuối trong chương trình toán Tiểu học. Tuy nhiên, chỉ rất ít đề tài khai thác một cách hệ thống, phong phú các dạng toán liên quan đến tính ngược từ cuối.

3. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

3.1. Mục đích nghiên cứu

Nghiên cứu ứng dụng của phương pháp tính ngược từ cuối vào giải và sáng tạo bài toán ở Tiểu học. Từ đó, giúp học sinh vận dụng phương pháp tính ngược từ cuối vào giải các bài toán một cách chủ động, linh động và sáng tạo.

3.2. Nhiệm vụ nghiên cứu

- Tìm hiểu chương trình Toán Tiểu học 2018.
- Nghiên cứu cơ sở lý luận của việc vận dụng phương pháp tính ngược từ cuối vào giải toán Tiểu học.
- Nghiên cứu ứng dụng của phương pháp tính ngược từ cuối vào giải toán ở Tiểu học: các bài toán số học, toán có lời văn, các bài toán về tính ngược từ cuối gộp.
- Sáng tạo một số bài toán số học và toán có lời văn giải bằng phương pháp tính ngược từ cuối.

4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

4.1. Đối tượng nghiên cứu

Phương pháp tính ngược từ cuối, các bài toán được giải bằng phương pháp tính ngược từ cuối trong chương trình Toán Tiểu học.

4.2. Phạm vi nghiên cứu

Nghiên cứu ứng dụng của phương pháp tính ngược từ cuối để giải các bài toán số học, toán có lời văn, các bài toán về vui và toán cổ. Ngoài ra, đề tài cũng tập trung nghiên cứu sáng tạo một số bài toán giải bằng phương pháp tính ngược từ cuối.

5. Phương pháp nghiên cứu

- Phương pháp nghiên cứu lý luận: Đọc, tìm hiểu và nghiên cứu sách giáo khoa toán tiểu học, giáo trình toán Tiểu học, các sách tham khảo và tài liệu liên quan đến phương pháp tính ngược từ cuối.

- Phương pháp đàm thoại: Xin được tiếp thu ý kiến, học hỏi kiến thức và kinh nghiệm của một số thầy cô giáo ở bộ môn Toán trường Đại học Hoa Lư, một số giáo viên Tiểu học nhằm hoàn thiện đề tài về cả nội dung và hình thức.

- Phương pháp phân tích, tổng hợp: Phân tích, hệ thống hoá, khái quát hoá các vấn đề nghiên cứu có liên quan đến đề tài.

6. Ý nghĩa khoa học và ý nghĩa thực tiễn

6.1. Ý nghĩa khoa học

Việc nghiên cứu ứng dụng của phương pháp tính ngược từ cuối trong dạy học toán ở Tiểu học cung cấp một cách có hệ thống các dạng bài tập được giải bằng phương pháp tính ngược từ cuối, chỉ ra cách thức sáng tạo bài toán. Qua đó, giúp cho học sinh được rèn luyện tư duy logic, tính kiên trì và khả năng giải quyết vấn đề.

6.2. Ý nghĩa thực tiễn

Kết quả nghiên cứu đề tài sẽ làm tài liệu tham khảo bổ ích cho sinh viên ngành Giáo dục Tiểu học nói chung của Trường Đại học Hoa Lư, cũng như cho học sinh và giáo viên nói chung ở các trường Tiểu học. Tài liệu này sẽ góp phần nâng cao hiệu quả trong giảng dạy học môn Toán ở Tiểu học từ đó góp phần cải thiện chất lượng học tập của học sinh.

CHƯƠNG I

CƠ SỞ LÝ LUẬN

1.1. Vị trí, vai trò và tầm quan trọng của hoạt động giải toán trong dạy và học toán ở Tiểu học

1.1.1. Vị trí, vai trò của hoạt động giải toán trong dạy và học toán ở Tiểu học

a. Khái niệm của hoạt động giải toán

Giải toán là một hoạt động trí tuệ khó khăn, phức tạp, hình thành kỹ năng giải toán khó hơn nhiều so với kỹ năng tính, vì các bài toán là sự kết hợp đa dạng nhiều khái niệm, nhiều quan hệ toán học. Giải toán không chỉ là việc nhớ mẫu rồi áp dụng, mà đòi hỏi người làm cần nắm chắc khái niệm, các mối quan hệ toán học, nắm chắc ý nghĩa của phép tính, đòi hỏi khả năng độc lập suy luận của học sinh, đòi hỏi học sinh tính toán các phép tính một cách thông thạo.

Hoạt động giải bài toán là một nhiệm vụ học tập thoả mãn các bài toán phù hợp với chương trình, mục tiêu, nội dung, phương pháp dạy học. Và các bài toán không quá dễ cũng không quá khó, tức là đòi hỏi học sinh không thể trả lời ngay tức khắc mà cần biết hệ thống lại kiến thức cũ mới có cơ hội giải quyết được vấn đề (các em cần tích cực suy nghĩ, hoạt động để biến đổi đối tượng hoặc điều chỉnh kiến thức sẵn có). Ngoài ra, các bài toán phải được trình bày sao cho mọi học sinh hiểu và cùng tham gia.

b. Vị trí, vai trò của hoạt động giải toán trong dạy và học toán ở Tiểu học

Theo Chương trình Giáo dục phổ thông (2018), Chương trình Toán ở Tiểu học gồm ba mạch kiến thức: Số và Phép tính; Hình học và Đo lường; Thống kê và Xác suất. Các kiến thức về hình học được trình bày xen kẽ với các kiến thức về Số và Phép tính, Thống kê và Xác suất nhằm tạo ra mối liên hệ bền vững và sự hỗ trợ chặt chẽ giữa các mạch kiến thức với nhau. Điều này vừa

phù hợp với tính thống nhất của toán học hiện đại, vừa giúp đa dạng hóa các loại hình luyện tập toán.

Đối với hoạt động dạy học Toán không chỉ dạy về kiến thức khô khan mà còn là quá trình tìm tòi, khám phá các phương pháp giải khác nhau, từ đó kích thích được tư duy sáng tạo, logic của học sinh. Dạy toán còn là công cụ quan trọng để giáo viên đánh giá năng lực học tập của học sinh để có những điều chỉnh phù hợp với nhu cầu của học sinh. Song, hoạt động học Toán giúp học sinh hình thành, rèn luyện tư duy logic, phân tích và đánh giá thông tin, tư duy phản biện kỹ năng làm việc nhóm và giao tiếp trong các bài toán thực tiễn. Hoạt động dạy và học toán thường xuyên sẽ tạo ra sự hứng thú, giúp học sinh cảm thấy thích thú và đạt được cảm giác thành công khi giải quyết được các bài toán. Như vậy, hoạt động dạy và học toán ở Tiểu học không chỉ đóng vai trò quan trọng trong việc truyền đạt kiến thức mà còn góp phần phát triển tư duy, kỹ năng sống và chuẩn bị cho học sinh một nền tảng vững chắc trong tương lai.

Trong hoạt động dạy và học Toán ở Tiểu học, giải toán là hoạt động chủ đạo, giúp học sinh tiếp cận và nắm vững kiến thức toán học vì vậy giải toán có một vị trí vô cùng quan trọng. Với hoạt động dạy học học sinh được cung cấp các kiến thức về: khái niệm, quy tắc và phương pháp tính toán cơ bản từ đó thông qua hoạt động giải toán, học sinh vận dụng các khái niệm, quy tắc, công thức đã được dạy để xử lý các bài toán hay giải quyết những tình huống đặt ra trong toán học, trong các môn học khác và thực tế đời sống lao động sản xuất. Không những thế thông qua hoạt động giải toán giúp học sinh ôn tập, hệ thống hoá, củng cố các kiến thức và kỹ năng đã học. Đồng thời, giáo viên đánh giá được trình độ học tập của mỗi học sinh để đưa ra được phương pháp dạy học phù hợp.

Thông qua việc giải toán giúp học sinh ôn tập, hệ thống hoá, củng cố các kiến thức và kỹ năng đã học. Đối với học sinh lớp 1, lớp 2 chưa có đủ khả năng lĩnh hội kiến thức qua lí thuyết thuần túy. Hầu hết học sinh phải thông qua phương pháp trực quan để lĩnh hội và rồi rút ra kết luận, các khái niệm và nội

dụng kiến thức cơ bản. Với học sinh lớp 3, lớp 4, lớp 5 học sinh gần như đã hoàn thiện đầy đủ về mặt trí óc nên việc giải toán là dễ hơn, từ việc tóm tắt, khái quát các dữ liệu rồi rút ra được kiến thức, ý nghĩa của bài học. Các kiến thức đó khi hình thành lại được củng cố, áp dụng vào bài tập với mức độ nâng dần từ dễ đến khó, từ đơn giản đến phức tạp.

Thông qua hoạt động giải toán là nhịp cầu nối toán học trong Nhà trường và ứng dụng toán học trong đời sống xã hội. Các kiến thức giải toán rất thực tế và gần gũi với cuộc sống hàng ngày của học sinh. Qua các ví dụ cụ thể giúp học sinh nhận biết số, các phép tính và hình, phản ánh mối quan hệ về số lượng và hình dạng không gian trong hình học. Tổ chức các hoạt động thực hành tính, đo lường, giải toán có nội dung thực tế để giúp học sinh nhận biết toán học có nhiều trong ứng dụng thực tiễn.

Trong chương trình toán Tiểu học có rất nhiều dạng và có nhiều phương pháp giải khác nhau. Giải bài toán bằng phương pháp tính ngược từ cuối là dạng toán khá quen thuộc nhưng để nắm được cách làm, các bước làm và có bao nhiêu dạng thì học sinh lại chưa thực sự hiểu hết và nắm chắc được. Việc giúp học sinh phân loại, phát hiện ra quy tắc làm bài bằng phương pháp tính ngược từ cuối là việc làm hết sức quan trọng, để làm được bài học sinh cần tư duy ngược, suy nghĩ theo chiều ngược lại để giải toán từ đó phát triển khả năng phân tích và đánh giá. Khi gặp các bài toán có nhiều bước, phương pháp này giúp học sinh không bị nhầm lẫn trong quá trình tính toán, giúp các em tự tin hơn trong giải quyết các vấn đề. Ngoài ra, phương pháp ngược từ cuối là một công cụ mạnh mẽ giúp học sinh không chỉ trong môn Toán mà còn trong việc phát triển tư duy phản biện và giải quyết vấn đề trong cuộc sống hàng ngày.

Hoạt động giải toán giúp cho học sinh cũng như giáo viên đạt được những mục tiêu đặt ra phù hợp với Chương trình Giáo dục Phổ thông 2018, ứng dụng cần thiết vào thực tiễn cuộc sống, giải quyết các tình huống có trong đời sống nhờ vào kiến thức sẵn có và được rèn luyện trong quá trình học tập. Vì vậy, trong dạy học toán nói chung, ở tiểu học nói riêng, giải toán rất quan trọng trong việc dạy học, giáo dục học sinh và yêu cầu học sinh phải tư duy

một cách tích cực, linh hoạt; suy nghĩ năng động và sáng tạo. Vì vậy có thể coi giải toán là một trong những biểu hiện năng động nhất của hoạt động trí tuệ của học sinh.

Đối với học sinh, khi giải được các bài toán tức là học sinh đã hiểu, nhận dạng được bài toán và xác lập được mối liên hệ giữa các dữ liệu, giữa cái đã cho và cái phải đi tìm trong điều kiện của bài toán. Từ đó lựa chọn được phương pháp giải phù hợp, ngắn gọn, độc đáo. Mặt khác, thông qua hoạt động giải toán, học sinh biết cách vận dụng các khái niệm, quy tắc, công thức đã được học trong sách giáo khoa để xử lý những tình huống đặt ra trong môn Toán, trong các môn học khác và trong thực tế đời sống lao động sản xuất. Đồng thời thông qua hoạt động giải toán, giáo viên có thể phát hiện những ưu điểm cũng như thiếu sót của học sinh về kiến thức, kỹ năng và tư duy để có biện pháp kịp thời giúp các em phát huy hoặc khắc phục. Mặt khác, cũng thông qua hoạt động giải toán, học sinh tự rút ra những ưu điểm và hạn chế của bản thân để có cách khắc phục, góp phần nâng cao chất lượng dạy và học toán.

Qua hoạt động giải toán, học sinh rèn luyện những đức tính và phong cách làm việc trong khoa học như ý chí khắc phục và vượt qua khó khăn, lòng say mê và tìm tòi, sáng tạo trong học tập. Đồng thời, thông qua hoạt động giải toán hình thành cho học sinh thói quen xét đoán vấn đề có căn cứ, làm việc có kế hoạch, có kiểm tra kết quả cuối cùng, từng bước hình thành và rèn cho học sinh thói quen suy nghĩ độc lập, linh hoạt. Từ đó hình thành khả năng trình bày, diễn đạt một vấn đề một cách chặt chẽ và mạch lạc.

Qua hoạt động giải toán, học sinh được củng cố kiến thức và rèn kỹ năng sử dụng Tiếng Việt, tự nhiên và xã hội, giáo dục môi trường....

1.1.2. Các bước giải toán ở Tiểu học

Hoạt động giải toán ở Tiểu học đối với mỗi học sinh là một hoạt động khó bởi mỗi bài toán là sự kết hợp đa dạng của nhiều quan hệ toán học. Bởi học sinh còn khó khăn trong việc xác định các mối quan hệ toán học, các yếu tố của bài toán, xác định không đúng yêu cầu do chưa hiểu hết các thuật ngữ, ngữ nghĩa của bài toán. Giải toán không chỉ là làm theo mẫu, mà đòi hỏi nắm chắc

khái niệm, quan hệ toán học, nắm chắc ý nghĩa của phép tính, đòi hỏi khả năng độc lập suy luận của học sinh.

Vì vậy, để giúp học sinh đạt được hiệu quả trong việc giải toán, thông thường, người giáo viên sẽ hướng dẫn học sinh nắm vững quá trình giải toán qua 4 bước sau:

Bước 1: Tìm hiểu bài toán

Trước khi làm bài, mỗi học sinh cần rèn luyện tính cẩn thận, đầu tiên hướng dẫn học sinh đọc kỹ đề toán, hiểu được ý nghĩa của các thuật ngữ, cần biết được: Bài toán cho gì? Bài toán cần tìm gì?, thuộc dạng toán nào? và đề xuất phương pháp giải toán nào?. Thông qua những câu hỏi trên giúp học sinh nắm rõ đề bài.

Giáo viên có thể hướng dẫn học sinh tìm hiểu bài toán bằng những câu hỏi trên.

Bước 2: Phân tích và tìm lời giải

- Thiết lập mối quan hệ giữa các dữ liệu đã biết và dữ liệu cần tìm để từng bước thực hiện được phép toán tương ứng.

- Thiết lập quy trình từng bước theo logic của phương pháp giải dạng toán xác định ở Bước 1.

- Thực hiện phép toán để tìm ra kết quả cần tìm.

Đây là hoạt động tư duy khó với học sinh tiểu học. Song lại là một hoạt động quan trọng của quá trình giải toán, nên giáo viên cần kiên trì dẫn dắt giúp học sinh tìm được cách giải bài toán.

Bước 3: Trình bày lời giải

Sử dụng ngôn ngữ chính xác theo thuật ngữ toán học, trình bày từng phép toán đã xác định ở Bước 2.

Ghi đáp số và đơn vị của kết quả.

Bước 4: Kiểm tra lời giải và khai thác sâu lời giải

Sau mỗi bước giải, cần kiểm tra xem đã tính đúng chưa, viết câu lời giải đã hợp lý chưa? Giải xong bài toán phải thử xem đáp số tìm ra có thể trả lời đúng câu hỏi của bài toán, có phù hợp với các điều kiện của bài toán không?

Đây không phải là bước bắt buộc đối với quá trình giải toán, nhưng lại là bước không thể thiếu trong dạy học toán. Có một số cách khai thác sâu lời giải:

- Xét tính đúng đắn của lời giải.
- Tìm lời giải khác.
- Đề xuất bài toán tương tự.
- Chỉ ra một số sai lầm thường gặp khi giải toán.

1.2. Khái niệm phương pháp tính ngược từ cuối

Có một số bài toán cho biết kết quả sau khi thực hiện liên tiếp một số phép tính đối với số phải tìm. Khi giải các bài toán dạng này bằng cách tính ngược từ cuối, ta thực hiện liên tiếp các phép tính ngược với các phép tính đã cho trong đề bài. Kết quả tìm được trong phép tính trước chính là thành phần đã biết của phép tính liền sau đó. Sau khi thực hiện hết các phép tính ngược với các phép tính đã cho trong đề bài, ta nhận được kết quả cần tìm. Giải bài toán bằng phương pháp như vậy gọi là phương pháp tính ngược từ cuối hoặc suy luận từ cuối hoặc suy luận từ dưới lên.

Những bài toán giải được bằng phương pháp tính ngược từ cuối thường được giải bằng phương pháp đại số hoặc bằng phương pháp ứng dụng đồ thị. Tuy nhiên, có bài toán giải bằng phương pháp tính ngược từ cuối sẽ ngắn gọn hơn, dễ hiểu hơn (bài toán vui và toán cổ, bài toán tính ngược từ cuối gộp, ...)

Cơ sở toán học để giải các bài toán về tính ngược từ cuối là các quy tắc tìm thành phần chưa biết của phép tính. Ta bắt đầu với một đại lượng chưa biết và bài toán sẽ đưa ra 1 chuỗi các phép toán với kết quả cuối cùng đã được cho sẵn.

Các bước giải bài toán tính ngược từ cuối:

Bước 1: Xác định thứ tự các số liệu đã cho trong đề bài theo thứ tự từ cuối lên.

Bước 2: Xác định các phép tính ngược với đề bài theo thứ tự từ cuối lên (ngược với phép cộng là phép trừ, ngược với phép trừ là phép cộng, ngược với phép nhân là phép chia, ngược với phép chia là phép nhân).

Bước 3: Đặt lời giải cho bài toán, thực hiện phép tính và ghi đáp số của bài toán.

Những bài toán dạng này rất đa dạng và phong phú, người giáo viên có thể áp dụng dạy cho học sinh từ lớp 1 đến lớp 5 ở bậc Tiểu học. Các bài toán được sắp xếp từ đơn giản đến phức tạp phù hợp với quá trình nhận thức của các em và được chia ra làm nhiều dạng nhỏ với những cách giải khác nhau như: dạng biến đổi các phép tính đơn giản dưới dạng tìm x , những bài toán liên quan đến phân số, dạng những bài thêm bớt, dạng bài biến đổi liên tiếp phức tạp,... Việc hướng dẫn học sinh nắm được phương pháp giải các bài toán dạng này là một việc làm hết sức cần thiết đối với mỗi giáo viên Tiểu học, đặc biệt là quá trình bồi dưỡng học sinh giỏi.

Một số bài toán giải được bằng phương pháp tính ngược từ cuối cũng có thể giải bằng một số các phương pháp khác như:

- Phương pháp đại số.
- Phương pháp đồ thị.

Mỗi những phương pháp trên đều cần người giáo viên phân tích kỹ để dạy học sinh, và bản thân học sinh cũng cần lựa chọn được phương pháp giải phù hợp để giải toán. Mỗi một phương pháp trên đều có đặc trưng riêng, vì vậy trong quá trình dạy người giáo viên cần chú ý lựa chọn cẩn thận, phù hợp với bài toán để việc giải toán được diễn ra suôn sẻ và nêu bật được cái hay trong bài toán. Song, mỗi phương pháp cần được chọn lọc để phù hợp với trình độ nhận thức của mỗi học sinh.

Đối với tiểu học, phương pháp tính ngược từ cuối có rất nhiều dạng. Và một số dạng gần gũi với học sinh và hay gặp trong quá trình làm bài là một số dạng sau:

- Ứng dụng giải các bài toán số học.
- Ứng dụng để giải toán có lời văn.
- Các bài toán tính ngược từ cuối gộp.

Trong mỗi dạng toán thuộc chương trình Toán tiểu học, các bài toán cụ thể thường rất đa dạng và phong phú về hình thức thể hiện, cách đặt vấn đề cũng như phương pháp giải quyết. Mỗi bài toán không chỉ mang một ý nghĩa riêng, thể hiện một tình huống hoặc mục tiêu giáo dục nhất định, mà còn góp

phần củng cố và phát triển năng lực tư duy toán học cho học sinh. Dù có sự khác biệt về mặt nội dung hay cách trình bày, các bài toán đều thống nhất trong việc đảm bảo yêu cầu cần đạt của Chương trình Giáo dục phổ thông 2018, đặc biệt là phát triển phẩm chất, năng lực người học và hình thành các năng lực toán học cốt lõi như: năng lực tư duy và lập luận toán học, năng lực giải quyết vấn đề, năng lực mô hình hóa toán học. Như đối với các bài toán số học ta có một số bài toán sau:

“Tìm một số, biết rằng khi nhân số đó với 5, rồi bớt đi 3 sau đó cộng với 4,5, cuối cùng chia cho 3 ta được kết quả bằng 6.”

Hay bài toán *“Tìm một số, biết rằng nhân số đó với 4 rồi cộng với 5 sau đó bớt đi 25 và cuối cùng chia cho 8 thì được số nhỏ nhất có hai chữ số giống nhau.*

Bài toán phù hợp với lớp mấy?”.

Một số bài toán về dạng toán có lời văn:

“Bình có một số nhãn vở. Bình cho An $\frac{2}{3}$ số nhãn vở, cho Lan $\frac{1}{3}$ số nhãn vở còn lại thì còn 10 cái nhãn vở. Hỏi lúc đầu Bình có bao nhiêu nhãn vở?”

Hay bài toán *“Đàn thỏ nhà Quang cứ sau mỗi quý lại tăng gấp đôi. Đến quý thứ tư thì đàn thỏ có 32 con. Hỏi tháng đầu năm đó đàn thỏ có bao nhiêu con?”.*

1.3. Một số kĩ thuật trong xây dựng bài toán ở tiểu học

1.3.1. Một số thủ thuật trong xây dựng bài toán

a. Thủ thuật thay đổi số liệu

Thủ thuật thay đổi số liệu là thủ thuật đơn giản và được sử dụng nhiều trong việc thiết kế cũng như xây dựng bài toán từ những bài toán, dạng toán cho trước. Từ những bài toán ban đầu, người giáo viên phát triển thành các bài toán khác nhau. Đây là một trong những cách thường sử dụng để khai thác bài tập nhằm phát triển khả năng tư duy toán học của học sinh tiểu học.

Bài toán gốc dành cho học sinh lớp 5:

“Tìm một số, biết rằng khi nhân số đó với 5, rồi bớt đi 3 sau đó cộng với 4,5, cuối cùng chia cho 3 ta được kết quả bằng 6.”

Dựa vào thủ thuật thay đổi số liệu, ta có bài toán mới sau:

“Tìm một số, biết rằng khi nhân số đó với 7, rồi bớt đi 5 sau đó cộng với 8, cuối cùng chia cho 2 ta được kết quả bằng 12.”

b. Thủ thuật thay đổi văn cảnh

Thủ thuật thay đổi văn cảnh là việc giữ nguyên cấu trúc toán học và dữ liệu của bài toán nhưng thay đổi bối cảnh (tình huống, ngữ cảnh) để bài toán trở nên gần gũi, sinh động hoặc phù hợp với trải nghiệm của học sinh.

Cũng giống với thủ thuật thay đổi số liệu, thủ thuật thay đổi văn cảnh khá đơn giản và dễ thực hiện, đôi khi còn có sự kết hợp giữa hai cách thay đổi trên. Việc thay đổi văn cảnh cho bài toán giúp tăng tính hấp dẫn, tạo động lực học tập, giúp học sinh thấy toán học có mối liên hệ với cuộc sống và phù hợp với đối tượng học sinh vùng miền khác nhau.

Bài toán gốc dành cho học sinh lớp 3:

“Tìm một số, biết rằng khi nhân số đó với 5, rồi bớt đi 6 sau đó cộng với 4, cuối cùng chia cho 3 ta được kết quả bằng 6.”

Dựa vào thủ thuật thay đổi văn cảnh, ta có bài toán mới sau:

“Lan có một số quyển vở. Nếu Lan khi số quyển vở đó với 5 quyển, rồi bớt đi 3 quyển sau đó cộng thêm 4 quyển, cuối cùng chia cho 3 quyển thì Lan được 6 quyển vở. Hỏi ban đầu Lan có bao nhiêu quyển vở?”

Về mặt bản chất toán học hai bài toán trên là giống nhau các phép tính và con số vẫn được giữ nguyên chỉ thay đổi bối cảnh từ bài toán trừu tượng hành câu chuyện có nhân vật và gần gũi hơn với học sinh tiểu học.

c. Thủ thuật thay đổi mối quan hệ của các đối tượng

Thủ thuật thay đổi mối quan hệ giữa các đối tượng trong bài toán không chỉ đơn giản là thay đổi thứ tự hoặc loại phép toán, mà bao gồm cả việc thay đổi cách các đối tượng trong bài toán tương tác với nhau - tức là thay đổi cấu trúc quan hệ giữa các đại lượng (các số, biến, đối tượng...) nhưng vẫn giữ được

mục tiêu toán học cốt lõi của bài toán (ví dụ: vẫn tìm một số, tìm giá trị, tìm độ dài...).

Nói cách khác, đây là việc tái tổ chức lại các mối quan hệ toán học giữa các đối tượng trong bài toán (số, vật, người, đại lượng...) nhằm tạo ra bài toán mới nhưng giữ nguyên mục tiêu giải quyết hoặc kết quả cuối cùng.

Thủ thuật thay đổi mối quan hệ của các đối tượng giúp học sinh nhận ra tính linh hoạt của các phép tính, tăng cường kỹ năng phân tích cấu trúc toán học và rèn luyện tư duy logic, biến đổi. Ngoài ra, việc sử dụng thủ thuật này trong dạy học toán có vai trò tăng mức độ thử thách của bài toán, phân hoá bài tập theo mức độ tư duy, phát triển tư duy phản biện khi đối mặt các dạng khác nhau của cùng một ý tưởng.

Bài toán gốc dành cho học sinh lớp 4:

“Có ba hộp đựng bút chì. Bạn An lấy 6 cái bút chì từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai, chuyển 4 cái từ hộp thứ hai sang hộp thứ ba. Cuối cùng chuyển 2 cái từ hộp thứ ba sang hộp thứ nhất. Bây giờ mỗi hộp đều có 12 chiếc bút chì. Hỏi lúc đầu mỗi hộp có bao nhiêu cái bút chì?”

Dựa vào thủ thuật thay đổi mối quan hệ của các đối tượng, ta có bài toán mới sau:

“Có ba hộp đựng bút chì. Bạn An lấy 6 cái bút chì từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai, sau đó chuyển 2 cái bút chì từ hộp thứ ba sang hộp thứ nhất. Cuối cùng, bạn chuyển một số bút chì từ hộp thứ hai sang hộp thứ ba. Số bút chì này bằng trung bình cộng của hai lần chuyển trước đó. Sau khi chuyển xong, mỗi hộp đều có đúng 1 tá bút chì. Hỏi lúc đầu mỗi hộp có bao nhiêu cái bút chì?”

d. Biến đổi câu hỏi của bài toán đã có

Biến đổi câu hỏi của bài toán đã có là thủ thuật trong đó các dữ kiện (số liệu, tình huống) của bài toán được giữ nguyên, nhưng phần yêu cầu/ câu hỏi được thay đổi. Thay đổi này có thể nhằm mở rộng, làm sâu sắc thêm bài toán, hoặc làm cho bài toán phù hợp với các mục tiêu khác nhau trong dạy học.

Việc sử dụng thủ thuật biến đổi câu hỏi của bài toán đã có trong dạy học giúp học sinh mở rộng tư duy ở đâu học sinh suy nghĩ nhiều chiều, không đóng khung trong một kiểu yêu cầu; linh hoạt trong giải quyết vấn đề khi một bài toán có thể có nhiều hướng hỏi, học sinh sẽ linh hoạt hơn khi tiếp cận các dạng bài mới và khơi gợi trao đổi, thảo luận trong lớp học: Các câu hỏi biến đổi có thể kích thích tranh luận, giúp học sinh phát triển kỹ năng diễn đạt và hợp tác. Bài toán gốc dành cho học sinh lớp 5:

“Có 3 hộp đựng bút chì. Bạn An lấy 6 cái bút chì từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai, chuyển 4 cái bút chì từ hộp thứ hai sang hộp thứ ba, cuối cùng chuyển 2 cái bút chì từ hộp thứ ba sang hộp thứ nhất. Bây giờ mỗi hộp có 1 tá bút chì. Hỏi lúc đầu mỗi hộp có bao nhiêu cái bút chì?”

Thêm câu hỏi cho bài toán:

“Có 3 hộp đựng bút chì. Bạn An lấy 6 cái bút chì từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai, chuyển 4 cái bút chì từ hộp thứ hai sang hộp thứ ba, cuối cùng chuyển 2 cái bút chì từ hộp thứ ba sang hộp thứ nhất. Bây giờ mỗi hộp có 1 tá bút chì. Biết mỗi cây bút chì có giá 2 000 đồng. Hỏi để mua được hộp thứ nhất An phải trả bao nhiêu tiền?”

e. Thủ thuật tăng và giảm số đối tượng trong bài toán đã có

Tăng và giảm số đối tượng trong bài toán đã có là thủ thuật thay đổi số lượng nhân vật, đồ vật, hành động,... trong một bài toán có sẵn, nhưng giữ nguyên cấu trúc bài toán hoặc mô hình giải quyết. Việc thêm hoặc bớt đối tượng sẽ tạo ra bài toán mới với độ khó hoặc cách tiếp cận khác đi.

Thủ thuật này giúp các bài toán được làm phong phú dạng bài học sinh không bị lệ thuộc vào một mô típ cố định; giúp học sinh nhận ra mối quan hệ giữa số lượng đối tượng và kết quả bài toán, bên cạnh đó còn giúp điều chỉnh tư duy trong đó học sinh phải tự vận dụng suy luận logic để xử lý dữ kiện thay đổi và việc tăng/ giảm như vậy sẽ khiến các bài toán được gần thực tế, gần hơn với tình huống trong đời sống khi có nhiều đối tượng.

Bài toán gốc dành cho học sinh lớp 3:

“Một cửa hàng có một số chai nước. Buổi sáng bán 12 chai, buổi chiều

bán 8 chai, cuối ngày còn lại 20 chai. Hỏi lúc đầu cửa hàng có bao nhiêu chai nước?”

Tăng số đối tượng: “Một cửa hàng có một số chai nước. Buổi sáng bán cho khách 12 chai, buổi chiều bán cho khách 8 chai. Ngoài ra, trong ngày cửa hàng tặng thêm 5 chai cho khách quen. Cuối ngày còn lại 20 chai. Hỏi lúc đầu cửa hàng có bao nhiêu chai nước?”

➤ Học sinh cần tổng hợp nhiều hành động khác nhau (bán, tặng) làm tăng yêu cầu tư duy, phân tích dữ kiện và hướng đến học sinh khá giỏi, luyện kỹ năng suy luận và hiểu ngữ cảnh bài toán.

Giảm số đối tượng: “Một cửa hàng còn lại 20 chai nước sau khi bán 15 chai trong ngày. Hỏi ban đầu cửa hàng có bao nhiêu chai nước?”

➤ Bài toán trở nên dễ hơn, phù hợp với học sinh trung bình hoặc mới học dạng toán này và giúp học sinh tập trung vào kỹ năng tính ngược cơ bản mà không bị rối bởi nhiều dữ kiện.

f. Nêu các dữ kiện của bài toán đã cho dưới dạng gián tiếp

Nêu các dữ kiện của bài toán đã cho dưới dạng gián tiếp là thủ thuật thay vì trình bày các dữ kiện bài toán dưới dạng con số rõ ràng, sẽ ẩn các thông tin hoặc diễn đạt chúng qua ngữ cảnh, tranh, bảng, sơ đồ, hoặc lời kể, buộc học sinh tự rút ra dữ kiện cần thiết để giải toán.

Thủ thuật này giúp học sinh rèn kỹ năng đọc - hiểu, lọc thông tin toán học từ tình huống thực tế, phát triển tư duy toán học bậc cao, không đơn thuần là thực hiện phép tính và giúp học sinh kết nối toán học với ngữ cảnh đời sống, tăng hứng thú học tập.

Bài toán gốc dành cho học sinh lớp 2:

“Tìm một số biết rằng số đó khi nhân với 5, rồi bớt đi 7, sau đó cộng với 6 và cuối cùng chia cho 9 ta được kết quả là 11.”

Phát biểu gián tiếp dữ kiện “Tìm một số biết rằng số đó khi nhân với 5, rồi bớt đi 7, sau đó cộng với 6 và cuối cùng chia cho 9 ta được một số nhỏ nhất có hai chữ số giống nhau.”

1.3.2. Một số kĩ thuật trong xây dựng bài toán ở tiểu học

1.3.2.1. Kĩ thuật làm tăng độ khó

a. Giữ nguyên dữ kiện bài toán, nâng cao yêu cầu

Đây là một trong những cách thường được sử dụng để khai thác bài toán, nhằm phát triển khả năng tư duy toán học của học sinh, đặc biệt là học sinh tiểu học. Với kỹ thuật này, giáo viên giữ nguyên các dữ kiện (số liệu, tình huống, điều kiện đã cho) nhưng thay đổi hoặc nâng cao yêu cầu giải toán. Sự thay đổi này có thể là:

- Tăng mức độ tư duy cần thiết để giải bài toán, ví dụ thay vì chỉ yêu cầu tính một giá trị cụ thể, giáo viên có thể yêu cầu giải thích, tìm nhiều đáp án, chứng minh một tính chất, hoặc đưa ra nhận xét.
- Yêu cầu học sinh giải bài toán theo nhiều cách khác nhau.
- Thêm yêu cầu lập luận, giải thích hoặc mở rộng vấn đề, qua đó thúc đẩy tư duy logic và khả năng diễn đạt toán học.

Bài toán gốc dành cho học sinh lớp 5:

“Tìm 4 số tự nhiên, biết rằng nếu chuyển 5 đơn vị từ số thứ nhất sang thùng thứ hai, chuyển 7 đơn vị từ số thứ hai sang số thứ ba, chuyển 2 đơn vị từ số thứ ba sang số thứ tư và chuyển 8 đơn vị từ số thứ tư sang số thứ nhất thì ta được bốn số đều bằng 15.”

Với bài tập này học sinh thường sẽ giải theo hai cách là trình bày bằng lời văn hoặc là kẻ bảng để tìm số cần tìm, ta có thể khai thác bằng cách giữ nguyên dữ kiện và thêm yêu cầu là “Giải bằng 2 cách”; như vậy gợi ra một hướng tư duy mới, huy động thêm kiến thức về cách tìm số bằng qua phương pháp tính ngược từ cuối thông qua kẻ bảng một cách gọn hơn.

b. Tăng cường các kỹ năng tính toán bằng việc cho số liệu thêm phức tạp

Đây cũng là một trong những thủ thuật phổ biến được sử dụng trong quá trình khai thác bài toán để nâng cao độ khó, đồng thời rèn luyện kỹ năng tính toán cho học sinh, đặc biệt là những em có khả năng tiếp thu kiến thức toán học nhưng còn thiếu kiên trì hoặc chưa cẩn thận trong quá trình thực hiện phép tính.

Nguyên tắc chính của thủ thuật này là giữ nguyên cấu trúc logic của bài toán, nhưng thay đổi các số liệu để tăng độ phức tạp trong quá trình tính toán, từ đó buộc học sinh phải tập trung, suy nghĩ cẩn thận và thực hiện nhiều bước hơn.

Bài toán gốc dành cho học sinh lớp 2:

“Tìm một số biết rằng khi bớt số đó đi 2, sau đó chia cho 6, được bao nhiêu cộng với 2, cuối cùng nhân với 4 được kết quả bằng 20.”

Ta có thể khai thác để tăng cường tính cho học sinh khá với yêu cầu mới là “*Tìm một số biết rằng khi bớt số đó đi 8, sau đó chia cho 5, được bao nhiêu cộng với 3, và bớt tiếp cho 7, cuối cùng nhân với 6 được kết quả bằng 96*”. Học sinh phải thực hiện nhiều bước tính toán hơn, đòi hỏi sự chính xác và kiên trì.

c. Phát biểu các dữ kiện bài tập dưới dạng ẩn

Thủ thuật này cũng đã được sử dụng khá nhiều trong sách giáo khoa và sách bài tập toán (đặc biệt là toán 4 và toán 5). Ta có thể nhận thấy được sự thể hiện của kỹ thuật này trong các bài tập khi mà cách phát biểu khiến cho học sinh rất khó tách bạch đâu là yếu tố đã cho trong đầu bài. Nó đòi hỏi ở học sinh khả năng tư duy tinh tế, nhạy cảm với những từ “chìa khoá” làm ẩn dấu các dữ kiện đã cho.

Bài toán gốc dành cho học sinh lớp 5:

“Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 120m. Chiều dài hơn chiều rộng 10m. Tính diện tích mảnh đất đó.” Đây là bài toán đã phát biểu các dữ kiện bài tập sử dụng ẩn. Bài tập này thuộc dạng tìm hai số khi biết tổng và hiệu, nhưng chỉ có hiệu là cụ thể (dài hơn rộng 10 m), còn tổng đã cho dưới dạng ẩn. Học sinh khó nhận ra đúng “tổng” (vì dưới dạng chu vi 120 m).

Khai thác nội dung bài tập nay ta có thể đề xuất bài tập và dấu cả dữ kiện “Hiệu” như sau: “*Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi là 120 m, nếu tăng chiều rộng thêm 5 m và giảm chiều dài 5 m thì mảnh đất có dạng hình vuông. Tính diện tích của mảnh đất đó.*” Như vậy ta đã tăng mức độ khó của bài tập bằng việc phát biểu hai dữ kiện (tổng và hiệu) dưới dạng ẩn.

d. Bớt dữ kiện giữ nguyên yêu cầu (tăng thêm yêu cầu)

Trong dạy học Toán ở tiểu học, kỹ thuật bớt dữ kiện (hay thêm dữ kiện)

nhưng giữ nguyên yêu cầu là một thủ thuật tương đối ít được sử dụng so với các kỹ thuật như tăng độ phức tạp của số liệu, thay đổi yêu cầu, hoặc thêm câu hỏi. Tuy nhiên, nếu được vận dụng hợp lý, đây là một cách hiệu quả để phát triển tư duy toán học và năng lực giải quyết vấn đề cho học sinh.

Mục tiêu của thủ thuật này là tạo tình huống bài toán mở hoặc thiếu dữ kiện, buộc học sinh phải tự phân tích, suy luận hoặc tìm thêm giả thiết hợp lý để giải bài toán; phát triển khả năng tư duy logic, kỹ năng đặt câu hỏi, ước lượng, hoặc tìm nhiều cách giải bên cạnh đó còn khuyến khích học sinh vận dụng linh hoạt kiến thức đã học, không rập khuôn theo mẫu có sẵn.

Bài toán gốc dành cho học sinh lớp 5:

“Bình có một số nhãn vở. Bình cho An $\frac{1}{3}$ số nhãn vở và cho Lan 3 nhãn vở thì còn lại 15 nhãn vở. Hỏi lúc đầu Bình có bao nhiêu nhãn vở?”

Bớt dữ kiện: Bình có một số nhãn vở. Bình cho An $\frac{1}{3}$ số nhãn vở và cho Lan 3 nhãn vở thì còn lại 15 nhãn vở. Hỏi Bình đã cho An và Lan tất cả bao nhiêu nhãn vở? (thay vì hỏi tổng số ban đầu, ta có thể chỉ hỏi một phần của quá trình).

Thêm dữ kiện: Bình có một số nhãn vở. Bình cho An $\frac{1}{3}$ số nhãn vở và cho Lan 3 nhãn vở thì còn lại 15 nhãn vở. Hỏi:

- Lúc đầu Bình có bao nhiêu nhãn vở?
- Sau đó, Bình dán hết số nhãn vở còn lại vào 3 quyển vở. Hỏi trung bình mỗi quyển vở được dán bao nhiêu nhãn vở?

Kỹ thuật làm tăng độ khó của bài toán là một công cụ sư phạm cần thiết để bồi dưỡng và phát triển năng lực tư duy toán học cho học sinh khá, giỏi. Việc điều chỉnh yêu cầu, mở rộng bài toán, tăng độ phức tạp của dữ kiện hoặc kết hợp nhiều bước giải giúp học sinh vượt ra khỏi khuôn khổ kiến thức cơ bản, hình thành khả năng suy luận linh hoạt, sáng tạo. Thủ thuật này đặc biệt phù hợp khi giảng dạy ở các khu vực có điều kiện học tập tốt, nơi học sinh có nền tảng kiến thức vững. Sử dụng hợp lý và có chủ đích các kỹ thuật nâng cao sẽ

giúp giáo viên phát huy tiềm năng học sinh, từ đó nâng cao chất lượng dạy học và đáp ứng yêu cầu của chương trình giáo dục hiện đại theo định hướng phát triển năng lực.

1.3.2.2. Kỹ thuật làm giảm độ khó

a. Chia nhỏ câu hỏi của bài toán

Đây là một trong những thủ thuật được giáo viên sử dụng phổ biến để dẫn dắt học sinh từng bước giải quyết bài toán, đặc biệt là đối với các bài toán nhiều bước hoặc có độ khó cao hơn mức trung bình. Việc chia nhỏ giúp học sinh không bị choáng ngợp trước bài toán lớn mà thay vào đó có thể giải quyết từng phần một cách có định hướng và có chiến lược.

Mục đích của thủ thuật này là giúp học sinh hiểu rõ cấu trúc bài toán, hỗ trợ học sinh từng bước phân tích - tính toán - suy luận mà không bỏ sót dữ kiện. Không những thế còn rèn luyện kỹ năng đọc hiểu đề, tổ chức giải toán khoa học cho học sinh và phù hợp với học sinh lớp dưới hoặc học sinh có năng lực tư duy chưa cao để học sinh hoàn thiện bài một cách dễ dàng hơn.

Bài toán gốc dành cho học sinh lớp 5:

“Dì Út đi chợ bán trứng, lần thứ nhất bán được một nửa số trứng và nửa quả. Lần thứ hai bán được một nửa số trứng còn lại và nửa quả. Lần thứ ba bán một nửa số trứng còn lại và nửa quả thì vừa hết số trứng. Hỏi dì Út ta mang bao nhiêu trứng ra chợ bán?”

Đề xuất bài toán như sau:

“Dì Út đi chợ bán trứng, lần thứ nhất bán được một nửa số trứng và nửa quả. Lần thứ hai bán được một nửa số trứng còn lại và nửa quả. Lần thứ ba bán một nửa số trứng còn lại và nửa quả thì vừa hết số trứng. Hỏi:

- a. Số trứng còn lại sau lần bán thứ hai?
- b. Số trứng còn lại sau lần bán thứ nhất?
- c. dì Út ta mang bao nhiêu trứng ra chợ bán?”

Rõ ràng về chuẩn chung của chương trình không bị giảm đi nhưng học sinh thấy tự tin hơn khi giải quyết từng phần của bài toán này.

b. Đơn giản hoá số liệu tính toán

Nhiều khi để giúp học sinh hiểu được phương pháp giải một số dạng toán nào đó và mau chóng có kỹ năng giải, người ta dùng thủ thuật: *đơn giản hóa số liệu tính toán*, bởi khi đó mục tiêu tính toán chưa phải là mục tiêu cơ bản. Đơn giản hóa số liệu tính toán sẽ giúp học sinh có nhanh kết quả và dành thời gian suy nghĩ về cách làm, cách giải quyết dạng toán đó. Mục đích của thủ thuật hướng tới là khi học sinh chưa nắm vững phương pháp giải một dạng toán mới, giáo viên sẽ giảm độ phức tạp của phép tính để học sinh:

- Tập trung vào hiểu cách làm.
- Không bị cản trở bởi các phép tính rắc rối.
- Tự tin và có động lực khi thấy mình giải được bài.

Có thể thấy sự thể hiện của thủ thuật này qua các bài hình thành kỹ giải các dạng toán điển hình trong Toán 4. Chẳng hạn khi hình thành kỹ năng giải toán qua phương pháp tính ngược từ cuối thì giáo viên có thể chọn ví dụ sau “*Tìm một số biết rằng khi bớt số đó đi 2, sau đó chia cho 6, được ao nhiêu cộng với 2, cuối cùng nhân với 4 được kết quả bằng 20*”. Đối với học sinh lớp 4 đã đọc, viết và tính (+; -; x; :) thành thạo với các số có 4 - 5 chữ số. Việc chọn số liệu đơn giản như ví dụ trên cho ta thấy rõ thủ thuật đơn giản hoá số liệu đã được sử dụng trong trường hợp này.

Thủ thuật giảm độ khó của bài toán như ví dụ trên thường được áp dụng trong trường hợp luyện tập cho học sinh nhận dạng và hình thành phương pháp giải các dạng toán mà đối tượng học sinh chưa giỏi. Ở đây số liệu tính toán đã đơn giản đáng kể điều đó số học sinh còn yếu dễ ngại hơn khi thực hiện giải, chú ý hơn tới các bước (quy trình) giải. Khi áp dụng dụng thủ thuật này sẽ làm cho học sinh yếu không bị “đuối” ngay từ đầu, học sinh nắm vững quy trình giải toán trước khi học bài toán đầy đủ, khó hơn và tăng sự chú ý vào cách hiểu đề, cách trình bày lời giải.

c. Cụ thể hoá một số dữ kiện trong bài toán

Trong khi luyện tập có thể gặp những bài toán mà dữ kiện cho dưới dạng

ẩn hoặc có chứa một số khái niệm học sinh còn chưa vững. Trong tình huống đó ta cần tìm cách để cụ thể hóa các dữ kiện bài toán thuật đề suất bài toán tương tự nhưng các sự kiện cụ thể hơn giúp học sinh lấy lại được niềm tin và hứng thú học tập.

Bài toán gốc đối với học sinh lớp 4

“Bắc nghĩ ra một số lớn hơn 18. Bắc chia số đó cho 2 rồi cộng với một số khác 0 thì được kết quả là 11. Tìm số mà Bắc đã nghĩ ra.”

Đối với bài trên, học sinh lớp 4 đã thành thạo đọc và làm các phép tính cộng, trừ, nhân, chia tuy nhiên sẽ có một vài học sinh trung bình - yếu chưa hiểu rõ được đề bài vì đang khuyết thiếu đi hai con số. Vì vậy ta cụ thể hoá số khác 0 là số bao nhiêu thì học sinh sẽ cảm thấy dễ hơn hẳn so với bài toán ban đầu mà kiến thức cơ bản vẫn được giữ như cũ “*Bắc nghĩ ra một số lớn hơn 18. Bắc chia số đó cho 2 rồi cộng thêm 3 thì được kết quả là 11. Tìm số mà Bắc đã nghĩ ra*”. Việc cụ thể hoá một số dữ kiện giúp học sinh nhìn thấy mối quan hệ rõ ràng hơn, tránh rối loạn với dạng toán chữ, ẩn và dễ hình dung, dễ tính toán, tăng hứng thú trong học tập.

d. Đưa ra bài toán phụ gợi ý dẫn dắt

Thủ thuật này được dùng trong tình huống học sinh không nhớ một số kiến thức hoặc khái niệm có liên quan cần dùng để giải bài toán theo yêu cầu. Khi đó chúng ta đưa ra bài toán phụ để thay cho việc gợi ý giảng giải. Mục đích của bài toán phụ là gợi lại kiến thức quen thuộc mà học sinh vô tình quên, tránh tình trạng học sinh bỏ cuộc do thiếu một bước “mở khóa” và rèn khả năng tự lực suy nghĩ, xâu chuỗi kiến thức.

Xuất phát từ bài toán lớp 4 “*Một người bán hàng, sau khi bán $\frac{1}{2}$ số bánh, rồi cho bạn 3 cái, còn lại 7 cái. Hỏi ban đầu người đó có bao nhiêu cái bánh?*”. Ta có thể đưa ra bài toán phụ như sau “*Có 10 cái bánh, cho bạn 3 cái thì còn bao nhiêu cái?*”. Sau khi làm xong bài tập phụ thì nhiều em sẽ tự tìm lại kết quả đúng cho bài toán ban đầu mà giáo viên không cần gợi ý gì thêm.

Kĩ thuật làm giảm độ khó của bài toán là một biện pháp sư phạm quan trọng, góp phần hỗ trợ hiệu quả cho việc dạy học phân hoá. Thủ thuật này đặc biệt phát huy tác dụng trong điều kiện giảng dạy ở các vùng nông thôn, miền núi - nơi điều kiện kinh tế, văn hoá còn hạn chế và tỉ lệ học sinh chưa đạt chuẩn còn cao. Việc đơn giản hoá yêu cầu, cụ thể hoá dữ kiện, chia nhỏ câu hỏi hay giảm mức độ phức tạp trong tính toán giúp học sinh yếu tiếp cận bài toán dễ dàng hơn, từng bước nắm bắt được phương pháp giải và khơi gợi lại hứng thú học tập. Vận dụng linh hoạt các kỹ thuật giảm độ khó sẽ giúp giáo viên đảm bảo mục tiêu “dạy học phù hợp với đối tượng”, hướng đến sự tiến bộ vững chắc của mọi học sinh trong lớp.

KẾT LUẬN CHƯƠNG I

Chương I đã trình bày cơ sở lý luận liên quan đến vị trí, vai trò và tầm quan trọng của hoạt động giải toán trong dạy và học Toán ở Tiểu học. Qua đó, có thể khẳng định rằng giải toán không chỉ là hoạt động trung tâm trong chương trình Toán mà còn là phương tiện quan trọng góp phần hình thành và phát triển năng lực tư duy, kỹ năng sống, sự sáng tạo và phẩm chất học sinh.

Đặc biệt, phương pháp giải toán bằng cách tính ngược từ cuối đã được làm rõ về khái niệm, vai trò, quy trình thực hiện cũng như sự đa dạng trong các dạng toán và phương pháp giải phù hợp với từng đối tượng học sinh. Phương pháp này không chỉ giúp học sinh nâng cao kỹ năng giải toán mà còn rèn luyện năng lực suy luận, tư duy logic và khả năng xử lý các tình huống phức tạp trong toán học cũng như trong cuộc sống.

Ngoài ra, chương này cũng đã giới thiệu các thủ thuật và kỹ thuật xây dựng bài toán trong dạy học toán ở Tiểu học, nhằm giúp giáo viên có thêm công cụ để thiết kế các bài toán phù hợp với mục tiêu giáo dục, tăng cường sự hứng thú và hiệu quả học tập cho học sinh.

Những nội dung trong chương I là nền tảng lý luận cần thiết, làm cơ sở cho việc nghiên cứu thực trạng và đề xuất các biện pháp, giải pháp cụ thể nhằm nâng cao hiệu quả dạy học giải toán nói chung và dạy học toán theo phương pháp tính ngược từ cuối nói riêng trong các chương tiếp theo.

CHƯƠNG II

ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGƯỢC TỪ CUỐI TRONG DẠY HỌC TOÁN Ở TIỂU HỌC

2.1. Ứng dụng phương pháp tính ngược từ cuối để giải toán số học

Khi giải bài toán bằng phương pháp tính ngược từ cuối ta sử dụng các quy tắc tìm thành phần chưa biết của phép tính. Ở tiểu học, ngay từ lớp 2 học sinh đã được học và làm bài cộng, trừ trong phạm vi 1000; nhân, chia bảng 2 và bảng 5. Vì vậy, các bài toán sử dụng phương pháp tính ngược từ cuối có thể ra cho học sinh từ lớp 2. Tuy nhiên trong khi dạy và xây dựng bài toán cho học sinh giáo viên cần chú ý đến đặc điểm lứa tuổi, các dạng bài phải phù hợp với trình độ của học sinh mỗi lớp.

2.1.1. Ứng dụng phương pháp tính ngược từ cuối để giải toán có một đại lượng

Ví dụ 1: Tìm một số, biết rằng khi cộng số đó với 15, rồi chia cho 2, sau đó bớt đi 6 và cuối cùng nhân với 5 ta được kết quả là 20.

* Phân tích bài toán

Bước 1: Từ đề bài, ta thực hiện liên tiếp các phép tính sau đây với số cần tìm thông qua tóm tắt sau:

Cộng 15; chia 2; trừ 6; nhân 5 cho kết quả cuối cùng bằng 20.

Bước 2: Từ tóm tắt trên, ta xác định được lần lượt các phép tính như sau:

- Ta xác định số trước khi nhân với 5 được kết quả là 4.
- Dựa vào số tìm được ở phép tính thứ nhất, ta tìm được số trước khi bớt đi cho 6.
- Dựa vào số tìm được ở phép tính thứ hai, ta tiếp tục tìm được số trước khi chia cho 2.
- Cuối cùng, dựa vào số tìm được ở phép tính thứ ba, ta xác định được số cần tìm.

* Trình bày lời giải

Số trước khi nhân với 5 là:

$$20 : 5 = 4$$

Số trước khi bớt đi cho 6 là:

$$4 + 6 = 10$$

Số trước khi chia cho 2 là:

$$10 \times 2 = 20$$

Số cần tìm là:

$$20 - 15 = 5$$

Đáp số: Số 5

Ví dụ 2: Tìm số tự nhiên biết rằng khi gấp số đó lên 2 lần, rồi cộng với 12,5 sau đó chia cho 5 và cuối cùng cộng với 4,5 ta được kết quả là một số tự nhiên lẻ nhỏ nhất có hai chữ số.

* Phân tích bài toán

Bước 1: Từ đề bài, ta thực hiện liên tiếp các phép tính sau đây với số cần tìm thông qua tóm tắt sau:

Nhân 2; cộng 12,5; chia 5; cộng 4,5 cho kết quả cuối cùng bằng 11.

Bước 2: Từ tóm tắt trên, ta xác định được lần lượt các phép tính như sau:

- Ta xác định số trước khi cộng với 4,5 là 6,5.
- Dựa vào số tìm được ở phép tính thứ nhất, ta tìm được số trước khi chia cho 5.
- Dựa vào số tìm được ở phép tính thứ hai, ta tiếp tục tìm được số trước khi cộng với 12,5.
- Cuối cùng, dựa vào số tìm được ở phép tính thứ ba, ta xác định được số cần tìm.

* Trình bày lời giải

Kết quả cuối cùng là một số tự nhiên nhỏ nhất có hai chữ số tức là số 11
Số trước khi cộng với 4,5 là:

$$11 - 4,5 = 6,5$$

Số trước khi chia cho 5 là:

$$6,5 \times 5 = 32,5$$

Số trước khi cộng với 12,5 là:

$$32,5 - 12,5 = 20$$

Số cần tìm là:

$$20 : 2 = 10$$

Đáp số: Số 10

Ví dụ 3: Tìm một số, biết rằng nếu số đó bớt đi 100, rồi chia cho 5, sau đó nhân với 25 và cuối cùng cộng với 115,5 ta được kết quả bằng 325,5.

*** Phân tích bài toán**

Bước 1: Theo yêu cầu của đề, ta thực hiện liên tiếp các phép tính sau đây với số cần tìm thông qua tóm tắt sau:

Trừ 100; chia 5; nhân 25; cộng 115,5 được kết quả cuối cùng bằng 325,5.

Bước 2: Từ tóm tắt trên, ta xác định được lần lượt các phép tính như sau:

- Ta xác định được số trước cộng với 115,5 là 210.
- Dựa vào số tìm được ở phép tính thứ nhất, ta tìm được số trước khi nhân với 25.
- Dựa vào số tìm được ở phép tính thứ hai, ta tiếp tục tìm được số trước khi chia cho 5.
- Dựa vào phép tính tìm được ở phép tính thứ ba, ta xác định được số cần tìm.

*** Trình bày lời giải**

Số trước khi cộng với 115,5 là:

$$325,5 - 115,5 = 210$$

Số trước khi nhân với 25 là:

$$210 : 25 = 8,4$$

Số trước khi chia cho 5 là:

$$8,4 \times 5 = 42$$

Số cần tìm là:

$$42 + 100 = 142$$

Đáp số: Số 142

Ví dụ 4: Tìm một số, biết rằng khi nhân số đó với 4, rồi bớt đi 25, sau đó cộng với 15 và cuối cùng chia cho 3 ta được kết quả là số nhỏ nhất có ba chữ số khác nhau.

*** Phân tích bài toán**

Bước 1: Từ đề bài, ta thực hiện liên tiếp các phép tính sau đây với số cần tìm thông qua tóm tắt sau:

Nhân 4; trừ 25; cộng 15; chia 3 cho kết quả cuối cùng bằng 102.

Bước 2: Từ tóm tắt trên, ta xác định được lần lượt các phép tính như sau:

- Ta xác định số trước khi chia cho 3 là 306.
- Dựa vào số tìm được ở phép tính thứ nhất, ta tìm được số trước khi cộng với 15.
- Dựa vào số tìm được ở phép tính thứ hai, ta tiếp tục tìm được số trước khi trừ cho 25.
- Cuối cùng, dựa vào số tìm được ở phép tính thứ ba, ta xác định được số cần tìm.

*** Trình bày lời giải**

Số nhỏ nhất có ba chữ số khác nhau là số 102

Số trước khi chia cho 3 là:

$$102 \times 3 = 306$$

Số trước khi cộng với 15 là:

$$306 - 15 = 291$$

Số trước khi trừ cho 25 là:

$$291 + 25 = 316$$

Số cần tìm là:

$$316 : 4 = 79$$

Đáp số: Số 79

Ví dụ 5: Trong giờ toán, Hùng và An cùng nhau làm bài toán cô giáo vừa giao. Tuy nhiên, khi giải xong hai bạn lại ra kết quả khác nhau. Kết quả Hùng ra là 429, còn của An ra là 946. Hỏi kết quả của bạn nào là đúng?

Đề bài cô ra như sau: “Tìm một số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng khi chia số đó cho 11, rồi cộng với 23,5, sau đó bớt đi cho bốn lần của 4, tiếp tục cộng với 125,5 và cuối cùng nhân 9 ta được kết quả là 1548.”

*** Phân tích bài toán**

Bước 1: Từ đề bài, ta thực hiện liên tiếp các phép tính sau đây với số cần tìm thông qua tóm tắt sau:

Chia 11; cộng 23,5; trừ 16; cộng 125,5; nhân 9 được kết quả cuối cùng bằng 1548.

Bốn lần của 4 được hiểu là $4 \times 4 = 16$.

Bước 2: Từ tóm tắt trên, ta xác định được lần lượt các phép tính như sau:

- Ta xác định số trước khi nhân với 9 là 172.
- Dựa vào số tìm được ở phép tính thứ nhất, ta tìm được số trước khi cộng với 125,5.
- Dựa vào số tìm được ở phép tính thứ hai, ta tiếp tục tìm được số trước khi bớt đi 16.
- Dựa vào số tìm được ở phép tính thứ ba, ta tiếp tục tìm được số trước khi cộng với 23,5.
- Cuối cùng, dựa vào số tìm được ở phép tính thứ tư, ta xác định được số cần tìm.

*** Trình bày lời giải**

Số trước khi nhân với 9 là:

$$1548 : 9 = 172$$

Số trước khi cộng với 125,5 là:

$$172 - 125,5 = 46,5$$

Bốn lần của 4 là:

$$4 \times 4 = 16$$

Số trước khi bớt đi cho 16 là:

$$46,5 + 16 = 62,5$$

Số trước khi cộng với 23,5 là:

$$62,5 - 23,5 = 39$$

Số cần tìm là:

$$39 \times 11 = 429$$

Vậy kết quả của bạn Hùng là đáp án chính xác.

Số cần tìm là số 429.

Ví dụ 6: Như đang suy nghĩ một bài toán mà vẫn chưa ra được kết quả. Các bạn hãy giúp bạn Như làm bài này nhé!

Đề bài như sau “Tìm một số, biết rằng khi bớt số đó đi 293, rồi cộng với số tự nhiên lẻ bé nhất có ba chữ số, sau đó gấp lên 10 lần và cuối cùng giảm đi 4 lần ta được kết quả bằng 2020.”

*** Phân tích bài toán**

Bước 1: Từ đề bài, ta xác định được:

- Số tự nhiên lẻ bé nhất có ba chữ số là số 101.

Theo yêu cầu của đề, ta thực hiện liên tiếp các phép tính sau đây với số cần tìm thông qua tóm tắt sau:

Trừ 293; cộng 101; nhân 10; chia 4 được kết quả cuối cùng bằng 2020

Bước 2: Từ tóm tắt trên, ta xác định được lần lượt các phép tính như sau:

- Ta xác định được số trước khi giảm đi cho 4 là 8080.
- Dựa vào số tìm được ở phép tính thứ nhất, ta tìm được số trước khi gấp lên 10 lần.
- Dựa vào số tìm được ở phép tính thứ hai, ta tiếp tục tìm được số trước khi cộng với 101.
- Dựa vào phép tính tìm được ở phép tính thứ ba, ta xác định được số cần tìm.

*** Trình bày lời giải**

Số trước khi giảm đi 4 lần là:

$$2020 \times 4 = 8080$$

Số trước khi gấp lên 10 lần là:

$$8080 : 10 = 808$$

Số tự nhiên lẻ bé nhất có ba chữ số là số 101

Số trước khi cộng với 101 là:

$$808 - 101 = 707$$

Số cần tìm là:

$$707 + 293 = 1000$$

Đáp số: Số 1000

Ví dụ 7: Tìm một số có dạng hỗn số, biết rằng khi bớt số đó đi $\frac{1}{3}$, rồi chia cho $\frac{10}{3}$, sau đó nhân với số liền trước của số 28 và cuối cùng chia cho trung bình cộng của ba số 6, 10, và 11 được kết quả là số chẵn nhỏ nhất có một chữ số khác 0.

*** Phân tích bài toán**

Bước 1: Từ đề bài, ta xác định được:

- Kết quả là số chẵn nhỏ nhất có một chữ số khác 0 là số 2.
- Trung bình cộng của 6, 10 và 11 là $\frac{6 + 10 + 11}{3} = 9$.
- Số liền trước của số 28 là số 27.

Theo yêu cầu của đề, ta thực hiện liên tiếp các phép tính sau đây với số cần tìm thông qua tóm tắt sau:

Trừ $\frac{1}{3}$; chia $\frac{10}{3}$; nhân 27; chia 9 được kết quả cuối cùng bằng 2

Bước 2: Từ tóm tắt trên, ta xác định được lần lượt các phép tính như sau:

- Ta xác định được số trước khi chia cho trung bình cộng của ba số 6, 10, 11 là 18.
- Dựa vào số tìm được ở phép tính thứ nhất, ta tìm được số trước khi nhân với số liền trước của 28.
- Dựa vào số tìm được ở phép tính thứ hai, ta tiếp tục tìm được số trước khi chia cho $\frac{10}{3}$.
- Dựa vào phép tính tìm được ở phép tính thứ ba, ta xác định được số cần tìm.

*** Trình bày lời giải**

Số chẵn nhỏ nhất có một chữ số khác 0 là số 2

Trung bình cộng của ba số 6, 10, 11 là:

$$(6 + 10 + 11) : 3 = 9$$

Số trước khi chia cho 9 là:

$$2 \times 9 = 18$$

Số liền trước của 28 là 27.

Số trước khi nhân với 27 là:

$$18 : 27 = \frac{2}{3}$$

Số trước khi chia cho $\frac{10}{3}$ là:

$$\frac{2}{3} \times \frac{10}{3} = \frac{2 \times 10}{3 \times 3} = \frac{20}{9}$$

Số cần tìm là:

$$\begin{aligned} \frac{20}{9} + \frac{1}{3} &= \frac{20}{9} + \frac{3}{9} = \frac{23}{9} \\ \frac{23}{9} &= 2\frac{5}{9} \end{aligned}$$

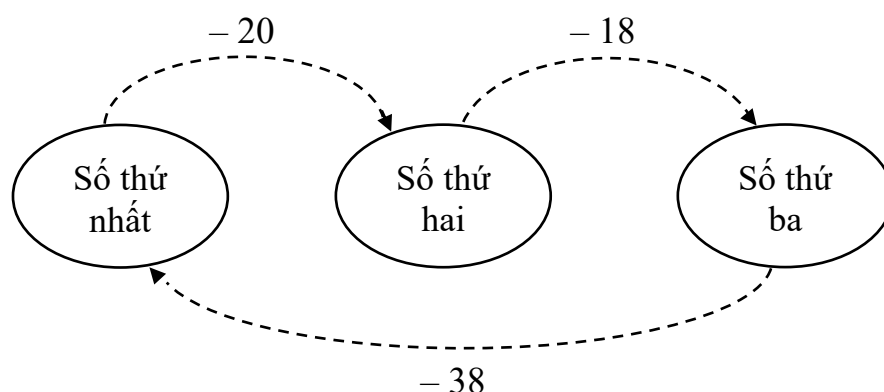
Vậy hỗn số cần tìm là $2\frac{5}{9}$.

2.1.2. Ứng dụng phương pháp tính ngược từ cuối để giải toán có nhiều đại lượng

Ví dụ 8: Tìm ba số tự nhiên, biết rằng khi chuyển từ số thứ nhất sang số thứ hai 20 đơn vị, chuyển từ số thứ hai sang số thứ ba 18 đơn vị và chuyển từ số thứ ba sang số thứ nhất 38 đơn vị thì ta được ba số đều bằng 150.

* Phân tích bài toán

Ta có thể tóm tắt ba bước chuyển đổi nói trong đề bài như sau:



Số thứ nhất $- 20$; $+ 38$ được kết quả bằng 150.

Số thứ hai $+ 20$; $- 18$ được kết quả bằng 150.

Số thứ ba $+ 18$; $- 38$ được kết quả bằng 150.

Như vậy, số thứ nhất $- 20 + 38 =$ số thứ hai $+ 20 - 18 =$ số thứ ba $+ 18 - 38 = 150$. Từ đây ta áp dụng phương pháp tính ngược từ cuối để xác định ba số tự nhiên cần tìm.

*** Trình bày lời giải**

Số thứ nhất cần tìm là:

$$150 - 38 + 20 = 132$$

Số thứ hai cần tìm là:

$$50 + 18 - 20 = 148$$

Số thứ ba cần tìm là:

$$150 + 38 - 18 = 170$$

Vậy ba số cần tìm là 132; 148; 170.

➤ Ngoài cách giải bằng lời văn như trên ta còn có thể giải bài toán bằng cách lập bảng như sau:

Lần chuyển	Số thứ nhất	Số thứ hai	Số thứ ba
Cuối	150	150	150
Sau lần 2	$150 - 38 = 112$	150	$150 + 38 = 188$
Sau lần 1	112	$150 + 18 = 168$	$188 - 18 = 170$
Lúc đầu	$112 + 20 = 132$	$168 - 20 = 148$	170

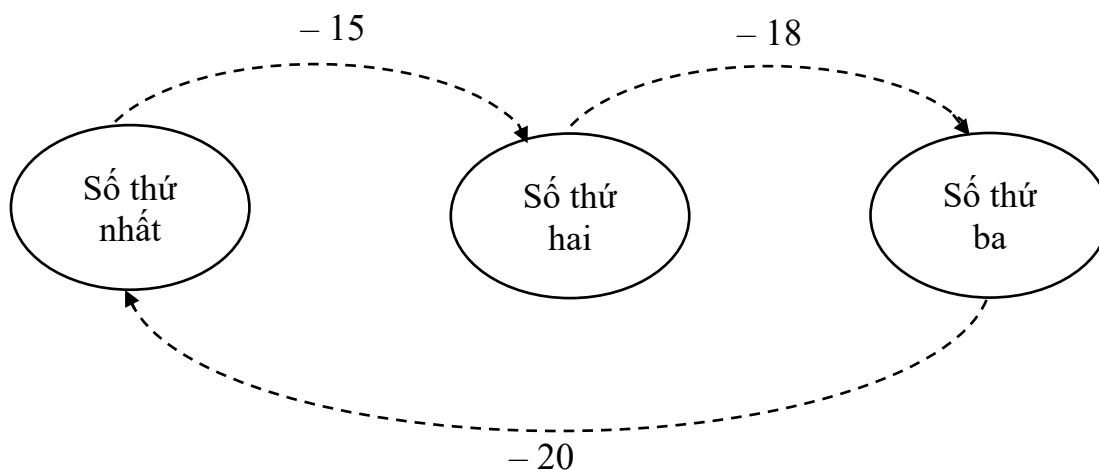
Vậy ba số cần tìm là 132; 148; 170.

Đối với giải bài toán bằng cách lập bảng sẽ phù hợp với các bạn học sinh khá giỏi nên trong quá trình dạy để học sinh hiểu được bản chất của bài toán thì cách giải bằng lời văn rất phù hợp với đại đa số học sinh.

Ví dụ 9: Tìm ba số, biết rằng sau khi chuyển từ số thứ nhất sang số thứ hai 15 đơn vị, chuyển từ số thứ hai sang số thứ ba 18 đơn vị và chuyển từ số thứ ba sang số thứ nhất 20 đơn vị thì ta được ba số đều bằng 100.

*** Phân tích bài toán**

Ta có thể tóm tắt ba bước chuyển đổi nói trong đề bài như sau:



Số thứ nhất: $- 15; + 20$ được kết quả bằng 100.

Số thứ hai: $+ 15; - 18$ được kết quả bằng 100.

Số thứ ba: $+ 18; - 20$ được kết quả bằng 100.

*** Trình bày lời giải**

Số thứ nhất cần tìm là:

$$100 - 20 + 15 = 95$$

Số thứ hai cần tìm là:

$$100 + 18 - 15 = 103$$

Số thứ ba cần tìm là:

$$100 + 20 - 18 = 102$$

Vậy ba số cần tìm là 95; 103; 102.

➤ Ngoài cách giải bằng lời văn như trên ta còn có thể giải bài toán bằng cách lập bảng như sau:

Lần chuyển	Số thứ nhất	Số thứ hai	Số thứ ba
Cuối	100	100	100
Sau lần 2	$100 - 20 = 80$	100	$100 + 20 = 120$
Sau lần 1	80	$100 + 18 = 118$	$120 - 18 = 102$
Lúc đầu	$80 + 15 = 95$	$118 - 15 = 103$	102

Vậy ba số cần tìm là 95; 103; 102.

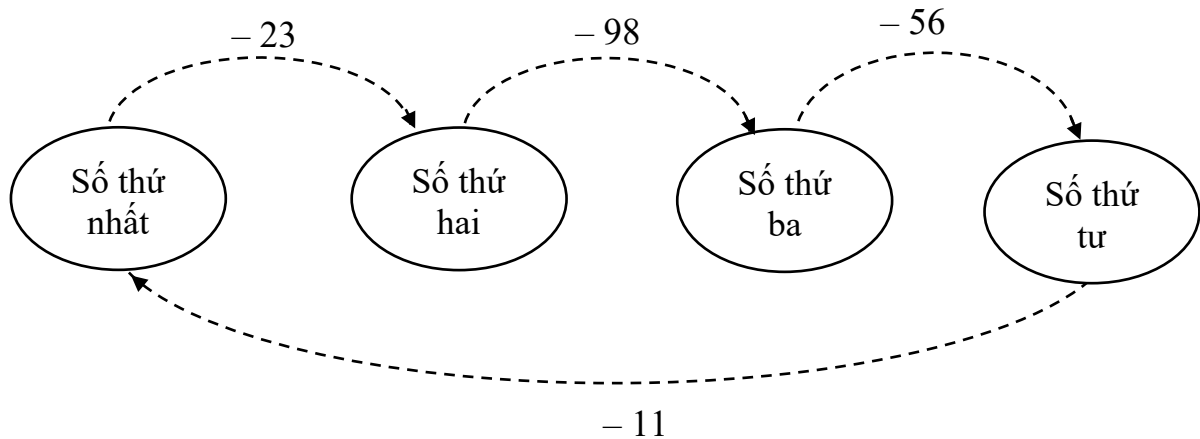
Ví dụ 10: Tìm bốn số, biết rằng nếu chuyển 23 đơn vị từ số thứ nhất sang số thứ hai, chuyển từ số thứ hai sang số thứ ba một số chẵn lớn nhất có hai chữ số rồi tiếp tục chuyển 50 đơn vị số thứ ba sang số thứ tư và chuyển từ số thứ tư sang số thứ nhất số lẻ nhỏ nhất có hai chữ số ta thu được bốn số đều bằng 201.

* Phân tích bài toán

Từ đề bài, ta xác định được:

- Số chẵn lớn nhất có hai chữ số là 98.
- Số lẻ nhỏ nhất có hai chữ số khác nhau là 11.

Ta có thể tóm tắt bốn bước chuyển đổi nói trong đề bài như sau:



Số thứ nhất: $- 23; + 11$ được kết quả bằng 201.

Số thứ hai: $+ 23; - 98$ được kết quả bằng 201.

Số thứ ba: $+ 98; - 50$ được kết quả bằng 201.

Số thứ tư: $+ 50; - 11$ được kết quả bằng 201.

* Trình bày lời giải

Số thứ nhất cần tìm là:

$$201 - 11 + 23 = 213$$

Số chẵn lớn nhất có hai chữ số là 98.

Số thứ hai cần tìm là:

$$201 + 98 - 23 = 276$$

Số thứ ba cần tìm là:

$$201 + 50 - 98 = 153$$

Số lẻ nhỏ nhất có hai chữ số là 11.

Số thứ tư cần tìm là:

$$201 + 11 - 50 = 162$$

Vậy bốn số cần tìm là: 213; 276; 153; 162.

➤ **Giải bài toán bằng cách lập bảng**

Theo đề bài, ta có bảng sau:

Lần chuyển	Số thứ nhất	Số thứ hai	Số thứ ba	Số thứ tư
Cuối	201	201	201	201
Sau lần 3	$201 - 11 = 190$	201	201	$201 + 11 = 212$
Sau lần 2	190	201	$201 + 50 = 251$	$212 - 50 = 162$
Sau lần 1	190	$201 + 98 = 299$	$251 - 98 = 153$	162
Lúc đầu	$190 + 23 = 213$	$299 - 23 = 276$	153	162

Vậy bốn số cần tìm là: 213; 276; 153; 162.

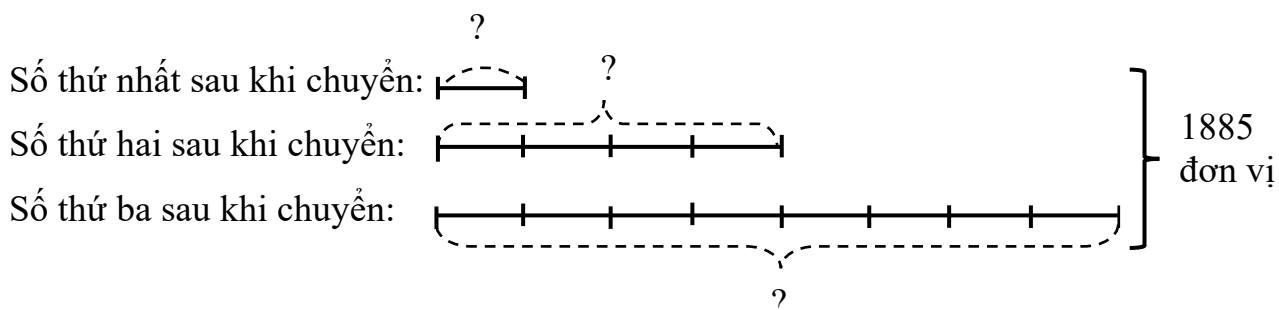
Ví dụ 11: Tổng của ba số bằng 1885. Nếu chuyển 234 đơn vị từ số thứ nhất sang số thứ ba, chuyển 124 đơn vị từ số thứ ba sang số thứ hai rồi tiếp tục chuyển từ số thứ hai sang số thứ nhất 120 đơn vị. Lúc này, ta nhận được ba số mới trong đó số thứ hai gấp 4 lần số thứ nhất và bằng một nửa số thứ ba. Tìm ba số đó.

*** Phân tích bài toán**

Ta coi, số thứ nhất có giá trị là 1 phần thì số thứ hai có giá trị tương ứng là 4 phần bằng nhau như thế.

Nếu số thứ hai có giá trị là 4 phần bằng nhau thì số thứ ba có giá trị tương ứng là 8 phần bằng nhau như thế.

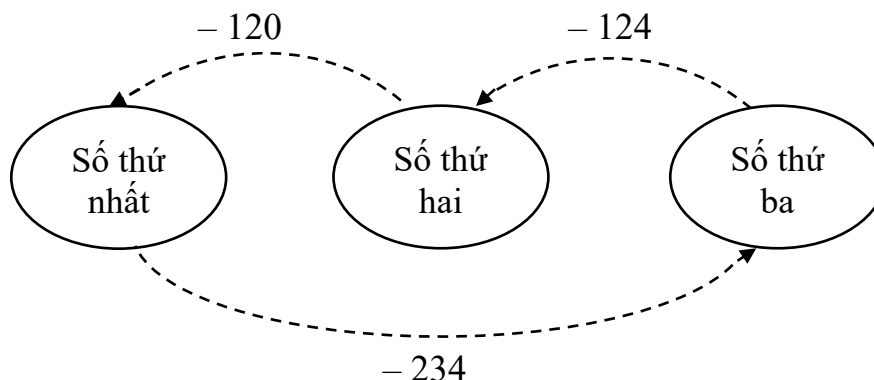
Theo đề bài, ta có sơ đồ biểu diễn ba số sau khi chuyển đổi:



Số thứ hai sau khi chuyển đổi là $145 \times 4 = 580$.

Số thứ ba sau khi chuyển đổi là $145 \times 8 = 1160$.

Ta có thể tóm tắt ba bước chuyển đổi nói trong đề bài như sau:



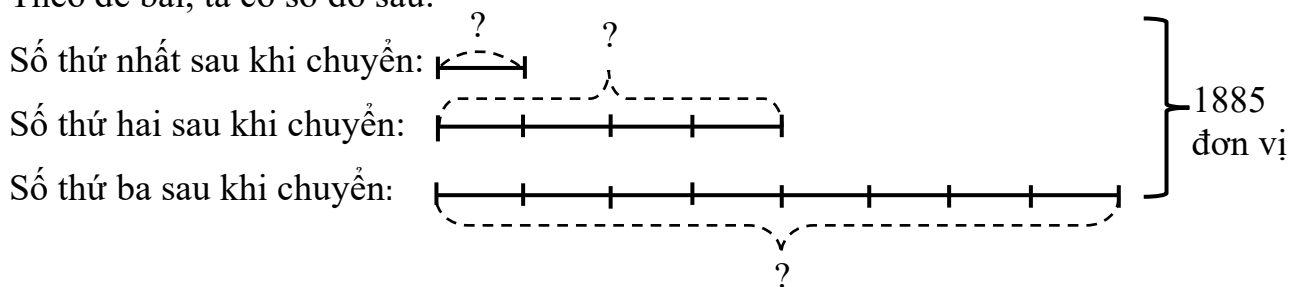
Số thứ nhất: $- 234$; $+ 120$ được kết quả bằng 145.

Số thứ ba: $+ 234$; $- 124$ được kết quả bằng 1160.

Số thứ hai: $+ 124$; $- 120$ được kết quả bằng 580.

* Trình bày lời giải

Theo đề bài, ta có sơ đồ sau:



Số thứ nhất sau khi chuyển đổi là:

$$1885 : (1 + 4 + 8) = 145$$

Số thứ hai sau khi chuyển đổi là:

$$145 \times 4 = 580$$

Số thứ ba sau khi chuyển đổi là:

$$145 \times 8 = 1160$$

Số thứ nhất là:

$$145 - 120 + 234 = 259$$

Số thứ hai là:

$$580 + 120 - 124 = 576$$

Số thứ ba là:

$$1160 + 124 - 234 = 1050$$

Đáp số: Số thứ nhất: 259

Số thứ hai: 576

Số thứ ba: 1050

➤ **Giải bài toán bằng cách lập bảng**

Theo đề bài, ta có bảng sau:

Lần chuyển	Số thứ nhất	Số thứ hai	Số thứ ba
Cuối	145	580	1160
Sau lần hai	$145 - 120 = 25$	580	$1160 - 234 = 926$
Sau lần một	25	$580 - 124 = 456$	$926 + 124 = 1050$
Lúc đầu	$25 + 234 = 259$	$456 + 120 = 576$	1050

Đáp số: Số thứ nhất: 259

Số thứ hai: 576

Số thứ ba: 1050

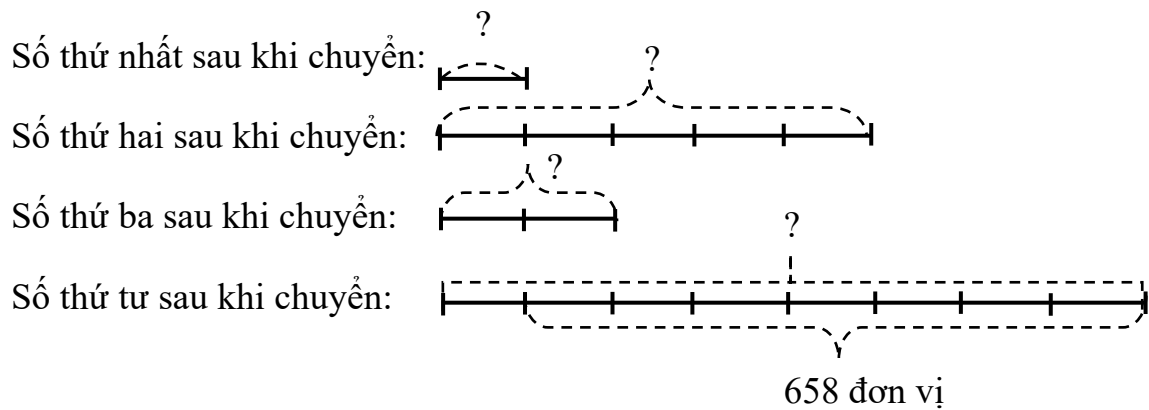
Ví dụ 12: Lan nói An: “Bạn hãy tìm nhanh giúp tớ bốn số tự nhiên, biết rằng nếu chuyển từ số thứ nhất sang số thứ hai và số thứ tư mỗi số 34 đơn vị, chuyển từ số thứ hai sang số thứ ba và số thứ tư một số tròn trăm nhỏ nhất và tiếp tục chuyển từ số thứ ba sang số thứ hai và số thứ nhất 45 đơn vị, cuối cùng chuyển số thứ tư sang số thứ ba một số lớn nhất có hai chữ số thì số thứ ba sẽ gấp đôi số thứ nhất, bằng $\frac{2}{5}$ số thứ hai và bằng $\frac{1}{4}$ số thứ tư. Đồng thời khi đó số thứ tư lớn hơn số thứ nhất 658 đơn vị.”

*** Phân tích bài toán**

Ta coi số thứ nhất có giá trị là một phần thì số thứ ba có giá trị tương ứng là 2 phần bằng nhau như thế.

Nếu số thứ ba có giá trị là 2 phần bằng nhau thì số thứ hai có giá trị tương ứng là 5 phần bằng nhau như thế và số thứ tư có giá trị tương ứng là 8 phần bằng nhau như thế.

Theo đề bài, ta có sơ đồ biểu diễn bốn số sau khi chuyển đổi:



Giá trị một phần là: $658 : (8 - 1) = 94$.

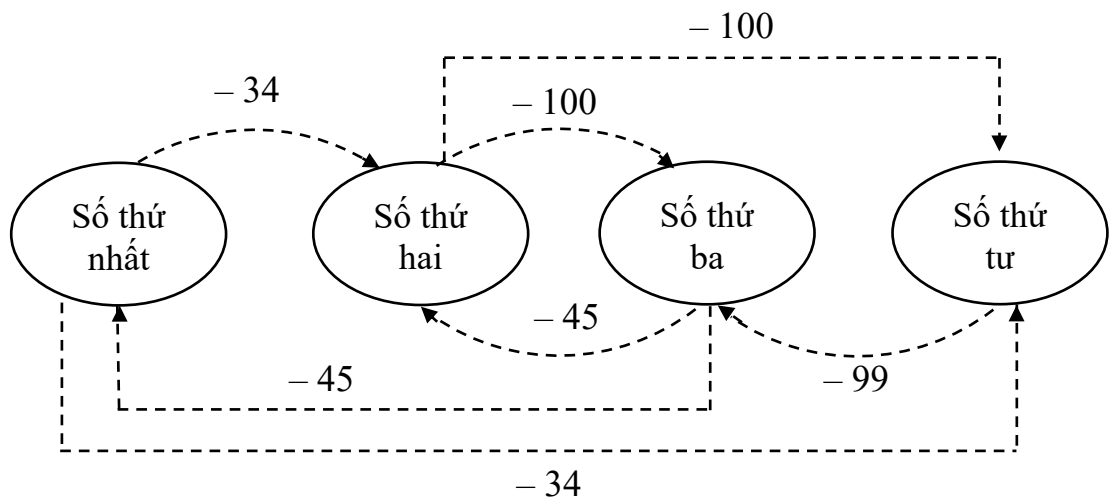
Số thứ nhất sau khi chuyển đổi chính là giá trị của một phần và bằng 94.

Số thứ hai sau khi chuyển đổi là $94 \times 5 = 470$.

Số thứ ba sau khi chuyển đổi là $94 \times 2 = 188$.

Số thứ tư sau khi chuyển đổi là: $94 \times 8 = 752$.

Ta có thể tóm tắt bốn bước chuyển đổi nói trong đề bài như sau:



Số thứ nhất: $-34; -34; +45$ được kết quả bằng 94.

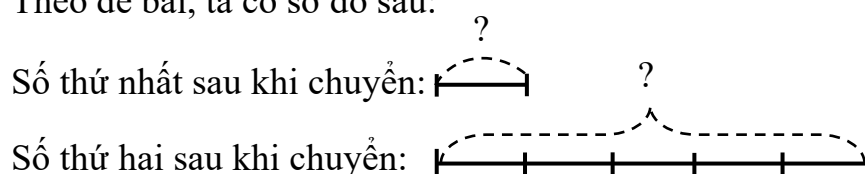
Số thứ hai: $+34; -100; -100; +45$ được kết quả bằng 470.

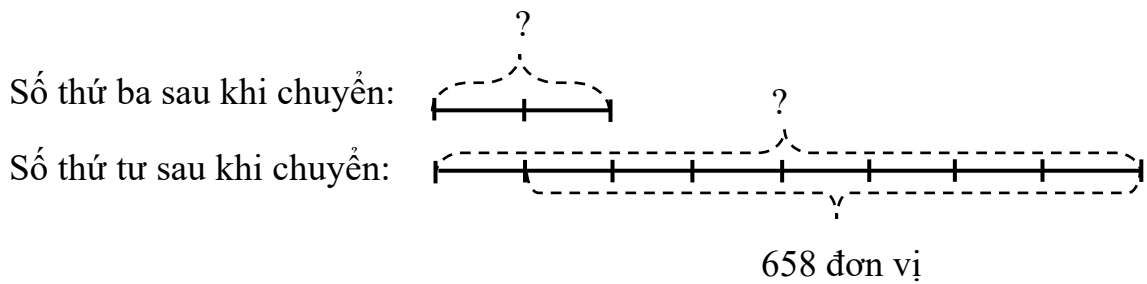
Số thứ ba: $+100; -45; -45; +99$ được kết quả bằng 188.

Số thứ tư: $+100; +34; -99$ được kết quả bằng 752.

* Trình bày lời giải

Theo đề bài, ta có sơ đồ sau:





Số thứ nhất sau khi chuyển đổi là:

$$658 : (7 - 1) \times 1 = 94$$

Số thứ hai sau khi chuyển đổi là:

$$94 \times 5 = 470$$

Số thứ ba sau khi chuyển đổi là:

$$94 \times 2 = 188$$

Số thứ tư sau khi chuyển đổi là:

$$94 \times 8 = 752$$

Số tròn trăm nhỏ nhất là 100.

Số lớn nhất có hai chữ số là 99.

Số thứ nhất là:

$$94 - 45 + 34 + 34 = 117$$

Số thứ hai là:

$$470 - 45 + 100 + 100 - 34 = 591$$

Số thứ ba là:

$$188 - 99 + 45 + 45 - 100 = 79$$

Số thứ tư là:

$$754 + 99 - 34 - 100 = 719$$

Đáp số: Số thứ nhất: 117

Số thứ hai: 591

Số thứ ba: 79

Số thứ tư: 719

Tương tự như những ví dụ trên ta dễ dàng giải bài toán bằng cách lập bảng.

Ví dụ 13: Tìm ba số, biết rằng nếu chuyển số thứ nhất sang các số còn lại mỗi số 23 đơn vị, chuyển số thứ hai sang số thứ nhất 16 đơn vị và sang số

thứ ba 18 đơn vị, cuối cùng chuyển 10 đơn vị từ số thứ ba sang số thứ hai thì được tổng và hiệu của số thứ nhất và số thứ hai lần lượt là 104 và 8. Trong đó số thứ hai lớn hơn số thứ nhất và một nửa số thứ ba.

* Phân tích bài toán

Dựa vào giải toán có lời văn khi biết tổng và hiệu của hai số. Vì số thứ hai lớn hơn số thứ nhất nên ta hiệu số thứ hai là số lớn và số thứ nhất là số bé. Từ đây ta dễ dàng tìm được số thứ hai sau khi chuyển đổi và số thứ nhất sau khi chuyển đổi khi biết tổng và hiệu của hai số.

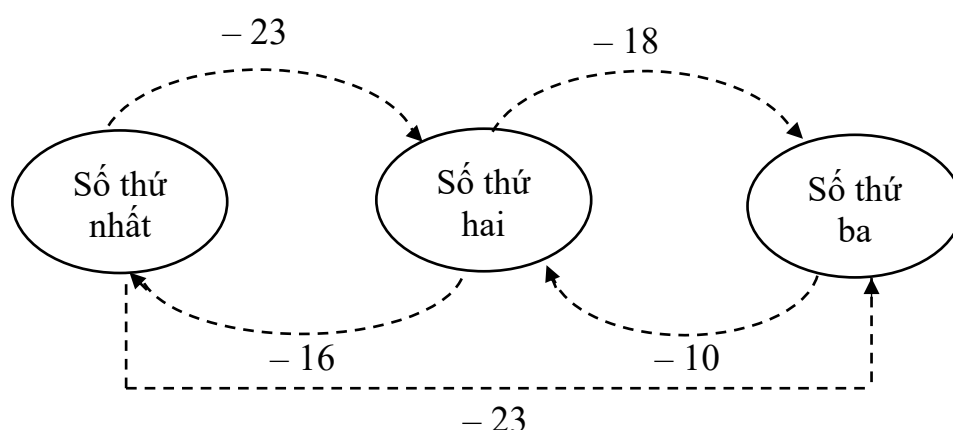
Số thứ nhất sau khi chuyển đổi: $(104 - 8) : 2 = 48$.

Số thứ hai sau khi chuyển đổi: $(104 + 8) : 2 = 56$.

Số thứ hai bằng một nửa số thứ ba nghĩa là số thứ ba bằng 2 lần số thứ hai:

Số thứ ba sau khi chuyển đổi: $56 \times 2 = 112$.

Ta có thể tóm tắt ba bước chuyển đổi nói trong đề bài như sau:



Số thứ nhất: $-23; -23; +16$ được kết quả bằng 48.

Số thứ hai: $+23; +10; -18; -16$ được kết quả bằng 56.

Số thứ ba: $+18; +23; -10$ được kết quả bằng 112.

* Trình bày lời giải

Số thứ nhất sau khi chuyển đổi là:

$$(104 - 8) : 2 = 48$$

Số thứ hai sau khi chuyển đổi là:

$$(104 + 8) : 2 = 56$$

Số thứ ba sau khi chuyển đổi là:

$$56 : 2 = 28$$

Số thứ nhất là:

$$48 - 16 + 23 + 23 = 78$$

Số thứ hai là:

$$56 + 16 + 18 - 10 - 23 = 57$$

Số thứ ba là:

$$112 + 10 - 23 - 18 = 81$$

Đáp số: Số thứ nhất: 78

Số thứ hai: 57

Số thứ ba: 81

Tương tự như những ví dụ trên ta dễ dàng giải bài toán bằng cách lập bảng.

2.2. Ứng dụng phương pháp tính ngược từ cuối để giải toán có lời văn

2.2.1. Ứng dụng phương pháp tính ngược từ cuối để giải toán có một đại lượng

Ví dụ 1: Một đội xe chở kẹo, mỗi xe chở 28 thùng kẹo, mỗi thùng kẹo chứa 24 hộp kẹo, mỗi hộp kẹo chứa 32 viên kẹo. Biết rằng cả đội xe chở được 107 520 viên kẹo. Hỏi đội xe có bao nhiêu chiếc xe?

*** Phân tích bài toán**

Theo đề bài, ta có tóm tắt sau:

1 xe = 28 thùng

1 thùng = 24 hộp kẹo

1 hộp kẹo = 32 viên kẹo

Mà cả đội chở được 107 520 viên kẹo

Từ đây ta dễ dàng tính được các thông số trên

*** Trình bày lời giải**

Số hộp kẹo là:

$$107520 : 32 = 3360 \text{ (hộp kẹo)}$$

Số thùng kẹo là:

$$3360 : 24 = 140 \text{ (thùng kẹo)}$$

Số xe của đội là:

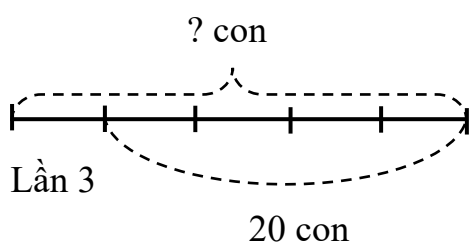
$$140 : 28 = 5 \text{ (xe)}$$

Đáp số: 5 xe

Ví dụ 2: Nhà Hương nuôi được một đàn gà gồm hai loại: gà trống và gà mái. Tuần đầu, mẹ bán $\frac{2}{3}$ đàn gà. Tuần thứ hai bán $\frac{1}{6}$ số gà còn lại và tuần thứ ba bán $\frac{1}{5}$ số gà còn lại sau hai lần bán trước. Cuối cùng nhà Hương còn 10 đôi gà. Hỏi đàn gà nhà Hương lúc đầu có bao nhiêu con?

*** Phân tích bài toán**

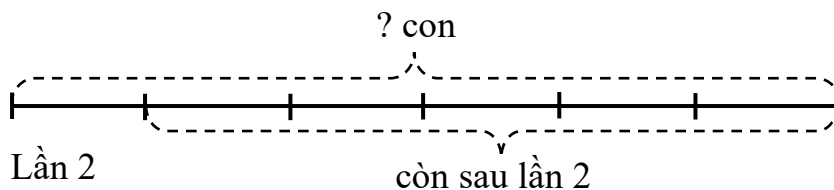
- Ta hiểu rằng 10 đôi gà chính là 20 con gà.
- Ta có thể biểu diễn số gà còn lại sau lần bán thứ hai bằng sơ đồ sau:



→ Từ sơ đồ trên ta có thể tính được số gà còn lại sau lần bán thứ hai thông qua phép tính:

$$20 : 4 \times 5 = 25 \text{ (con)}.$$

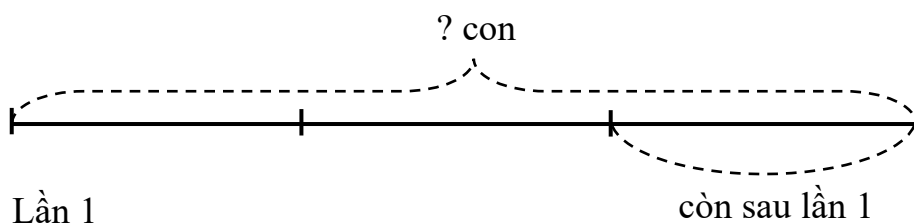
- Ta có thể tiếp tục biểu diễn số gà còn lại sau lần bán thứ nhất bằng sơ đồ sau:



→ Từ sơ đồ trên ta tính được số gà còn lại sau lần bán thứ nhất qua phép tính:

$$25 : 5 \times 6 = 30 \text{ (con)}.$$

- Số gà ban đầu có thể biểu diễn bằng sơ đồ sau:



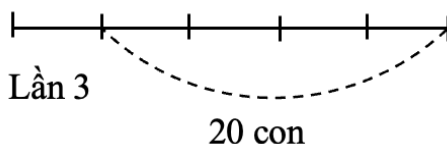
→ Từ sơ đồ trên ta tính được số gà của cả đàn qua phép tính:

$$30 : 1 \times 3 = 90 \text{ (con).}$$

*** Trình bày lời giải**

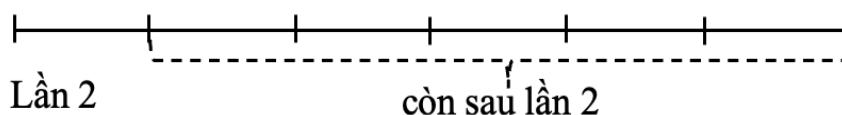
$$10 \text{ đôi gà} = 20 \text{ con gà}$$

Số gà còn lại sau lần bán thứ hai là :



$$20 : 4 \times 5 = 25 \text{ (con)}$$

Số gà còn lại sau lần bán thứ nhất là:



$$25 : 5 \times 6 = 30 \text{ (con)}$$

Số gà nhà Hương lúc đầu là:

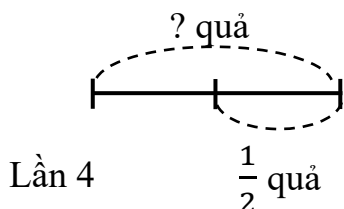
$$30 : 1 \times 3 = 90 \text{ (con)}$$

Đáp số: 90 con gà

Ví dụ 3: Dì Tư đem dưa ra chợ bán. Lần đầu dì bán cho khách một nửa số dưa và biếu khách 1 quả. Lần thứ hai dì bán $\frac{1}{2}$ số dưa còn lại và biếu khách $\frac{1}{2}$ quả. Lần thứ ba bán được một nửa số dưa còn lại và biếu khách thêm 1 quả. Lần thứ tư dì bán một nửa số dưa còn lại và nửa quả thì vừa hết số dưa. Hỏi lúc đầu, dì Tư mang bao nhiêu quả dưa ra chợ bán?

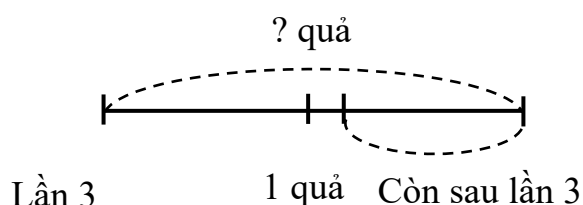
*** Phân tích bài toán**

- Một nửa số dưa còn lại sau khi bán lần thứ ba được biểu diễn bằng đoạn thẳng gồm hai phần tương ứng bằng nhau. Một phần bằng $\frac{1}{2}$ từ đây ta tính được nửa số dưa sau khi bán lần thứ ba qua sơ đồ sau:



→ Từ sơ đồ trên ta có thể tính được số dưa còn lại sau lần bán thứ ba.

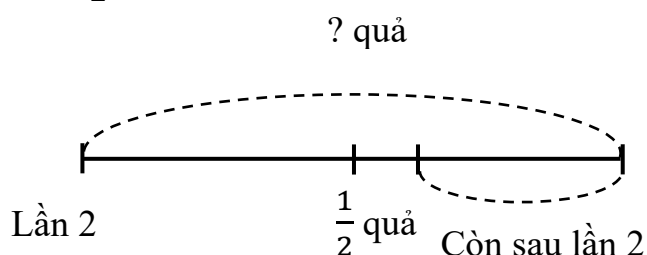
- Một nửa số dưa còn lại sau khi bán lần thứ hai được biểu diễn bằng đoạn thẳng gồm hai phần tương ứng bằng nhau trong đó một phần gồm 1 quả sau khi bán lần ba và 1 quả biếu cho khách. Ta có thể biểu diễn qua sơ đồ sau:



→ Từ sơ đồ trên ta có thể tính được số dưa còn lại sau lần bán thứ hai là:

$$(1 + 1) \times 2 = 4 \text{ (quả).}$$

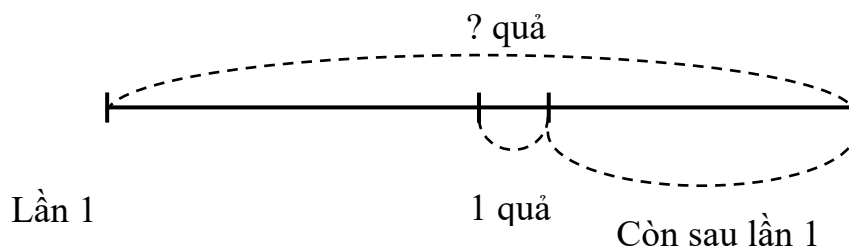
- Tìm số dưa còn lại sau lần bán thứ nhất được biểu diễn bằng đoạn thẳng gồm hai phần tương ứng bằng nhau trong đó một phần gồm 4 quả sau khi bán lần hai và $\frac{1}{2}$ quả biếu khách. Ta có thể biểu diễn qua sơ đồ sau:



→ Từ sơ đồ trên ta có thể tính được số dưa còn lại sau lần bán thứ nhất là:

$$\left(4 + \frac{1}{2}\right) \times 2 = 9 \text{ (quả)}$$

- Số dưa ban đầu được biểu diễn bằng đoạn thẳng gồm hai phần tương ứng bằng nhau trong đó gồm 9 quả sau khi bán lần thứ nhất và 1 quả biếu khách. Ta có thể biểu diễn qua sơ đồ sau:

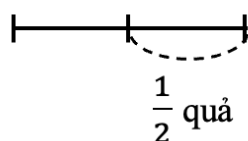


→ Từ sơ đồ trên ta có thể tính được số dưa ban đầu là:

$$(9 + 1) \times 2 = 20 \text{ (quả)}$$

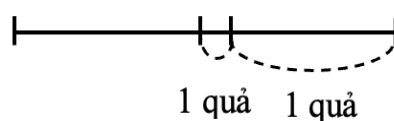
*** Trình bày lời giải**

Số dưa còn lại sau lần bán thứ ba là:



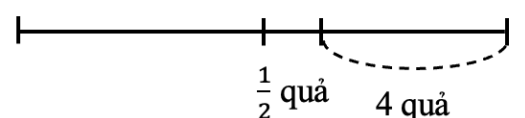
$$\frac{1}{2} \times 2 = 1 \text{ (quả)}$$

Số dưa còn lại sau lần bán thứ hai là:



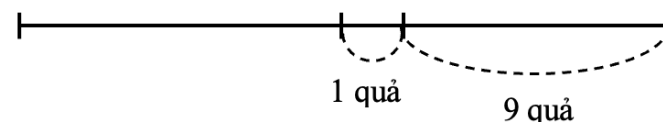
$$(1 + 1) \times 2 = 4 \text{ (quả)}$$

Số dưa còn lại sau lần bán thứ nhất là:



$$\left(4 + \frac{1}{2}\right) \times 2 = 9 \text{ (quả)}$$

Số dưa lúc đầu dì Tư mang ra chợ bán là:



$$(9 + 1) \times 2 = 20 \text{ (quả)}$$

Đáp số: 20 quả

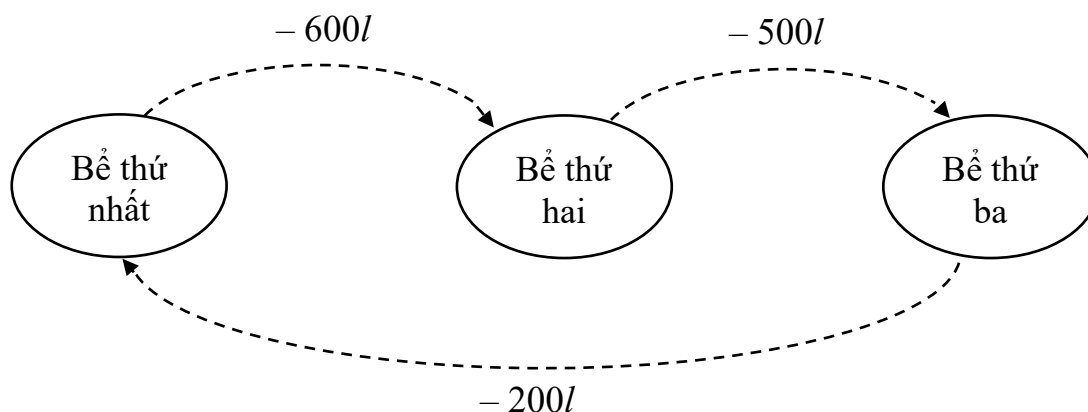
Ví dụ 4: Một người thợ được giao nhiệm vụ bơm nước vào 3 bể theo như định lượng đã giao như trên giấy tờ. Trong quá trình thực hiện, người thợ bơm 600l từ bể thứ nhất sang bể thứ hai, tiếp tục bơm 500l từ bể thứ hai sang bể thứ ba. Cuối cùng bơm 200l từ bể thứ ba sang bể thứ nhất. Cuối cùng được lượng nước trong ba bể là như nhau mỗi bể 1ml. Hỏi tổng lượng nước lúc đầu của ba bể là bao nhiêu lít?

*** Phân tích bài toán**

Theo đề bài, ta xác định được:

$$1\text{ml} = 1000\text{l}$$

Ta có thể tóm tắt ba bước chuyển đổi nói trong đề bài như sau:



Bể thứ nhất: $- 600$; $+ 200$ được kết quả bằng 1000 .

Bể thứ hai: $+ 200$; $- 500$ được kết quả bằng 1000 .

Bể thứ ba: $+ 500$; $- 200$ được kết quả bằng 1000 .

*** Trình bày lời giải**

Lượng nước lúc đầu của bể thứ nhất là:

$$1000 - 200 + 600 = 1400 \text{ (lít)}$$

Lượng nước lúc đầu của bể thứ hai là:

$$1000 + 500 - 200 = 1300 \text{ (lít)}$$

Lượng nước lúc đầu của bể thứ ba là:

$$1000 + 200 - 500 = 700 \text{ (lít)}$$

Tổng lượng nước lúc đầu của ba bể là:

$$1400 + 1300 + 700 = 3400 \text{ (lít)}$$

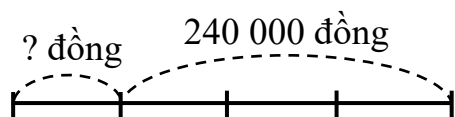
Đáp số: 3400l

Ví dụ 5: Một két sắt bí mật của ba anh em: Toàn, Tú, và Tùng. Ba bạn lần lượt mở két và thực hiện các hành động sau: Toàn rút ra $\frac{1}{2}$ số tiền trong két, sau đó bỏ lại $30\,000$ đồng. Tú rút tiếp $\frac{1}{3}$ số tiền còn lại, rồi bỏ lại $45\,000$ đồng. Tùng lấy đi $\frac{1}{4}$ số tiền còn lại, rồi bỏ lại $60\,000$ đồng. Cuối cùng trong két còn đúng $300\,000$ đồng. Hỏi lúc đầu trong két có bao nhiêu tiền?

*** Phân tích bài toán**

Vì khi Tùng bỏ lại $60\,000$ đồng vào két ta có hiệu rằng số tiền trong két có là: $300\,000 - 60\,000 = 240\,000$ đồng.

Số tiền còn lại sau khi Tú lấy ra biểu diễn bằng 4 đoạn thẳng bằng nhau, ta có thể biểu diễn số tiền còn lại sau khi bạn Tú lấy bằng sơ đồ sau:

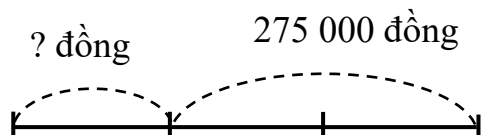


→ Từ sơ đồ trên ta có thể tính được số tiền còn lại sau khi Tú lấy là:

$$240\,000 : 3 \times 4 = 320\,000 \text{ (đồng)}.$$

Vì khi Tú bỏ lại 45 000 đồng vào két ta có thể hiểu rằng số tiền có trong két là: $320\,000 - 45\,000 = 275\,000$ đồng.

Số tiền còn lại sau khi Toàn lấy ra có thể diễn bằng 3 đoạn thẳng bằng nhau, ta có thể biểu diễn số tiền còn lại sau khi Toàn lấy qua sơ đồ sau:

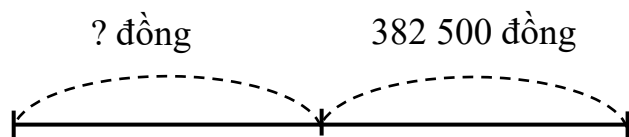


→ Từ sơ đồ trên ta có thể tính được số tiền còn lại sau khi Toàn lấy là:

$$275\,000 : 2 \times 3 = 412\,500 \text{ đồng}.$$

Vì Toàn bỏ lại 30 000 đồng vào két ta có thể hiểu rằng số tiền có trong két là $412\,500 - 30\,000 = 382\,500$ đồng.

Số tiền lúc đầu trong két ta có thể biểu diễn bằng hai đoạn thẳng bằng nhau, ta có thể biểu diễn số tiền lúc đầu trong két bằng sơ đồ sau:

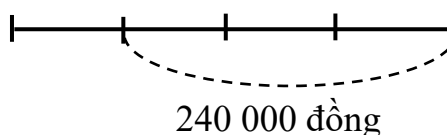


→ Từ sơ đồ trên ta có thể tính được số tiền lúc đầu có trong két là:

$$382\,000 : 1 \times 2 = 765\,000 \text{ (đồng)}.$$

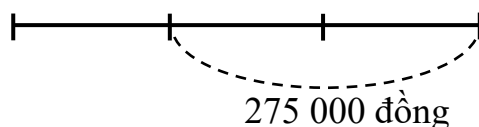
* Trình bày lời giải

Số tiền còn lại sau khi Tú lấy là:



$$(300\,000 - 60\,000) : 3 \times 4 = 320\,000 \text{ (đồng)}$$

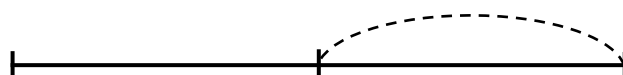
Số tiền còn lại sau khi Toàn lấy là:



$$(320\,000 - 45\,000) : 2 \times 3 = 412\,500 \text{ (đồng)}$$

Số tiền trong két lúc đầu có là:

382 500 đồng



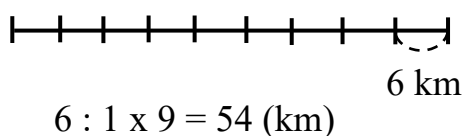
$$(412\,500 - 30\,000) : 1 \times 2 = 765\,000 \text{ (đồng)}$$

Đáp số: 765 000 đồng

Ví dụ 6: Một người đi từ A đến B bằng xe máy. Ngày đầu người đó đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường trừ đi 2 km. Ngày thứ hai người đó đi được $\frac{1}{2}$ quãng đường còn lại trừ đi 3 km. Ngày thứ ba người đó đi được $\frac{8}{9}$ quãng đường còn lại và 6 km nữa thì đến B. Tính quãng đường người ấy đã đi.

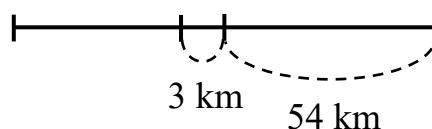
*** Trình bày lời giải**

Quãng đường còn lại sau ngày thứ hai là:



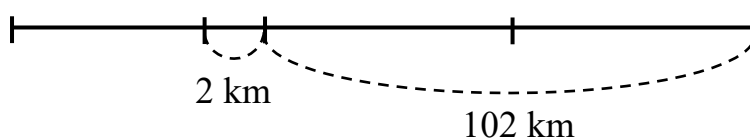
$$6 : 1 \times 9 = 54 \text{ (km)}$$

Quãng đường còn lại sau ngày thứ nhất là



$$(54 - 3) : 1 \times 2 = 102 \text{ (km)}$$

Quãng đường người ấy đã đi là:



$$(102 - 2) : 2 \times 3 = 150 \text{ (km)}$$

Đáp số: 150 km

2.2.2. Ứng dụng phương pháp tính ngược từ cuối để giải toán có nhiều đại lượng

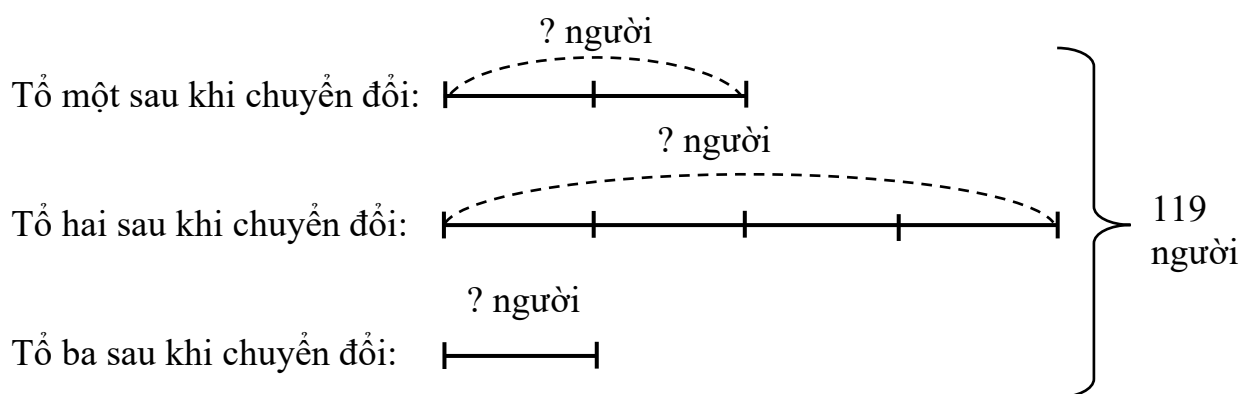
Ví dụ 7: Một đội công nhân làm đường gồm ba tổ có tất cả là 119 người. Sau khi làm xong đoạn đường thứ nhất, đội trưởng điều 24 người từ tổ thứ ba sang tổ thứ hai và điều 13 người từ tổ ba sang tổ một để làm tiếp đoạn đường thứ hai. Lúc này số công nhân của tổ một gấp hai lần số công nhân của tổ ba và bằng nửa số công nhân của tổ hai. Hỏi mỗi tổ lúc đầu có bao nhiêu công nhân?

* Phân tích bài toán

Vì theo đề bài sau khi chuyển số công nhân ở các tổ thì số công nhân của tổ một gấp hai lần số công nhân của tổ ba và bằng nửa số công nhân của tổ hai nên ta coi số công nhân tổ ba sau khi chuyển có giá trị là 1 phần thì số công nhân ở tổ một có giá trị tương ứng là 2 phần bằng nhau như thế.

Nếu số công nhân ở tổ một có giá trị là 2 phần bằng nhau thì số công nhân ở tổ hai có giá trị là 6 phần bằng nhau như thế.

Ta có sơ đồ sau biểu diễn của số công nhân sau khi chuyển đổi:



Tổng số phần bằng nhau là:

$$2 + 4 + 1 = 7 \text{ (phần).}$$

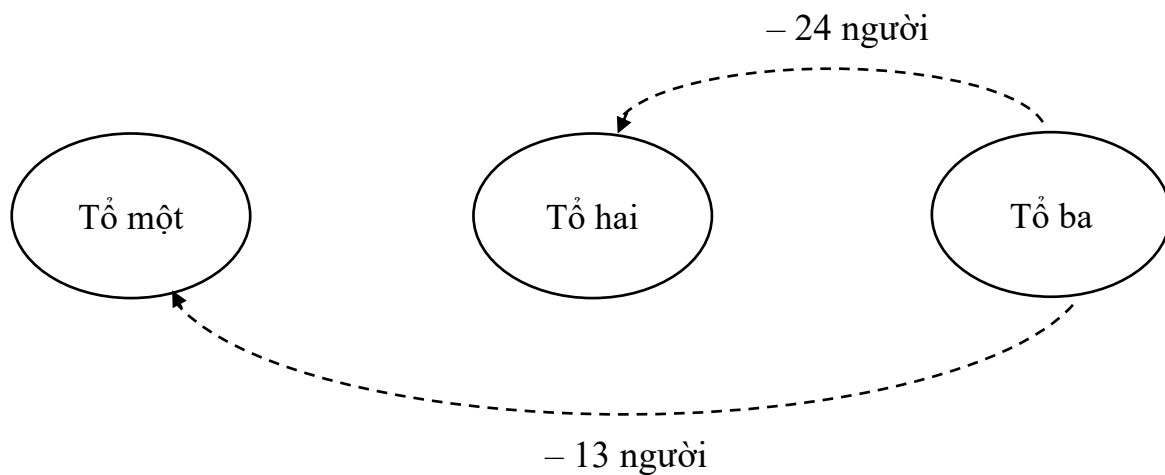
Giá trị một phần là:

$$119 : 7 = 17.$$

Số công nhân ở tổ ba sau khi chuyển đổi chính là giá trị của một phần và bằng 17 công nhân.

Lần lượt tính được số công nhân tổ một và tổ hai sau khi chuyển đổi.

Ta có thể tóm tắt ba bước chuyển đổi trong đề bài như sau:



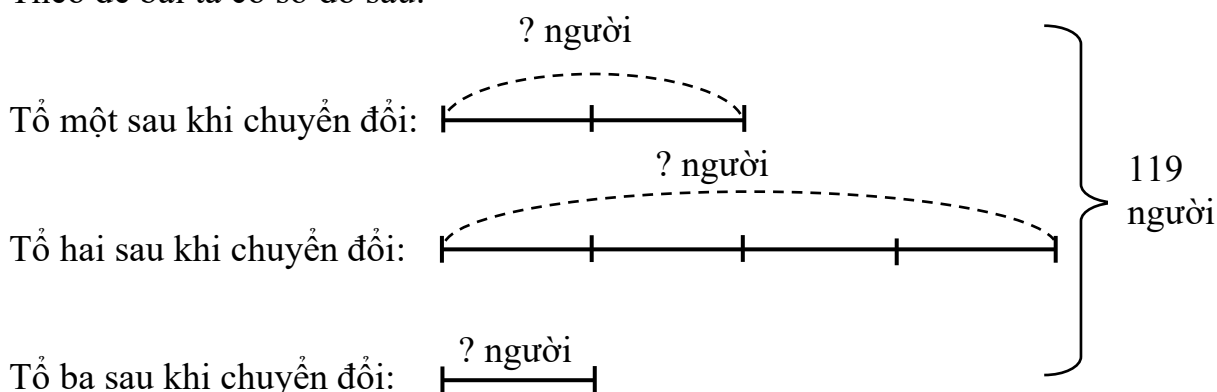
Công nhân tổ một: + 13 được kết quả bằng 34.

Công nhân tổ hai: + 24 được kết quả bằng 68.

Công nhân tổ ba: - 24; - 13 được kết quả bằng 17.

* Trình bày lời giải

Theo đề bài ta có sơ đồ sau:



Số công nhân của tổ Ba sau khi chuyển là:

$$119 : (2 + 4 + 1) = 17 \text{ (công nhân)}$$

Số công nhân tổ Một sau khi chuyển đổi là

$$17 \times 2 = 34 \text{ (công nhân)}$$

Số công nhân ở tổ Hai sau khi chuyển đổi là

$$17 \times 4 = 68 \text{ (công nhân)}$$

Số công nhân lúc đầu của tổ Một là:

$$34 - 13 = 21 \text{ (công nhân)}$$

Số công nhân lúc đầu của tổ Hai là:

$$68 - 24 = 44 \text{ (công nhân)}$$

Số công nhân lúc đầu của tổ Ba là:

$$17 + 13 + 24 = 54 \text{ (công nhân)}$$

Đáp số: Tổ Một có 21 công nhân

Tổ Hai có 44 công nhân

Tổ Ba có 54 công nhân

Ví dụ 8: Trong một buổi sinh hoạt cuối tuần, cô giáo chia kẹo vào 3 hộp cho ba nhóm học sinh cùng chơi trò “Chia kẹo thông minh”. Nếu chuyển 12 viên kẹo từ hộp thứ nhất sang sang hộp thứ hai, sau đó từ hộp thứ hai chuyển tiếp 6 viên sang cho hộp thứ ba, cuối cùng từ hộp thứ ba chuyển 9 viên kẹo sang hộp thứ nhất thì hộp thứ nhất có số kẹo gấp đôi số kẹo của hộp thứ ba, đồng thời số kẹo của hộp thứ nhất bằng một nửa số kẹo của hộp thứ hai, và số kẹo ở hộp thứ hai có nhiều hơn hộp thứ ba là 18 viên kẹo. Hỏi ban đầu mỗi hộp có bao nhiêu viên kẹo?

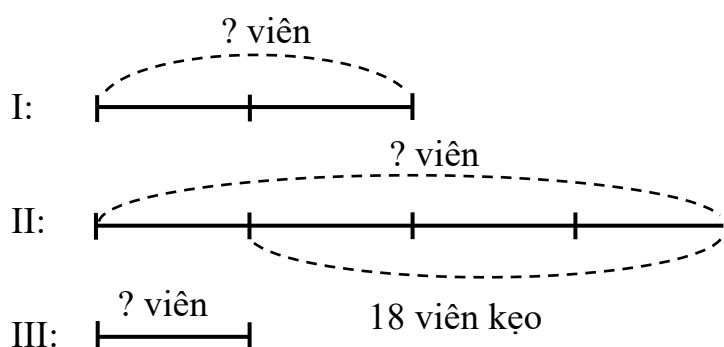
*** Phân tích bài toán**

Ta coi số kẹo ở hộp thứ ba có giá trị là một phần thì số kẹo ở hộp thứ nhất có giá trị tương ứng là hai phần bằng nhau như thế.

Nếu số kẹo ở hộp thứ nhất có giá trị là hai phần bằng nhau thì số kẹo ở hộp thứ hai có giá trị tương ứng là 4 phần bằng nhau như thế.

Giả sử, số kẹo ở hộp thứ nhất, thứ hai và thứ ba sau khi chuyển đổi lần lượt là I, II, III.

Theo đề bài, ta có sơ đồ biểu diễn số kẹo ở ba hộp sau khi chuyển đổi:



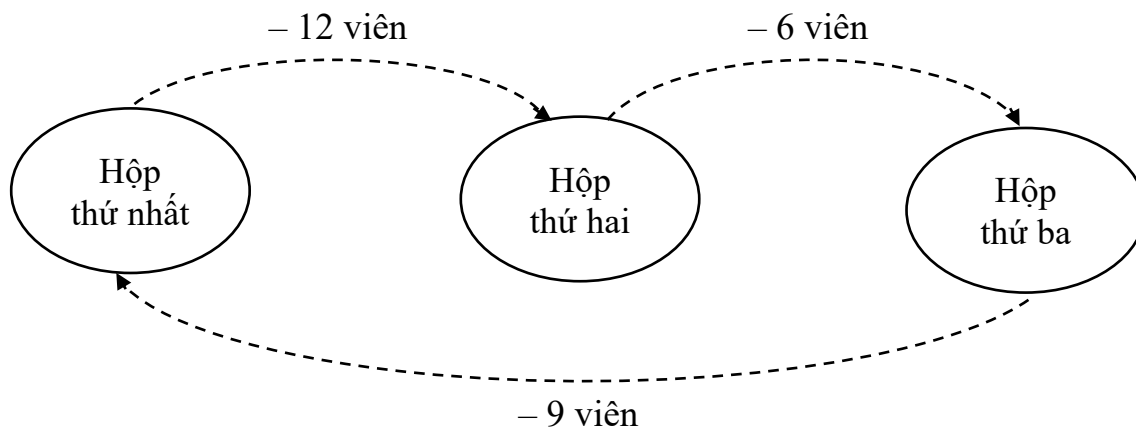
Giá trị một phần là: $18 : (4 - 1) = 6$.

Số viên kẹo ở hộp thứ ba sau khi chuyển đổi chính là giá trị của một phần và bằng 6 viên kẹo.

Số viên kẹo ở hộp thứ nhất sau khi chuyển đổi là: $6 \times 2 = 12$ (viên kẹo).

Số viên kẹo ở hộp thứ hai sau khi chuyển đổi là: $6 \times 4 = 24$ (viên kẹo).

Ta có thể tóm tắt ba bước chuyển đổi trong đề bài như sau:



Số viên kẹo ở hộp thứ nhất: $- 12; + 9$ có kết quả bằng 12.

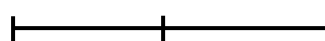
Số viên kẹo ở hộp thứ hai: $+ 12; - 6$ có kết quả bằng 24.

Số viên kẹo ở hộp thứ ba: $+6; - 9$ có kết quả bằng 6.

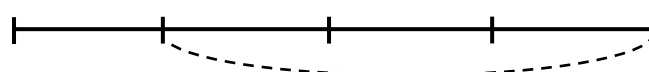
* Trình bày lời giải

Theo đề bài ta có sơ đồ sau:

Hộp thứ nhất sau khi chuyển:



Hộp thứ hai sau khi chuyển:



Hộp thứ ba sau khi chuyển:



Số viên kẹo ở hộp thứ ba sau khi chuyển là:

$$18 : (4 - 1) = 6$$

Số viên kẹo ở hộp thứ hai sau khi chuyển là:

$$6 \times 4 = 24 \text{ (viên kẹo)}$$

Số viên kẹo ở hộp thứ nhất sau khi chuyển là:

$$6 \times 2 = 12 \text{ (viên kẹo)}$$

Ban đầu hộp thứ nhất có số viên kẹo là:

$$12 - 9 + 12 = 15 \text{ (viên kẹo)}$$

Ban đầu hộp thứ hai có số viên kẹo là:

$$24 + 6 - 12 = 18 \text{ (viên kẹo)}$$

Ban đầu hộp thứ ba có số viên kẹo là:

$$6 + 9 - 6 = 9 \text{ (viên kẹo)}$$

Đáp số: Viên kẹo ở hộp một có 15 viên

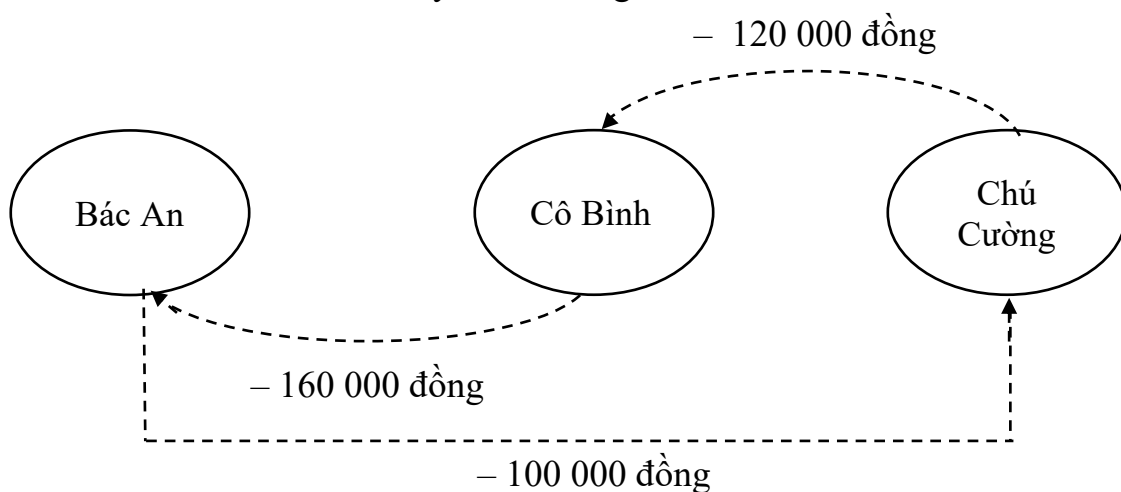
Viên kẹo ở hộp hai có 18 viên

Viên kẹo ở hộp ba có 9 viên

Ví dụ 9: Ba người: Bác An, Cô Bình và Chú Cường cùng đi siêu thị. Mỗi người mang theo một số tiền khác nhau, tất cả đều là bội số của 10 000 đồng. Bác An mua hàng hết $\frac{1}{3}$ số tiền đang có, sau đó được cô Bình cho thêm 160 000 đồng. Cô Bình mua hết $\frac{1}{5}$ số tiền của mình, sau đó cho bác An như trên, rồi nhận lại từ chú Cường 120 000 đồng. Chú Cường mua hết $\frac{1}{5}$ số tiền, cho cô Bình 120 000, rồi lại nhận từ bác An 100 000 đồng. Sau tất cả các giao dịch, cả ba người đều còn lại đúng 480 000 đồng. Hỏi ban đầu mỗi người có bao nhiêu tiền?

*** Phân tích bài toán**

Ta tóm tắt ba bước chuyển đổi trong đề bài như sau:



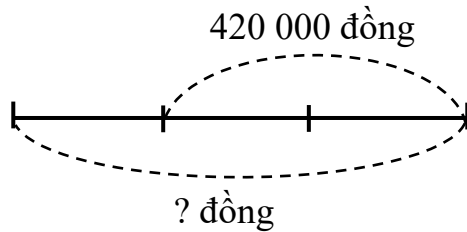
Số tiền còn lại Bác An sau khi mua : $+ 160\,000$; $- 100\,000$ có kết quả bằng 480 000.

Số tiền còn lại Cô Bình sau khi mua: $- 160\,000$; $+ 120\,000$ có kết quả bằng 480 000.

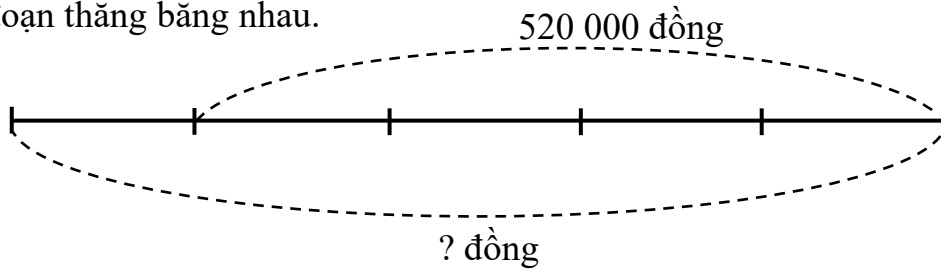
Số tiền còn lại Chú Cường sau khi mua: $- 120\,000$; $+ 100\,000$ có kết quả bằng 480 000.

Theo đề bài, Bác An mua hàng hết $\frac{1}{3}$ số tiền đang có nên ta biểu diễn số

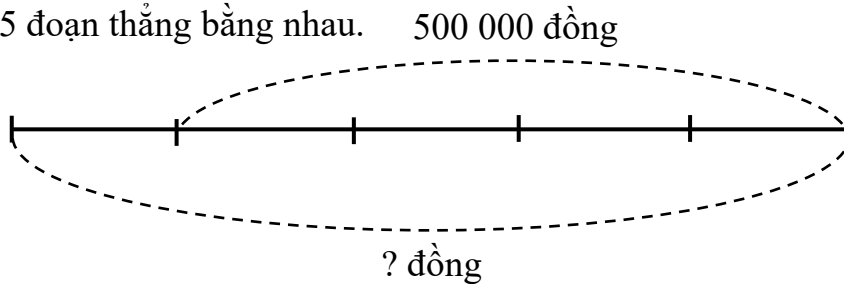
tiền lúc đầu Bác An có là 3 đoạn thẳng bằng nhau.



Cô Bình mua hết $\frac{1}{5}$ số tiền của mình nên ta biểu diễn số tiền lúc đầu cô Bình có là 5 đoạn thẳng bằng nhau.



Chú Cường mua hết $\frac{1}{5}$ số tiền nên ta biểu diễn số tiền lúc đầu chú Cường có là 5 đoạn thẳng bằng nhau.

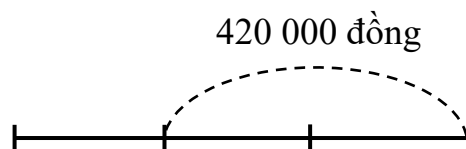


* Trình bày lời giải

Số tiền còn lại Bác An sau khi mua là:

$$480\,000 + 100\,000 - 160\,000 = 420\,000 \text{ (đồng)}$$

Số tiền lúc đầu bác An có là:

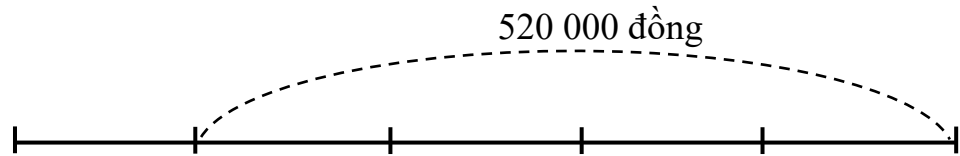


$$420\,000 : 2 \times 3 = 630\,000 \text{ (đồng)}$$

Số tiền còn lại Cô Bình sau khi mua là:

$$480\,000 - 120\,000 + 160\,000 = 520\,000 \text{ (đồng)}$$

Số tiền lúc đầu cô Bình có là:

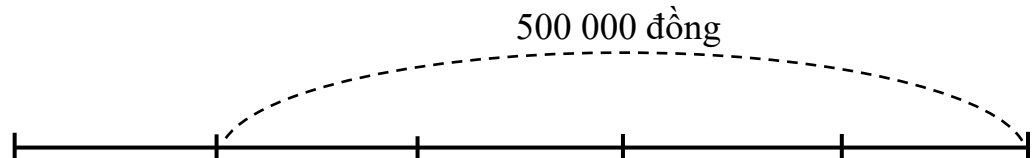


$$520\,000 : 4 \times 5 = 650\,000 \text{ (đồng)}$$

Số tiền còn lại Chú Cường sau khi mua là:

$$480\,000 - 100\,000 + 120\,000 = 500\,000 \text{ (đồng)}$$

Số tiền lúc đầu chú Cường có là:



$$500\,000 : 4 \times 5 = 625\,000 \text{ (đồng)}$$

Đáp số: Bác An có 630 000 đồng

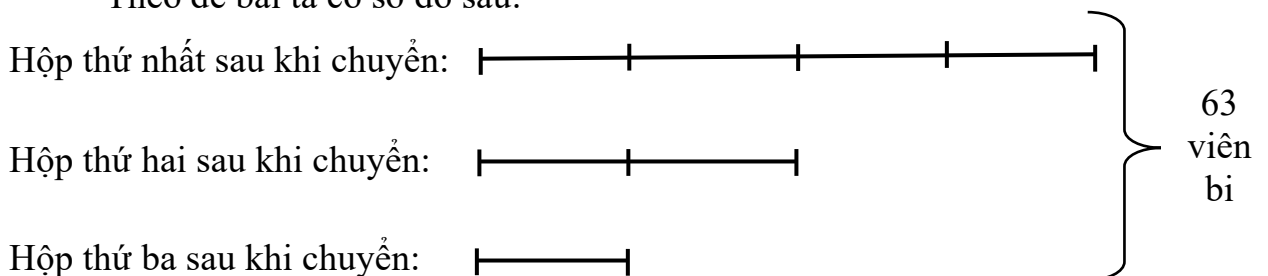
Cô Bình có 650 000 đồng

Chú Cường có 625 000 đồng

Ví dụ 10: Trong ba chiếc hộp đựng tất cả 63 viên bi. Sau khi chuyển từ hộp thứ hai sang hộp thứ nhất số bi bằng số bi có trong hộp thứ nhất, đồng thời chuyển từ hộp thứ hai sang hộp thứ ba số bi gấp hai lần số bi có trong hộp thứ ba. Cuối cùng chuyển từ hộp thứ ba sang hộp thứ nhất số bi bằng số bi hộp thứ nhất đang có thì số bi hộp thứ hai gấp đôi hộp thứ ba và bằng một nửa hộp thứ nhất. Hỏi lúc đầu mỗi hộp có bao nhiêu viên bi?

*** Trình bày lời giải**

Theo đề bài ta có sơ đồ sau:



Số viên kẹo ở hộp thứ ba sau khi chuyển đổi là:

$$63 : (4 + 2 + 1) = 9 \text{ (viên bi)}$$

Số viên kẹo ở hộp thứ nhất sau khi chuyển đổi là:

$$9 \times 4 = 36 \text{ (viên bi)}$$

Số viên kẹo ở hộp thứ hai sau khi chuyển đổi là:

$$9 \times 2 = 18 \text{ (viên bi)}$$

Trước khi chuyển số bi từ hộp thứ ba sang hộp thứ nhất thì hộp thứ nhất có:

$$36 : 2 = 18 \text{ (viên bi)}$$

Số viên bi của hộp thứ ba trước khi chuyển cho hộp thứ nhất là:

$$9 + 18 = 27 \text{ (viên bi)}$$

Hộp thứ ba lúc ban đầu có:

$$27 : (1+2) = 9 \text{ (viên bi)}$$

Lúc đầu hộp thứ nhất có:

$$18 : 2 = 9 \text{ (viên bi)}$$

Lúc đầu hộp thứ hai có là:

$$63 - (9 + 9) = 45 \text{ (viên bi)}$$

Đáp số: Hộp thứ nhất có 9 viên bi

Hộp thứ hai có 45 viên bi

Hộp thứ ba có 9 viên bi

Ví dụ 11: Trong một nhà kho, có hai chiếc thùng chứa 120kg bột mì. Sau khi đổ từ thùng thứ nhất sang thùng thứ hai một lượng bột mì, số bột mì trong thùng thứ hai bằng số bột mì trong thùng thứ nhất, rồi lại đổ từ thùng thứ hai sang thùng thứ nhất một lượng bột mì sao cho số bột mì còn lại trong thùng thứ nhất bằng với số bột mì trong thùng thứ hai thì số bột mì trong hai thùng là bằng nhau. Hỏi lúc đầu mỗi thùng có bao nhiêu ki - lô - gam bột mì?

*** Trình bày lời giải**

Số bột mì có trong mỗi thùng sau khi chuyển là:

$$120 : 2 = 60 \text{ (kg)}$$

Ta có bảng sau:

Lần chuyển	Thùng thứ nhất (kg)	Thùng thứ hai (kg)
Sau lần cuối	60	60
Sau lần thứ nhất	$60 : 2 = 30$	$60 + 30 = 90$
Lúc đầu	$30 + 45 = 75$	$90 : 2 = 45$

Đáp số: Thùng thứ nhất có 75 kg bột mì

Thùng thứ hai có 45 kg bột mì

Ví dụ 12: Có ba hộp đựng tất cả 10 tá rưỡi viên kẹo. Mẹ lấy 12 viên kẹo từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai, chuyển tiếp 24 viên kẹo từ hộp thứ hai sang hộp thứ ba, cuối cùng chuyển 13 viên kẹo từ hộp thứ ba sang thứ nhất thì số kẹo của hộp thứ hai sẽ gấp 2 lần hộp thứ nhất và bằng $\frac{1}{3}$ số kẹo của hộp thứ ba. Hỏi lúc đầu mỗi hộp có bao nhiêu viên kẹo?

*** Phân tích bài toán**

Theo bảng đơn vị đo đại lượng ta biết:

1 tá = 12 đơn vị.

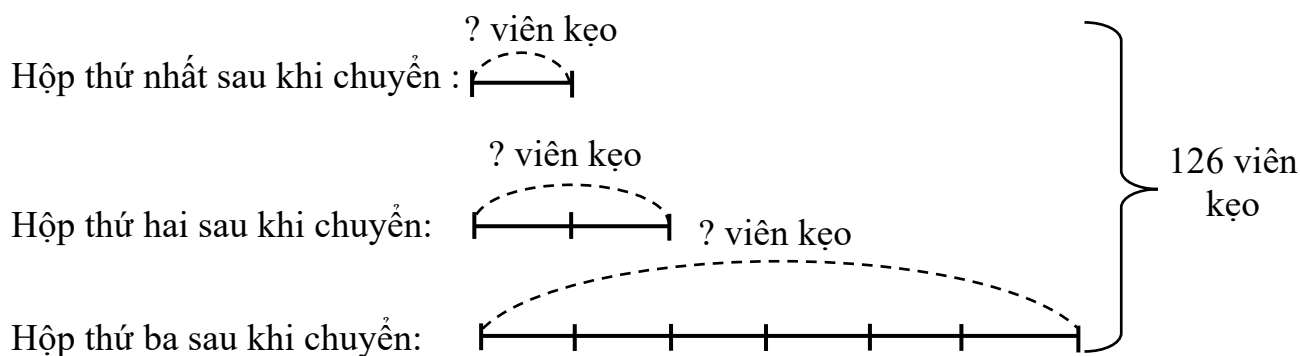
10 tá rưỡi = 126 đơn vị.

126 đơn vị tương đương bằng 126 viên kẹo.

Vì theo đề bài sau khi chuyển số viên kẹo ở hộp thứ hai gấp hai lần số viên kẹo ở hộp thứ nhất nên ta coi số viên kẹo ở hộp thứ nhất sau khi chuyển có giá trị là 1 phần thì số viên kẹo ở hộp thứ hai có giá trị tương ứng là 2 phần bằng nhau như thế.

Nếu số viên kẹo ở hộp thứ hai có giá trị là 2 phần bằng nhau thì số viên kẹo ở hộp thứ ba có giá trị là 6 phần bằng nhau như thế.

Ta có sơ đồ sau biểu diễn số viên kẹo của ba hộp sau khi chuyển:



Tổng số phần bằng nhau là:

$$1 + 2 + 6 = 9 \text{ (phần).}$$

Giá trị một phần là:

$$126 : 9 = 14.$$

Số viên kẹo ở hộp thứ nhất sau khi chuyển đổi chính là giá trị của một phần và

bằng 14 viên kẹo.

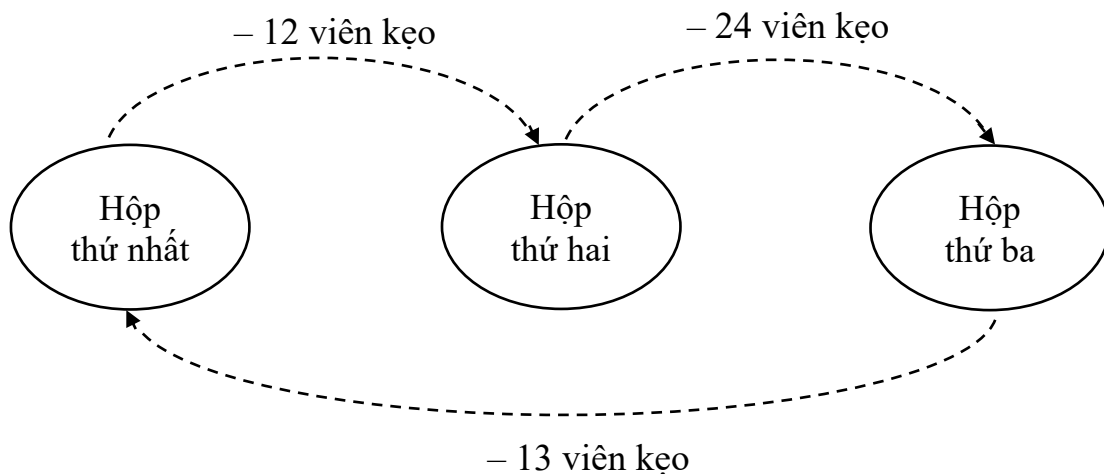
Số viên kẹo ở hộp thứ hai sau khi chuyển đổi là:

$$14 \times 2 = 28 \text{ (viên kẹo).}$$

Số viên kẹo ở hộp thứ ba sau khi chuyển đổi là:

$$14 \times 6 = 84 \text{ (viên kẹo).}$$

Ta có thể tóm tắt ba bước chuyển đổi nói trong đề bài như sau:



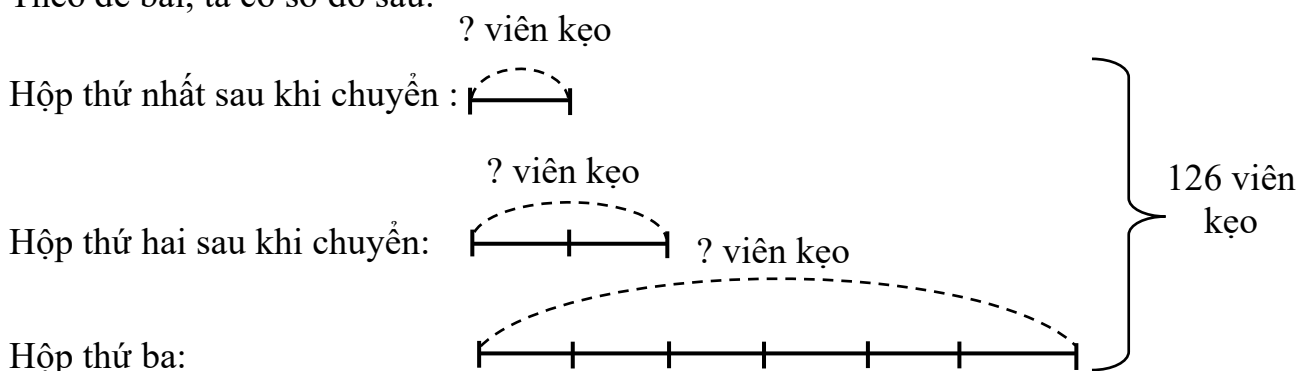
Hộp thứ nhất: $- 12; + 13$ được kết quả bằng 14.

Hộp thứ hai: $+ 12; - 24$ được kết quả bằng 28.

Hộp thứ ba: $+ 24; - 13$ được kết quả bằng 84.

* Trình bày lời giải

Theo đề bài, ta có sơ đồ sau:



Số viên kẹo của hộp thứ nhất sau khi chuyển đổi là:

$$126 : (1 + 2 + 6) = 14 \text{ (viên kẹo)}$$

Số viên kẹo của hộp thứ hai sau khi chuyển đổi là:

$$14 \times 2 = 28 \text{ (viên kẹo)}$$

Số viên kẹo của hộp thứ ba sau khi chuyển đổi là:

$$14 \times 6 = 84 \text{ (viên kẹo)}$$

Số kẹo ban đầu của hộp thứ nhất là:

$$14 - 13 + 12 = 13 \text{ (viên kẹo)}$$

Số kẹo ban đầu của hộp thứ hai là:

$$28 + 24 - 12 = 40 \text{ (viên kẹo)}$$

Số kẹo ban đầu của hộp thứ ba là:

$$84 + 13 - 24 = 73 \text{ (viên kẹo)}$$

Đáp số: Hộp thứ nhất có 13 viên kẹo

Hộp thứ hai có 40 viên kẹo

Hộp thứ ba có 73 viên kẹo

Ví dụ 13: Mẹ cho hai anh em 80 000 đồng để mua sách. Nếu anh cho em một số tiền đúng bằng số tiền của em có, rồi em lại cho anh một số tiền đúng bằng số tiền còn lại của anh thì số tiền của anh và của em có là bằng nhau. Hỏi mẹ đã cho mỗi người bao nhiêu tiền?

*** Phân tích bài toán**

Theo đề bài ta biết nếu anh cho em một số tiền đúng bằng số tiền của em có, rồi em lại cho anh một số tiền đúng bằng số tiền còn lại của anh thì số tiền của anh và của em có là bằng nhau vì vậy ta dễ dàng tính được số tiền sau khi chia của hai anh em, mỗi người là 40 000 đồng.

*** Trình bày lời giải**

Mỗi người có số tiền sau khi chia là:

$$80\,000 : 2 = 40\,000 \text{ (đồng)}$$

Số tiền còn lại của anh sau khi cho em là:

$$40\,000 : 2 = 20\,000 \text{ (đồng)}$$

Số tiền của em sau khi nhận được số tiền anh cho là:

$$40\,000 + 20\,000 = 60\,000 \text{ (đồng)}$$

Lúc đầu mẹ cho em số tiền là:

$$60\,000 : 2 = 30\,000 \text{ (đồng)}$$

Lúc đầu mẹ cho anh số tiền là:

$$20\ 000 + 30\ 000 = 50\ 000 \text{ (đồng)}$$

Đáp số: Anh được 50 000 đồng

Em được 30 000 đồng

* **Chú ý:** Phương pháp tính ngược từ cuối còn có một số dạng toán khá phức tạp và khó. Những cái khó đó là:

- Kết quả cuối cùng thường không phải là số cụ thể.
- Quá trình thay đổi phức tạp, có tính quy luật.

Vì vậy ở dạng toán này thường xuất hiện trong các kì thi toán nâng cao để phân loại các mức độ học sinh.

2.3. Ứng dụng phương pháp tính ngược từ cuối để giải toán vui và toán cổ

Các bài toán vui và toán cổ trong toán học không chỉ giúp học sinh phát triển tư duy mà còn tạo ra sự hứng thú trong học tập. Những bài toán này thường mang tính chất giải trí nhưng vẫn kích thích sự sáng tạo và khả năng tư duy logic của học sinh. Đây không chỉ là hình thức tạo hứng thú học tập mà còn là phương tiện hiệu quả giúp rèn luyện tư duy toán học, đặc biệt là tư duy logic và khả năng suy luận ngược.

Ví dụ 1: Ngày xưa, ở một làng quê nhỏ ven sông, có một người phụ nữ tên là Trần Lý, nổi tiếng là người buôn dầu ăn rất ngon. Một hôm, cô Lý nhận được một thùng dầu ăn đầy ắp 8 lít.

Trong tay cô chỉ có hai chiếc can cũ kỹ: là một chiếc can 5 lít và một chiếc can 3 lít. Không có thêm công cụ nào khác, cô Lý phải dùng ba chiếc can này để đong đúng 4 lít dầu bán cho khách, không hơn không kém.

Câu hỏi đặt ra là: Cô Lý phải làm thế nào để đong đúng 4 lít chỉ với ba chiếc can trên?

* Trình bày lời giải

Quá trình chuyển dầu trong ba can để có được 4 lít dầu bán cho khách có thể mô tả bởi bảng sau:

Lần	Can 8 lít	Can 5 lít	Can 3 lít
Lúc đầu	8	0	0
1	$8 - 3 = 5$	0	0
2	5	3	0
3	$5 - 3 = 2$	3	3
4	2	3	3
5	2	$3 + 2 = 5$	$3 - 2 = 1$
6	$2 + 5 = 7$	0	1
7	$7 - 3 = 4$	1	3

Sau 6 bước, can 8 lít chứa đúng 4 lít dầu (có thể bán cho khách).

Vậy cô Lý cần đổ dầu theo các bước trên để thu được 4 lít trong can 8 lít

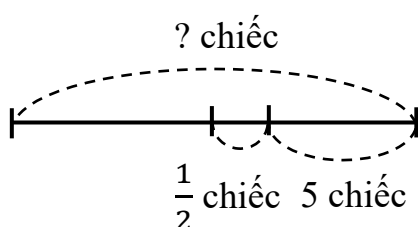
Ví dụ 2: Một cậu bé được mẹ giao nhiệm vụ vào kho lương thực của làng để lấy đủ 5 chiếc bánh mang về cho cả nhà. Nhưng kho lương thực được canh giữ bởi ba người gác cổng, mỗi người đứng ở một cánh cổng khác nhau. Khi cậu bé đi qua cánh cổng đầu tiên, người gác cổng giao hẹn: **“Cháu có thể mang bánh ra, nhưng trước tiên, phải chia cho ta một nửa số bánh cháu có, rồi đưa thêm cho ta một nửa chiếc nữa”**. Qua hai cổng tiếp theo, người gác cổng cũng đều ra điều kiện như vậy.

Hỏi để mang về đúng 5 chiếc bánh cho gia đình, cậu bé cần lấy bao nhiêu chiếc bánh từ kho lương thực?

* Phân tích bài toán

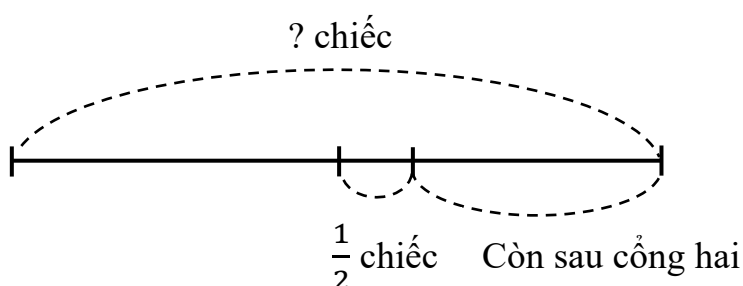
Để cậu bé mang về đúng 5 chiếc bánh cho gia đình, cậu cần phải đi qua 3 chiếc cổng và khi quay ra cậu bé sẽ đi ra lần lượt qua các cửa số ba; số hai và số một.

- Vì phải chia một nửa số bánh có và thêm một nửa chiếc nữa nên ta biểu diễn số bánh còn lại sau khi qua cổng thứ hai là đoạn thẳng gồm hai phần tương ứng bằng nhau trong đó 1 phần gồm 5 chiếc và một nửa chiếc bánh qua sơ đồ sau:



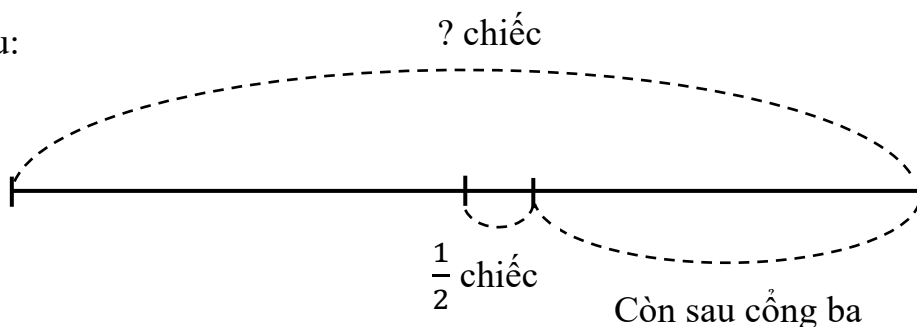
→ Từ sơ đồ trên ta có thể tính được số chiếc bánh còn lại sau khi đi qua cổng thứ hai.

- Một nửa số bánh còn lại sau khi đi qua cổng thứ ba được biểu diễn bằng đoạn thẳng gồm hai đoạn thẳng bằng nhau trong đó một phần gồm số bánh sau khi qua cổng thứ hai và một nửa chiếc bánh. Ta có thể biểu diễn qua sơ đồ sau:



→ Từ sơ đồ trên ta có thể tính được số chiếc bánh còn lại sau khi đi qua cổng thứ ba.

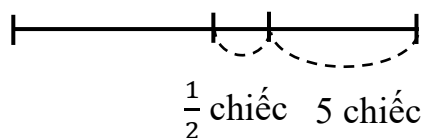
- Số bánh cậu bé cần lấy từ kho lương thực cũng được biểu diễn bằng đoạn thẳng gồm hai phần tương ứng bằng nhau trong đó một phần gồm số bánh còn lại sau khi qua cổng thứ ba và một nửa chiếc bánh. Ta có thể biểu diễn qua sơ đồ sau:



→ Từ sơ đồ trên ta có thể tính được số chiếc bánh cậu bé cần lấy từ kho lương thực.

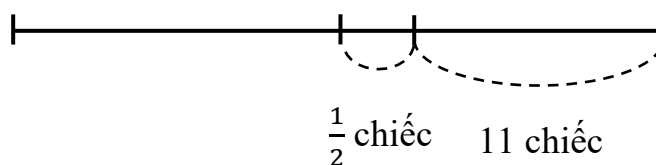
* Trình bày lời giải

Số bánh còn lại sau khi đi qua cổng thứ hai là:



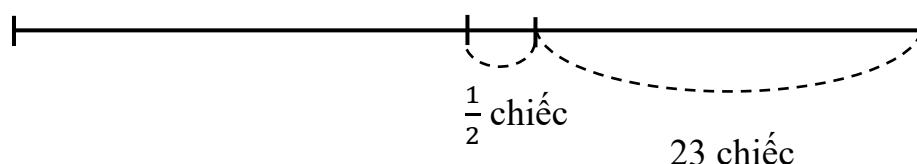
$$(5 + \frac{1}{2}) \times 2 = 11 \text{ (chiếc)}$$

Số bánh còn lại sau khi đi qua cổng thứ ba là:



$$(11 + \frac{1}{2}) \times 2 = 23 \text{ (chiếc)}$$

Số bánh cậu bé cần lấy từ kho lương thực



$$(23 + \frac{1}{2}) \times 2 = 47 \text{ (chiếc)}$$

Đáp số: 47 chiếc

Ví dụ 3: Khi Con được tặng 5 quả chuối thần và quyết định trồng chuối làm giàu. Cứ sau mỗi ngày, số chuối lại gấp 5 lần ngày hôm trước (do chuối mọc cực nhanh trên đảo Chuối Thần Kỳ). Sau 10 ngày, Khi Con có đủ chuối để mở một tiệm bán sinh tố. Hỏi:

a) Nếu lúc đầu Khi Con có 625 quả chuối, thì sau mấy ngày Khi Con sẽ có đủ chuối để mở tiệm?

b) Nếu lúc đầu Khi Con chỉ có 500 quả chuối, thì sau mấy ngày Khi Con đủ chuối?

* Phân tích bài toán

Đây là bài toán dựa vào bảng liệt kê số ngày thì có bao nhiêu quả chuối được mọc ra để phân tích và đưa ra được số liệu phù hợp với bài toán.

* Trình bày lời giải

Theo đề bài, ta có bảng sau:

Ngày thứ	Số chuối (quả)
1	5
2	25
3	125
4 (1)	625
5 (2)	3125
6 (3)	15 625
7 (4)	78 125
8 (5)	390 625
9 (6)	1 953 125
10 (7)	9 765 625
11 (8)	48 828 125

a) Nhìn vào bảng trên ta thấy: Nếu lúc đầu Khi Con có 625 quả chuối, thì sau 7 ngày Khi Con sẽ có đủ chuối để mở tiệm.

b) Cách 1:

Nhìn vào bảng trên ta thấy:

- Nếu lúc đầu Khi Con có 125 quả chuối thì 8 ngày sau Khi Con mới đủ chuối để mở tiệm.

- Vì $500 > 125$ nên nếu lúc đầu Khi Con có 500 quả chuối thì 8 ngày sau Khi Con đủ chuối để mở tiệm (có thể thừa).

Vậy nếu lúc đầu Khi Con chỉ có 500 quả chuối, thì sau 8 ngày Khi Con đủ chuối.

Cách 2:

- Nếu lúc đầu Khi Con có 625 quả chuối thì sau 7 ngày Khi Con sẽ có đủ chuối.

- Nếu lúc đầu khi con có 500 quả chuối thì sau 7 ngày Khi con chưa có đủ chuối để mở tiệm vì $500 < 625$.

Vậy nếu lúc đầu Khi Con có 500 quả chuối thì sau 8 ngày Khi Con mới có đủ chuối.

Ví dụ 4: Một con cò đang bay gặp một đàn vịt trời bay ngang qua bèn cất tiếng chào: “Chào trăm bạn!”. Con vịt đầu đàn bèn trả lời: “Bạn nhầm rồi! Chúng tôi thêm một nửa chúng tôi thêm một phần ba chúng tôi thêm cả bạn nữa mới được một trăm”. Hỏi đàn vịt trời có bao nhiêu con?

*** Trình bày lời giải**

Vì đàn vịt thêm một nửa đàn vịt thêm một phần ba đàn vịt và thêm cả con cò nữa mới được một trăm nên nếu bớt con cò đi thì số lượng còn lại là:

$$100 - 1 = 99 \text{ (con)}$$

99 con vịt ứng với số phần là:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \text{ (đàn vịt)}$$

Đàn vịt trời có số con là:

$$99 : \frac{11}{6} = 54 \text{ (con)}$$

Đáp số: 54 con

2.4. Sáng tạo một số bài toán giải bằng phương pháp tính ngược từ cuối

Sáng tạo các bài toán mới không chỉ giúp học sinh làm quen với nhiều dạng bài khác nhau mà còn đa dạng hoá tình huống, nâng dần mức độ nhận thức và rèn luyện tư duy linh hoạt cho học sinh. Các bài toán được sáng tạo sẽ được xây dựng dựa trên các nguyên tắc và quy luật của phương pháp tính ngược từ cuối, từ đó giúp học sinh dễ dàng tiếp cận và giải quyết. Mục 2.4 sẽ tập trung trình bày sáng tạo một số bài toán dựa vào các thủ thuật sau: thủ thuật nêu các dữ kiện của bài toán đã cho dưới dạng gián tiếp; thủ thuật thay đổi số liệu, văn cảnh của bài toán đã cho; thủ thuật thêm/ bớt yêu cầu cho bài toán.

2.4.1. Thủ thuật nêu các dữ kiện của bài toán đã cho dưới dạng gián tiếp

Bài toán 1: Tìm một số biết rằng số đó khi nhân với 4, rồi bớt đi 3, sau đó cộng với 7 và cuối cùng chia cho 3 ta được kết quả bằng 8.

Bài giải:

Số trước khi chia cho 3 là:

$$8 \times 3 = 24$$

Số trước khi cộng với 7 là:

$$24 - 7 = 17$$

Số trước khi bớt đi 3 là:

$$17 + 3 = 20$$

Số cần tìm là:

$$20 : 4 = 5$$

Đáp số: Số cần tìm là 5

➤ Từ bài toán 1, ta xây dựng một số bài toán:

Bài 1.1. Tìm một số biết rằng số đó khi nhân với 5, rồi bớt đi 7, sau đó cộng với 6 và cuối cùng chia cho 9 ta được một số nhỏ nhất có hai chữ số giống nhau.

Bài 1.2. Tìm một số biết rằng số đó khi cho 12, rồi nhân với 20, được bao nhiêu bớt đi 12 và cuối cùng cộng với 30 ta được kết quả là số lớn nhất có hai chữ số khác nhau.

Bài 1.3. Lê nghĩ ra một số. Nếu trừ số đó cho 352, rồi chia cho 54, được bao nhiêu nhân với 11 và cuối cùng bớt đi 30 thì được kết quả là số nhỏ nhất có 3 chữ số chia hết cho 3. Hỏi Lê đã nghĩ ra số nào?

Bài 1.4. Nam nghĩ ra một số. Lấy số đó cộng với $\frac{3}{2}$ được bao nhiêu trừ đi $\frac{2}{5}$, lấy kết quả nhân với $\frac{6}{7}$, được bao nhiêu chia cho $\frac{2}{7}$ thì được 5,7. Nam đã nghĩ ra số nào?

Bài toán 2: Tìm ba số, biết rằng sau khi chuyển từ số thứ nhất sang số thứ hai 14 đơn vị, chuyển từ số thứ hai sang số thứ ba 17 đơn vị và chuyển từ số thứ ba sang số thứ nhất 21 đơn vị thì ta được ba số đều bằng 100.

Bài giải:

Cách 1:

Số thứ nhất cần tìm là:

$$100 - 21 + 14 = 93$$

Số thứ hai cần tìm là:

$$100 + 17 - 14 = 103$$

Số thứ ba cần tìm là:

$$100 + 21 - 17 = 104$$

Đáp số: Số thứ nhất là 93

Số thứ hai là 103

Số thứ ba là 104

Cách 2:

Lần chuyển	Số thứ nhất	Số thứ hai	Số thứ ba
Cuối	100	100	100
Sau lần hai	$100 - 21 = 79$	100	$100 + 21 = 121$
Sau lần nhất	79	$100 + 17 = 117$	$121 - 17 = 104$
Lúc đầu	$79 + 14 = 93$	$117 - 14 = 103$	104

Đáp số: Số thứ nhất là 93

Số thứ hai là 103

Số thứ ba là 104

➤ **Từ bài toán 2, ta xây dựng một số bài toán:**

Bài 1.5. Tìm ba số, biết rằng sau khi chuyển từ số thứ nhất sang số thứ hai 10 đơn vị, chuyển từ số thứ hai sang số thứ ba 15 đơn vị và chuyển từ số thứ ba sang số thứ nhất 20 đơn vị thì ta được ba số đều bằng 150.

Bài 1.6. Cho bốn số có tổng bằng 164. Nếu chuyển 12 đơn vị từ số thứ hai sang số thứ nhất, chuyển 25 đơn vị từ số thứ hai sang số thứ ba, sau đó chuyển 20 đơn vị từ số thứ tư sang số thứ nhất và cuối cùng chuyển 10 đơn vị từ số thứ tư sang số thứ ba thì ta được bốn số bằng nhau. Tìm bốn số đó.

Bài 1.7. Tìm ba số, biết nếu chuyển từ số thứ nhất sang số thứ hai số tròn chục bé nhất có hai chữ số, sau đó chuyển 5 đơn vị từ số thứ hai sang số thứ ba, chuyển tiếp số lẻ có hai chữ số nhỏ nhất từ số thứ ba sang số thứ hai thì ta được bốn số đều bằng nhau, biết rằng tổng của chúng là số nhỏ nhất có ba chữ số chia hết cho 3.

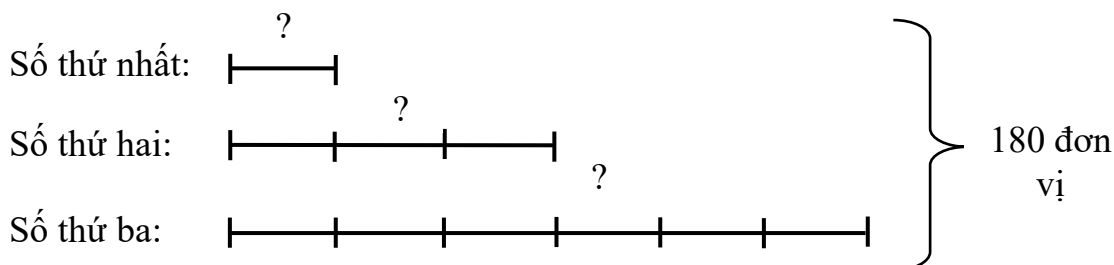
Bài toán 3: Tổng của ba số bằng 180. Nếu chuyển 15 đơn vị từ số thứ nhất sang số thứ 2, chuyển 23 đơn vị từ số thứ hai sang số thứ ba, rồi chuyển 7 đơn

vị từ số thứ ba sang số thứ nhất, thì ta nhận được ba số mới, trong đó số thứ ba gấp ba lần số thứ nhất và bằng nửa số thứ ba. Tìm ba số đó.

Bài giải:

Cách 1:

Theo đề bài, ta có sơ đồ biểu diễn ba số sau khi chuyển đổi:



Số thứ nhất sau khi chuyển đổi là:

$$180 : (1 + 3 + 6) = 18$$

Số thứ hai sau khi chuyển đổi là:

$$18 \times 3 = 54$$

Số thứ ba sau khi chuyển đổi là:

$$54 \times 2 = 108$$

Số thứ nhất là:

$$18 - 7 + 15 = 26$$

Số thứ hai là:

$$54 + 23 - 15 = 62$$

Số thứ ba là:

$$108 + 7 - 23 = 92$$

Đáp số: Số thứ nhất là 26

Số thứ hai là 62

Số thứ ba là 92

Cách 2: Sau khi tìm được ba số sau khi chuyển đổi, ta thiết lập được bảng sau:

Lần chuyển	Số thứ nhất	Số thứ hai	Số thứ ba
Cuối	18	54	108
Cuối	$18 - 7 = 11$	54	$108 + 7 = 115$
Sau lần hai	11	$54 + 23 = 77$	$115 - 23 = 92$
Sau lần nhất	$11 + 15 = 26$	$77 - 15 = 62$	92

Đáp số: Số thứ nhất là 26

Số thứ hai là 62

Số thứ ba là 92

➤ Từ bài toán 3, ta xây dựng một số bài toán:

Bài 1.8. Tổng ba số là 180. Nếu chuyển 15 đơn vị từ số thứ nhất sang số thứ hai, chuyển 23 đơn vị từ số thứ hai sang số thứ ba và chuyển từ số thứ ba sang số thứ nhất 7 đơn vị thì ta nhận được ba số mới, trong đó số thứ hai gấp 3 lần số thứ nhất và bằng nửa số thứ ba. Tìm ba số đó.

Bài 1.9. Tổng của ba số bằng 60. Nếu chuyển 2 đơn vị từ số thứ nhất sang số thứ hai, và chuyển 3 đơn vị từ số thứ ba sang số thứ hai, thì số thứ hai sẽ gấp ba lần số thứ nhất và bằng một nửa số thứ ba. Tìm ba số ban đầu.

Bài 1.10. Tìm bốn số tự nhiên, biết rằng: nếu chuyển 2 đơn vị từ số thứ nhất sang số thứ ba và số thứ tư, chuyển từ số thứ hai sang số thứ ba và số thứ tư mỗi số 3 đơn vị và chuyển 8 đơn vị từ số thứ ba sang số thứ tư thì số thứ hai gấp đôi số thứ nhất, bằng một nửa số thứ ba và bằng $\frac{1}{4}$ số thứ tư. Đồng thời khi đó số thứ tư lớn hơn số thứ nhất 21 đơn vị.

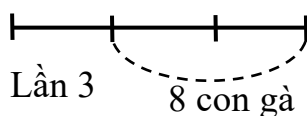
2.4.2. Thủ thuật thay đổi số liệu, văn cảnh của bài toán đã cho

Bài toán 4: Nhà Cúc nuôi một đàn gà. Lần đầu mẹ Cúc bán một nửa số gà, lần thứ hai bán một nửa số gà còn lại và lần thứ ba bán $\frac{1}{3}$ số gà còn lại sau hai lần bán. Cuối cùng nhà Cúc còn lại 4 đôi gà. Hỏi đàn gà nhà Cúc lúc đầu có bao nhiêu con?

Bài giải:

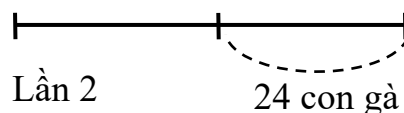
4 đôi gà = 8 con gà

Số gà còn lại sau lần bán thứ hai là:



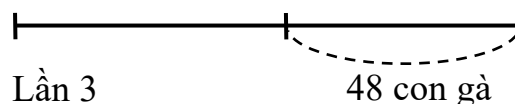
$$8 : 2 \times 3 = 12 \text{ (con gà)}$$

Số gà còn lại sau lần bán thứ nhất là:



$$24 : 1 \times 2 = 48 \text{ (con gà)}$$

Đàn gà nhà Cúc lúc đầu có số con là:



$$48 : 1 \times 2 = 96 \text{ (con gà)}$$

Đáp số: 96 con gà

➤ Từ bài toán 4, ta xây dựng một số bài toán:

Bài 2.1. Nhà Mai nuôi một đàn gà. Lần đầu mẹ Mai bán $\frac{1}{3}$ số gà, lần thứ hai bán một nửa số gà còn lại và lần thứ ba bán $\frac{2}{3}$ số gà còn lại sau hai lần bán. Cuối cùng nhà Mai còn lại 3 đôi gà. Hỏi đàn gà nhà Mai lúc đầu có bao nhiêu con?

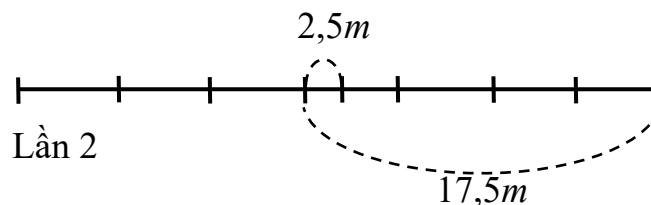
Bài 2.2. Bình có một số que tính, Bình cho An $\frac{2}{3}$ số que tính, cho Hùng $\frac{1}{3}$ số que tính thì còn lại 10 cái que tính. Hỏi lúc đầu Bình có bao nhiêu cái que tính?

Bài 2.3. Mẹ đi siêu thị mua kẹo về để ở trên bàn và viết giấy dặn ba con: “Mẹ cho mỗi con $\frac{1}{3}$ số kẹo” rồi đi làm. Đào đi học về lấy $\frac{1}{3}$ số kẹo bỏ túi rồi ra vườn nhỏ cỏ. Hà về sau tưởng mình là người đầu tiên nên cũng lấy $\frac{1}{3}$ số kẹo còn lại bỏ túi rồi sang nhà bạn xem cá cảnh. Cuối cùng, Hùng đi học về tưởng hai chị mình chưa về nên cũng lấy $\frac{1}{3}$ số kẹo còn lại rồi đi chơi. Mẹ đi làm về thấy trên bàn còn 16 cái kẹo. Hỏi mẹ đã mua tất cả bao nhiêu cái kẹo?

Bài toán 5: Một cửa hàng bán một tấm vải làm ba lần. Lần thứ nhất bán $\frac{1}{3}$ tấm vải thêm 5m. Lần thứ hai bán $\frac{3}{7}$ số vải còn lại thêm 2,5m. Lần thứ ba bán được 17,5 m thì vừa hết tấm vải. Hỏi tấm vải dài bao nhiêu mét?

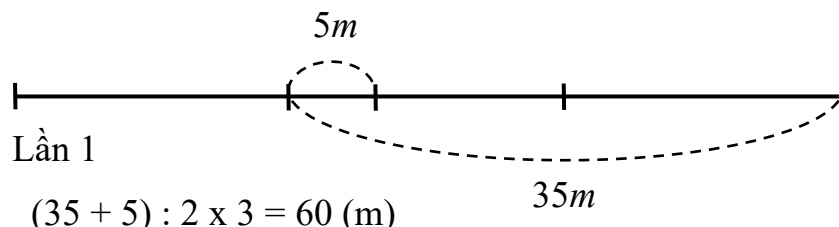
Bài giải:

Sau lần bán thứ hai tấm vải dài số mét là:



$$(17,5 + 2,5) : 4 \times 7 = 35 \text{ (m)}$$

Tấm vải dài số mét là:



$$(35 + 5) : 2 \times 3 = 60 \text{ (m)}$$

Đáp số: 60 m

➤ Từ bài toán 5, ta xây dựng một số bài toán:

Bài 2.4. Một cửa hàng bán một tấm vải 3 lần. Lần thứ nhất bán $\frac{1}{3}$ tấm vải thêm 8m. Lần thứ hai bán $\frac{3}{4}$ số vải còn lại thêm 3,5m. Lần thứ ba bán được 9,5 m thì vừa hết tấm vải. Hỏi tấm vải dài bao nhiêu mét?

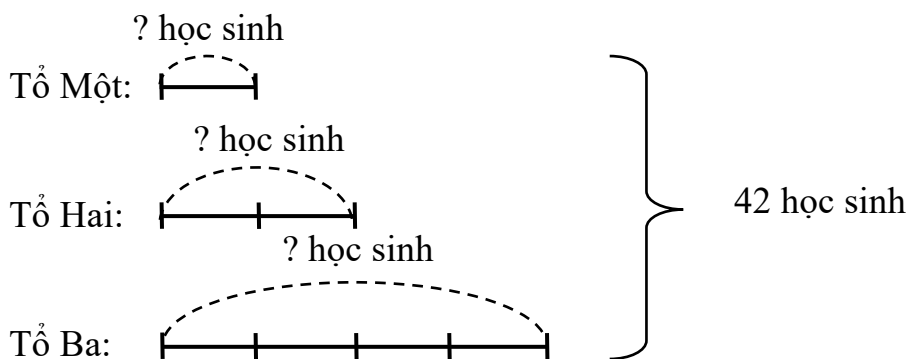
Bài 2.5. Một người bán cam, lần thứ nhất bán $\frac{1}{3}$ số cam và thêm 2 quả. Lần thứ hai, người đó bán $\frac{1}{2}$ số cam còn lại và thêm 1 quả. Lần thứ ba người đó bán $\frac{1}{2}$ số cam còn lại và 1 quả. Cuối cùng người đó còn lại 8 quả cam. Hỏi lúc đầu người đó có bao nhiêu quả cam.

Bài 2.6. Dì Mai đi chợ bán trứng, lần thứ nhất bán được $\frac{2}{3}$ số trứng, lần thứ hai bán được $\frac{3}{4}$ số trứng còn lại thêm $\frac{1}{4}$ quả. Lần thứ ba bán được 6 quả trứng thì vừa hết. Hỏi Dì Mai mang bao nhiêu trứng đi chợ bán?

Bài toán 6: Lớp 4A có 42 học sinh. Nếu chuyển 22 em của tổ Hai sang tổ Một, chuyển 3 em của tổ Hai sang tổ Ba và cuối cùng chuyển 8 em của tổ Một sang tổ Ba thì số học sinh còn lại của tổ Hai gấp đôi tổ Một và bằng nửa tổ Ba. Hỏi mỗi tổ lúc đầu có bao nhiêu học sinh?

Bài giải:

Theo đề bài, ta có sơ đồ biểu diễn số học sinh của ba tổ sau khi chuyển:



Số học sinh của tổ Một sau khi chuyển là:

$$42 : (1 + 2 + 4) = 6 \text{ (học sinh)}$$

Số học sinh của tổ Hai sau khi chuyển là:

$$6 \times 2 = 12 \text{ (học sinh)}$$

Số học sinh của tổ Ba sau khi chuyển là:

$$12 \times 2 = 24 \text{ (học sinh)}$$

Số học sinh của tổ Một lúc đầu là:

$$6 + 8 - 2 = 12 \text{ (học sinh)}$$

Số học sinh của tổ Hai lúc đầu là:

$$12 + 2 + 3 = 17 \text{ (học sinh)}$$

Số học sinh của tổ Ba lúc đầu là:

$$24 - 8 - 3 = 13 \text{ (học sinh)}$$

Đáp số: Tổ Một có 12 học sinh

Tổ Hai có 17 học sinh

Tổ Ba có 13 học sinh

➤ Từ bài toán 6, ta xây dựng một số bài toán:

Bài 2.7. Trong một buổi sinh hoạt câu lạc bộ Khoa học, có 56 bạn học sinh tham gia và được chia đều vào ba nhóm: nhóm Alpha, nhóm Beta và nhóm Gamma. Trong quá trình tổ chức hoạt động, ban tổ chức thực hiện điều chỉnh nhóm như sau: chuyển 5 bạn từ nhóm Beta sang nhóm Alpha, chuyển tiếp 3 bạn từ nhóm Beta sang nhóm Gamma, và chuyển 4 bạn từ nhóm Alpha sang nhóm Gamma. Sau khi chuyển xong, số bạn còn lại trong nhóm Beta gấp đôi

nhóm Alpha, và bằng một nửa số bạn trong nhóm Gamma. Hỏi ban đầu mỗi nhóm có bao nhiêu bạn?

Bài 2.8. Có hai can đựng tất cả 100l dầu. Nếu chuyển từ can thứ nhất sang can thứ hai 40l dầu, chuyển tiếp 30l dầu từ can thứ hai sang can thứ ba và chuyển từ can thứ hai sang can thứ nhất và can thứ ba lần lượt 10l và 20l thì số lít dầu ở can thứ hai gấp ba lần can thứ nhất và bằng một nửa can thứ ba. Hỏi lúc đầu mỗi can có bao nhiêu lít dầu?

Bài 2.9. Có ba hộp đựng bút chì. Bạn Luân lấy 8 chiếc bút chì từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai, chuyển 4 chiếc từ hộp thứ hai sang hộp thứ ba. Cuối cùng chuyển 2 cái từ hộp thứ ba sang hộp thứ nhất thì số bút ở hộp ba bằng $\frac{2}{3}$ số bút ở hộp thứ nhất và gấp đôi số bút ở hộp thứ hai. Biết rằng số bút ở cả ba hộp là 48 chiếc. Tính số bút ban đầu có trong mỗi hộp?

Bài 2.10. Một giá sách gồm ba ngăn có tất cả 210 cuốn sách. Nếu chuyển 20 cuốn sách từ ngăn thứ nhất sang ngăn thứ hai rồi chuyển 50 cuốn sách từ ngăn thứ hai sang ngăn thứ ba thì lúc này số sách ở ngăn thứ ba gấp đôi số sách ở ngăn thứ hai và số sách ở ngăn thứ hai gấp đôi số sách ở ngăn thứ nhất. Hỏi lúc đầu mỗi ngăn có bao nhiêu cuốn sách?

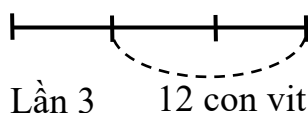
2.4.3. Thủ thuật thêm/ bớt yêu cầu cho bài toán

Bài toán 7: Nhà Lan nuôi một đàn vịt. Lần đầu mẹ Lan bán một nửa số vịt, lần thứ hai mẹ Lan bán tiếp một nửa số vịt còn lại và lần thứ ba bán $\frac{1}{3}$ số vịt còn lại sau hai lần bán. Cuối cùng nhà Lan còn lại 6 đôi vịt. Hỏi:

- a) Đàn vịt nhà Lan lúc đầu có bao nhiêu con?
- b) Đây là lần bán được số vịt nhiều nhất?

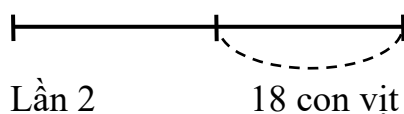
Bài giải:

- a) $6 \text{ đôi vịt} = 12 \text{ con vịt}$
Số vịt còn lại sau lần bán thứ hai là:



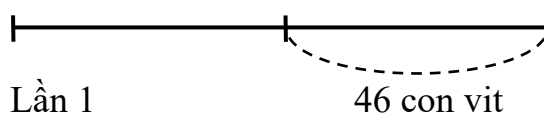
$$12 : 2 \times 3 = 18 \text{ (con vịt)}$$

Số vịt còn lại sau lần bán thứ nhất là:



$$18 : 1 \times 2 = 36 \text{ (con vịt)}$$

Đàn vịt nhà Lan lúc đầu có số con là:



$$36 : 1 \times 2 = 72 \text{ (con vịt)}$$

b) Số vịt bán được ở lần 1 là nhiều nhất.

Đáp số: a) 72 con vịt

b) Số vịt bán được ở lần 1 là nhiều nhất

➤ Từ bài toán 7, ta xây dựng một số bài toán:

Bài 3.1. (Bớt yêu cầu) Nhà Lan nuôi một đàn vịt. Lần đầu mẹ Lan bán một nửa số vịt, lần thứ hai mẹ Lan bán tiếp một nửa số vịt còn lại và lần thứ ba bán $\frac{1}{3}$ số vịt còn lại sau hai lần bán. Cuối cùng nhà Lan còn lại 6 đôi vịt. Hỏi đàn vịt nhà Lan lúc đầu có bao nhiêu con?

Bài 3.2. (Thêm yêu cầu) Nhà Lan nuôi một đàn vịt. Lần đầu mẹ Lan bán một nửa số vịt, lần thứ hai mẹ Lan bán tiếp một nửa số vịt còn lại và lần thứ ba bán $\frac{1}{3}$ số vịt còn lại sau hai lần bán. Cuối cùng nhà Lan còn lại 6 đôi vịt. Hỏi:

a) Đàn vịt nhà Lan lúc đầu có bao nhiêu con?

b) Nếu mẹ Lan không bán lần thứ ba, thì sau hai lần bán, mẹ Lan còn bao nhiêu con vịt? Số vịt còn lại này bằng mấy đôi vịt?

Bài 3.3. (Bớt/ Thêm yêu cầu) Nhà Lan nuôi một đàn vịt. Lần đầu mẹ Lan bán một nửa số vịt, lần thứ hai mẹ Lan bán tiếp một nửa số vịt còn lại và lần thứ ba bán $\frac{1}{3}$ số vịt còn lại sau hai lần bán. Cuối cùng nhà Lan còn lại 6 đôi vịt. Hỏi:

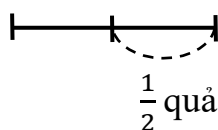
a) Đàn vịt nhà Lan lúc đầu có bao nhiêu con?

b) Nếu mỗi con vịt bán được 100 000 đồng, thì sau ba lần bán, mẹ Lan thu được bao nhiêu tiền?

Bài toán 8: Dì Út đi chợ bán trứng, lần thứ nhất bán được nửa số trứng và nửa quả, lần thứ hai bán được một nửa số trứng còn lại và nửa quả. Lần thứ ba bán được nửa số trứng còn lại và nửa quả thì vừa hết số trứng. Hỏi dì Út đã mang bao nhiêu trứng ra chợ bán?

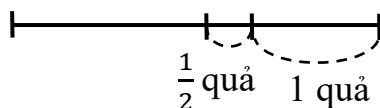
Bài giải:

Số trứng còn lại sau lần bán thứ hai là:



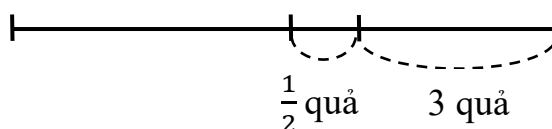
$$\frac{1}{2} \times 2 = 1 \text{ (quả)}$$

Số trứng còn lại sau lần bán thứ nhất là:



$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \times 2 = 3 \text{ (quả)}$$

Số trứng lúc đầu là:



$$\left(3 + \frac{1}{2}\right) \times 2 = 7 \text{ (quả)}$$

Đáp số: 7 quả

➤ **Từ bài toán 8, ta xây dựng một số bài toán:**

Bài 3.4. (Thêm yêu cầu) Dì Út đi chợ bán trứng, lần thứ nhất bán được nửa số trứng và nửa quả, lần thứ hai bán được một nửa số trứng còn lại và nửa quả. Lần thứ ba bán được nửa số trứng còn lại và nửa quả thì vừa hết số trứng. Hỏi:

- Dì Út đã mang bao nhiêu trứng ra chợ bán?
- Nếu dì Út đựng trứng trong các vỉ, mỗi vỉ 6 quả, thì lúc đầu dì Út cần bao nhiêu vỉ trứng?

Bài 3.5. (*Thêm yêu cầu*) Dì Út đi chợ bán trứng, lần thứ nhất bán được nửa số trứng và nửa quả, lần thứ hai bán được một nửa số trứng còn lại và nửa quả. Lần thứ ba bán được nửa số trứng còn lại và nửa quả thì vừa hết số trứng. Hỏi:

- a) Dì Út đã mang bao nhiêu trứng ra chợ bán?
- b) Nếu mỗi quả trứng bán được 5.000 đồng, thì tổng số tiền dì Út thu được sau ba lần bán là bao nhiêu?

Bài 3.6. (*Thêm yêu cầu*) Dì Út đi chợ bán trứng, lần thứ nhất bán được nửa số trứng và nửa quả, lần thứ hai bán được một nửa số trứng còn lại và nửa quả. Lần thứ ba bán được nửa số trứng còn lại và nửa quả thì vừa hết số trứng. Hỏi:

- a) Dì Út đã mang bao nhiêu trứng ra chợ bán?
- b) Sau lần bán thứ hai, dì Út được tặng thêm 1 quả trứng, hỏi dì Út mang bao nhiêu quả trứng ra chợ bán?

KẾT LUẬN CHƯƠNG II

Chương II đã trình bày chi tiết về việc ứng dụng phương pháp tính ngược từ cuối trong dạy học toán ở tiểu học. Qua các ví dụ và phân tích, ta có thể rút ra những điểm chính sau:

- Ứng dụng trong giải toán số học và toán có lời văn: Chương đã trình bày nhiều ví dụ minh họa cho việc áp dụng phương pháp này vào các dạng toán khác nhau, từ toán số học đơn giản đến các bài toán có lời văn phức tạp. Điều này cho thấy tính linh hoạt và khả năng áp dụng rộng rãi của phương pháp.
- Sáng tạo bài toán: Việc sáng tạo các bài toán mới dựa trên phương pháp tính ngược từ cuối không chỉ giúp học sinh làm quen với nhiều dạng bài khác nhau mà còn tạo ra sự hứng thú trong học tập. Các bài toán được thiết kế phù hợp với trình độ nhận thức của học sinh tiểu học, từ đó nâng cao hiệu quả dạy học.

Các bài toán được trình bày trong chương không chỉ có giá trị lý thuyết mà còn có ý nghĩa thực tiễn cao, góp phần nâng cao chất lượng dạy học môn Toán ở tiểu học. Với các ví dụ cụ thể và minh họa rõ ràng, cho thấy tính hiệu quả và linh hoạt của phương pháp tính ngược từ cuối trong việc giải các dạng toán số học, toán có lời văn, toán vui và toán cổ.

Tóm lại, chương II đã khẳng định vai trò quan trọng của phương pháp tính ngược từ cuối trong việc dạy học toán ở tiểu học, đồng thời mở ra hướng đi mới cho việc phát triển năng lực tư duy và kỹ năng giải toán cho học sinh.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Được sự đồng ý của nhà trường, em đã tiến hành nghiên cứu đề tài khóa luận tốt nghiệp: “*Ứng dụng phương pháp tính ngược từ cuối trong dạy học toán ở tiểu học*”. Trong quá trình nghiên cứu, đề tài đã đạt được các kết quả sau:

- Hệ thống hóa cơ sở lí luận về hoạt động giải toán và phát triển kĩ năng giải toán có nhiều bước cho học sinh tiểu học, đặc biệt tập trung vào phương pháp tính ngược từ cuối - một hướng tư duy hiệu quả trong giải toán.

- Trình bày ứng dụng của phương pháp tính ngược từ cuối trong giải toán số học, toán có lời văn, toán vui và toán cổ thông qua hệ thống bài tập phong phú.

- Xây dựng hệ thống bài tập minh họa kèm bài giải chi tiết cho từng dạng toán, đồng thời thiết kế các đề toán phù hợp nhằm rèn luyện tư duy và phát triển năng lực giải quyết vấn đề cho học sinh tiểu học.

Về cơ bản khóa luận đã đạt được các mục tiêu và hoàn thành các nhiệm vụ đặt ra khi tiến hành nghiên cứu. Đề tài là tài liệu tham khảo giúp các em học sinh tiểu học rèn luyện kĩ năng làm bài và giải các bài tập về tính ngược từ cuối, tài liệu tham khảo hữu ích cho sinh viên ngành Giáo dục Tiểu học trường Đại học Hoa Lư khi học các học phần tự chọn, và một số thầy cô đang giảng dạy ở các trường Tiểu học muốn nghiên cứu dạng toán này. Tuy nhiên, do là lần đầu nghiên cứu một vấn đề khoa học nên chắc chắn khóa luận còn có thiếu sót, em mong muốn nhận được các ý kiến đóng góp của các thầy cô để đề tài được hoàn thiện hơn.

Em xin chân thành cảm ơn!

DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Viện ngôn ngữ học (2005), *Từ điển Tiếng Việt*, Nxb Thành phố Hồ Chí Minh.
2. Bộ Giáo dục và Đào tạo (2018), *Chương trình Giáo dục Phổ thông Môn Toán*, Ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26 tháng 12 năm 2018 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo.
3. Trần Nam Dũng (Tổng chủ biên) - Khúc Thành Chính (Chủ biên) - Đinh Thị Xuân Dung - Nguyễn Kinh Đức - Đinh Thị Kim Lan - Huỳnh Thị Kim Trang (2023), *Toán 4, tập 1- tập 2*, Nxb Giáo dục Việt Nam.
4. Trần Nam Dũng (Tổng chủ biên) - Khúc Thành Chính (Chủ biên) - Đinh Thị Xuân Dung - Nguyễn Kinh Đức - Đinh Thị Kim Lan - Huỳnh Thị Kim Trang (2024), *Toán 5, tập 1- tập 2*, Nxb Giáo dục Việt Nam.
5. PGS.TS. Trần Diên Hiền (2009), *Phát triển kỹ năng giải toán cho học sinh tiểu học*, Nxb Giáo dục Việt Nam.
6. PGS.TS. Trần Diên Hiền (2011), *Giáo trình chuyên đề Rèn kỹ năng giải toán Tiểu học*, Nxb Đại học Sư phạm.
7. PGS.TS. Trần Diên Hiền (2014), *Giáo trình chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán Tiểu học*, Nxb Đại học Sư Phạm.
8. PGS.TS. Trần Diên Hiền (2018), *Bồi dưỡng Toán dành cho học sinh lớp 3*, Nxb Giáo dục Việt Nam.
9. PGS.TS. Trần Diên Hiền (2019), *10 Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán 4-5, Tập 1*, Nxb Giáo dục Việt Nam.
10. PGS.TS Trần Diên Hiền (2024), *Toán bồi dưỡng học sinh giỏi lớp 5 - Biên soạn theo Chương trình GDPT mới*, Nxb Đại học Quốc Gia Hà Nội.
11. Nguyễn Ngọc Giang (2017), *Phương pháp sáng tạo các bài toán Tiểu học, Tập 1*, Nxb Đại học Quốc gia Hà Nội.
12. Hà Huy Khoái (Tổng chủ biên) - Lê Anh Vinh (Chủ biên) - Nguyễn Áng - Vũ Văn Dương - Nguyễn Minh Hải - Hoàng Quế Hường - Bùi Bá Mạnh (2023), *Toán 4, tập 1 - tập 2*, Nxb Giáo dục Việt Nam.

13. Hà Huy Khoái (Tổng chủ biên) - Lê Anh Vinh (Chủ biên) - Nguyễn Áng - Vũ Văn Dương - Nguyễn Minh Hải - Hoàng Quế Hương - Bùi Bá Mạnh (2024), *Toán 5, tập 1 - tập 2*, Nxb Giáo dục Việt Nam.

14. Trần Ngọc Lan (2016), *Giáo trình thực hành phương pháp dạy học toán ở Tiểu học*, Nxb Đại học Sư phạm.

15. Nguyễn Bảo Minh - Lê Ngọc Yến (2024), *Toán nâng cao và bồi dưỡng học sinh giỏi lớp 5 - Nâng cao kiến thức ngoài chương trình trên lớp*, Nxb Đại học Quốc Gia Hà Nội.

16. Đỗ Đức Thái (2019), *Dạy học phát triển năng lực môn Toán Tiểu học*, Nxb Đại học Sư phạm.