

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH**



**ĐINH THỊ DƯƠNG QUỲNH**

**MỐI LIÊN HỆ GIỮA MIỀN HẠN CHẾ TRONG  
KHÔNG GIAN 2 - CHIỀU VÀ BAO LÒI CỦA TẬP  
HỮU HẠN ĐIỂM TRONG KHÔNG GIAN 3 - CHIỀU**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**NGHỆ AN - 2012**

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH**



**ĐINH THỊ DƯƠNG QUỲNH**

**MỐI LIÊN HỆ GIỮA MIỀN HẠN CHẾ TRONG  
KHÔNG GIAN 2 - CHIỀU VÀ BAO LÒI CỦA TẬP  
HỮU HẠN ĐIỂM TRONG KHÔNG GIAN 3 - CHIỀU**

Chuyên ngành: **HÌNH HỌC - TÔPÔ**

Mã số: **60.46.01.05**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

Người hướng dẫn khoa học

**PGS. TS. PHAN THÀNH AN**

**NGHỆ AN - 2012**

## MỤC LỤC

	Trang
<b>Lời nói đầu</b>	<b>2</b>
<b>Danh sách ký hiệu</b>	<b>5</b>
<b>1 Thuật toán gói quà tìm bao lồi của tập hữu hạn điểm trong không gian 3 - chiều</b>	<b>6</b>
1.1 Tập lồi, bao lồi .....	6
1.2 Điểm cực biên, cạnh cực biên .....	8
1.3 Đường thẳng và mặt phẳng trong $E^3$ .....	13
1.4 Thuật toán gói quà tìm bao lồi của tập hữu hạn điểm trong không gian 3 - chiều .....	17
<b>2 Môi liên hệ giữa miền hạn chế trong không gian 2 - chiều và bao lồi của tập hữu hạn điểm trong không gian 3 - chiều</b>	<b>26</b>
2.1 Miền hạn chế và mặt định hướng trong không gian 2 – chiều .....	26
2.2 Thuật toán tìm bao lồi của tập hữu hạn điểm trong không gian 3 - chiều bằng miền hạn chế trong không gian 2 - chiều .....	37
2.3 Kết quả tính toán .....	42
<b>Kết luận</b>	<b>44</b>
<b>Phụ lục</b>	<b>45</b>
<b>Tài liệu tham khảo</b> .....	<b>51</b>

## LỜI NÓI ĐẦU

Hình học tính toán là một lĩnh vực nghiên cứu để tìm ra các thuật toán hiệu quả và thực thi trên máy tính cho những bài toán được biểu diễn bằng ngôn ngữ hình học. Hình học tính toán thường giải quyết các bài toán kinh tế như: xác định địa điểm để đặt nhà máy, trạm điện, bến xe, trường học; xác định đường đi ngắn nhất cho tàu biển, lập trình cho rôbốt điện tử, ... Có rất nhiều nhà toán học nghiên cứu về Hình học tính toán, chẳng hạn như D. R. Chand (1970), P. McMullen (1971), R. L. Graham (1972), F. P. Preparata (1988), J. O'Rourke (1998), P. T. An (2007), ...

Bài toán thường gặp của Hình học tính toán là tìm bao lồi của tập hữu hạn điểm trong không gian 3 - chiều. Đây là một vấn đề được rất nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu, chẳng hạn như: D. R. Chand, S. S. Kapur, F. P. Preparata, M. L. Shamos, J. O'Rourke, P. T. An (xem [6], [10] và [11]), ... Năm 1970, D. R. Chand và S. S. Kapur đã đề xuất thuật toán gói quà để giải quyết bài toán này (xem [11]). Các thuật toán xác định bao lồi chạy với thời gian trung bình là  $O(n \log n)$ , ví dụ như thuật toán chia để trị và thuật toán tăng dần ngẫu nhiên (xem [10]). Tuy nhiên, trong thực nghiệm tính toán đã chỉ ra rằng trong trường hợp xấu nhất những thuật toán này chạy với thời gian là  $O(n^2)$  chứ không phải là  $O(n \log n)$ . Đó là lý do tại sao trong thực tế, chúng ta thường sử dụng thuật toán gói quà chạy với thời gian là  $O(nk)$ , trong đó  $n$  là số điểm,  $k$  là số mặt của bao lồi (xem [10], [11]).

Một hướng tiếp cận mới để tìm bao lồi đã được giới thiệu trong [5]. Dựa trên ý tưởng của phương pháp mặt định hướng, năm 2011, P. T. An và L. H. Trang đã đưa ra thuật toán hiệu quả tìm bao lồi của tập hữu hạn điểm trong

không gian 3 - chiều với điều kiện được hạn chế ([6]). Trong thuật toán này, bao lồi được tạo thành bởi các mặt, một trong số những mặt này là mặt định hướng được xác định từ miền hạn chế của bộ điểm phân bố đều trong mặt phẳng.

Trong luận văn này, chúng tôi trình bày một cách tường minh các kết quả trong bài báo [6] của P. T. An và L. H. Trang. Do đó luận văn có tên là **”Mối liên hệ giữa miền hạn chế trong không gian 2 - chiều và bao lồi của tập hữu hạn điểm trong không gian 3 - chiều”**.

Bố cục của luận văn gồm 2 chương.

### **Chương 1. Thuật toán gói quà tìm bao lồi của tập hữu hạn điểm trong không gian 3 - chiều**

Trong chương này, chúng tôi trình bày khái quát một số kiến thức là cơ sở cho nội dung của chương sau, bao gồm:

- *Định nghĩa tập lồi, bao lồi, điểm cực biên, cạnh cực biên của bao lồi và một số tính chất cơ bản.*
- *Thuật xác định cạnh cực biên của bao lồi trong mặt phẳng và đưa ra ví dụ minh họa.*
- *Một số tính chất của đường thẳng và mặt phẳng trong  $E^3$ .*
- *Thuật toán gói quà tìm bao lồi của tập hữu hạn điểm trong không gian 3 - chiều và đưa ra ví dụ minh họa.*

### **Chương 2. Mối liên hệ giữa miền hạn chế trong không gian 2 - chiều và bao lồi của tập hữu hạn điểm trong không gian 3 - chiều**

Nội dung chính của luận văn được trình bày trong chương này, bao gồm:

- *Định nghĩa và tính chất của miền hạn chế và mặt định hướng trong không gian 2 - chiều.*
- *Thuật xác định mặt định hướng.*

- *Thuật toán tìm bao lồi của tập hữu hạn điểm trong không gian 3 - chiều sử dụng miền hạn chế trong không gian 2 - chiều và đưa ra ví dụ minh họa.*
- *Một số kết quả tính toán.*

Luận văn được hoàn thành vào tháng 09 năm 2012 tại Trường Đại học Vinh, dưới sự hướng dẫn tận tình, chu đáo của Thầy giáo, PGS. TS Phan Thành An. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy, người đã chỉ dạy tác giả những kiến thức, kinh nghiệm trong học tập và nghiên cứu khoa học.

Nhân dịp này, tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới PGS. TS. Nguyễn Hữu Quang, PGS. TS. Phạm Ngọc Bội, PGS. TS. Nguyễn Huỳnh Phán, TS. Nguyễn Duy Bình, các thầy cô giáo trong Khoa Toán và các thầy cô giáo trong phòng Đào tạo Sau đại học Trường Đại học Vinh đã quản lý, nhiệt tình giảng dạy và giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập, cũng như nghiên cứu hoàn thành luận văn.

Đồng thời, tác giả xin gửi lời cảm ơn chân thành đến anh Lê Hồng Trang, em Đinh Thanh Giang, em Đồng Văn Việt, các cán bộ phòng Giải tích số và Tính toán Khoa học và các Thầy giáo trong Viện Toán học đã giúp đỡ tác giả trong quá trình nghiên cứu hoàn thành luận văn.

Cuối cùng, tác giả xin gửi lời cảm ơn tới ban Giám hiệu Trường Đại học Hoa Lư, tập thể lớp K18 Hình học – Tôpô, gia đình, bạn bè và đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong suốt thời gian học tập và quá trình hoàn thành luận văn.

*Nghệ An, tháng 09 năm 2012*

**Tác giả**

## DANH SÁCH KÝ HIỆU

$\mathbf{E}^3$	: Không gian Euclid 3 - chiều.
$\mathbf{R}$	: Tập các số thực.
$\text{conv} P$	: Bao lồi của tập $P$ .
$\varepsilon(P)$	: Tập các cạnh cực biên của bao lồi $\text{conv} P$ .
$f(a, b, p)$	: Mặt phẳng qua ba điểm $a, b, p$ .
$\widetilde{(a, b, p)}$	: Miền hạn chế của mặt phẳng $(a, b, p)$ .
$\Delta$	: Tam giác.
$ \vec{a} $	: Module của vectơ $\vec{a}$ .
$[a, b]$	: Đường thẳng có hướng từ $a$ đến $b$ .
$\vec{ab} \times \vec{ap}$	: Tích có hướng của hai vectơ $\vec{ab}$ và $\vec{ap}$ .
$\phi$	: Tập rỗng.
$\sphericalangle$	: Góc phẳng.
$\square$	: Kết thúc chứng minh.

# CHƯƠNG 1

## THUẬT TOÁN GÓI QUÀ TÌM BAO LÒI CỦA TẬP HỮU HẠN ĐIỂM TRONG KHÔNG GIAN 3 - CHIỀU

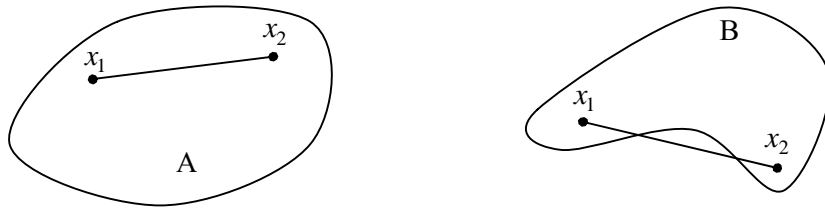
Với mọi  $p, q \in \mathbf{E}^3$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ , kí hiệu  $[p, q] := \{(1 - \lambda)p + \lambda q \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ .

Trong chương này, chúng tôi luôn giả thiết rằng, tập hợp điểm được xét không nằm trên cùng một đường thẳng hoặc một mặt phẳng và không có bốn điểm nào thuộc cùng một mặt phẳng.

### 1.1 Tập lồi, bao lồi

**Định nghĩa 1.1.** (xem [14]) Một tập  $A \subset \mathbf{E}^3$  được gọi là *tập lồi* nếu với mọi  $x_1, x_2 \in A$  thì đoạn thẳng  $[x_1, x_2] \subset A$ .

Hình 1. cho ví dụ về tập lồi và tập không lồi.



Hình 1. Tập A lồi, tập B không lồi

**Ví dụ 1.2.** Các hình tam giác, hình tròn trong mặt phẳng; các nửa không gian là các tập lồi.

**Nhận xét 1.3.** Giao của một họ bất kỳ các tập lồi là tập lồi, tuy nhiên hợp của một họ các tập lồi chưa chắc đã là tập lồi.



**Định nghĩa 1.4.** (xem [3]) Một tổ hợp lồi của  $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbf{E}^3$  là một tổng có dạng  $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ , với mọi  $\lambda_i \geq 0$  ( $i = \overline{1, k}$ ) và  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ .

**Mệnh đề 1.5.** (xem [3]) Giả sử  $A \subset \mathbf{E}^3$  là tập lồi và  $x_1, x_2, \dots, x_m \in A$ . Khi đó, với mọi  $\lambda_i \in \mathbf{R}$ ,  $\lambda_i \geq 0$  ( $i = \overline{1, m}$ ) sao cho  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$  thì  $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in A$ .

*Chứng minh:*

Chúng tôi chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Nếu  $m = 2$ , với  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ;  $x_1, x_2 \in A$ , theo Định nghĩa 1.1, chúng ta luôn có  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A$ . Giả sử mệnh đề đúng với  $m = k$ ,  $\forall k \geq 2$ , chúng ta cần chứng minh mệnh đề đúng với  $m = k + 1$ , nghĩa là, với  $x_1, x_2, \dots, x_{k+1} \in A$ , mọi  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\lambda_i \in \mathbf{R}$  ( $i = \overline{1, k+1}$ ) và  $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$  thì  $x := \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i \in A$ .

Không mất tính tổng quát, giả sử  $0 \leq \lambda_{k+1} < 1$  (vì nếu  $\lambda_{k+1} = 1$  thì từ  $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$  và  $\lambda_i \geq 0$  ( $i = \overline{1, k+1}$ ) suy ra  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ , do đó  $x = x_{k+1} \in A$ ). Khi đó, chúng ta có  $1 - \lambda_{k+1} = \lambda_1 + \dots + \lambda_k > 0$ . Suy ra  $\frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} \geq 0$  ( $i = \overline{1, k}$ ).

Vì  $1 = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{k+1}} + \dots + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{k+1}} = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}}$  nên theo giả thiết quy nạp, chúng

tôi đặt  $y := \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} x_i \in A$ .

Vậy với  $y, x_{k+1} \in A$ ,  $1 - \lambda_{k+1} > 0$  và  $(1 - \lambda_{k+1}) + \lambda_{k+1} = 1$ , chúng ta có

$$x = (1 - \lambda_{k+1})y + \lambda_{k+1}x_{k+1} \in A. \quad \square$$

**Định nghĩa 1.6.** (xem [14]) Cho tập  $P \subset \mathbf{E}^3$ . Khi đó, giao của tất cả các tập lồi chứa  $P$  gọi là bao lồi của  $P$ , kí hiệu là  $\text{conv } P$ .

**Nhận xét 1.7.** (xem [14])

- (i)  $\text{conv}P$  là tập lồi nhỏ nhất chứa  $P$ .
- (ii)  $P$  là tập lồi khi và chỉ khi  $\text{conv}P = P$ .

**Định lý 1.8. (Định lý Caratheodory trong  $E^3$ )** (xem [3])

Bao lồi của tập  $P \subset E^3$  là tập tất cả các tổ hợp lồi của không quá bốn điểm của  $P$ .

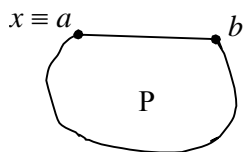
**Mệnh đề 1.9.** (xem[2]) Bao lồi của họ hữu hạn điểm  $A$  trong  $E^2$  là hình đa giác lồi, trong đó các đỉnh của hình đa giác lồi thuộc  $A$  chính là điểm cực biên của  $\text{conv}A$  và chỉ có các điểm cực biên đó mà thôi.

**Mệnh đề 1.10.** ([9]) Bao lồi của họ hữu hạn điểm  $P$  trong  $E^3$  là hình đa diện lồi, trong đó các mặt của hình đa diện lồi có các đỉnh thuộc  $P$  chính là mặt cực biên của  $\text{conv}P$  và chỉ có các mặt cực biên đó mà thôi.

**Nhận xét 1.11.** (xem [11]) Một khối đa diện lồi được mô tả bằng biên gồm các mặt, các cạnh và các đỉnh.

## 1.2 Điểm cực biên, cạnh cực biên

**Định nghĩa 1.12.** (xem [8]) Cho tập lồi  $P \subset E^3$ , điểm  $x \in P$  được gọi là *điểm cực biên* của tập  $P$  nếu  $x \in [a, b]$ ; với mọi  $a, b \in P$  thì  $x \equiv a$  hoặc  $x \equiv b$  (xem hình 2).



Hình 2.  $x$  là điểm cực biên của tập  $P$

**Ví dụ 1.13.** Trong  $E^2$ , nếu  $A$  là một đoạn thẳng, một hình tam giác thì các điểm cực biên của nó tương ứng là hai đầu mút, các đỉnh của tam giác. Trong  $E^3$ , nếu  $P$  là một hình hộp chữ nhật, một hình tứ diện thì các điểm cực biên của nó tương ứng là các đỉnh của hình hộp chữ nhật, các đỉnh của tứ diện. Chú ý rằng tập hợp các điểm cực biên của một tập lồi không phải bao giờ cũng hữu hạn, chẳng hạn như khi  $P$  là một hình cầu thì mọi điểm nằm trên biên của nó đều là điểm cực biên của hình cầu đó.

**Định nghĩa 1.14.** (xem [10]) Cho  $a, b \in A$ .  $[a, b]$  được gọi là *cạnh cực biên* của khối đa diện lồi  $\text{conv} A$  nếu tồn tại một mặt phẳng đi qua đường thẳng  $ab$  sao cho mọi điểm của  $A$  nằm về một phía của mặt phẳng này.

**Định nghĩa 1.15.** (xem [6]) Mặt phẳng  $F$  được gọi là *mặt cực biên* của  $\text{conv} P$  nếu  $\text{conv} P$  nằm trong một phía của mặt phẳng  $F$  và phía kia là hoàn toàn rỗng.

**Nhận xét 1.16.**

- (i) Các điểm trong của bao lồi không phải là điểm cực biên của bao lồi.
- (ii) Một điểm là điểm cực biên của  $\text{conv} A$  nếu tồn tại một đường thẳng đi qua điểm đó mà ngoài điểm đó nó không cắt  $\text{conv} A$ .
- (iii) Một mặt  $F$  là mặt cực biên của  $\text{conv} P$  nếu tồn tại một mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa  $F$  mà ngoài mặt  $F$  thì  $(\alpha)$  không cắt  $\text{conv} P$ .

**Định nghĩa 1.17.** (xem [6]) Trong mặt phẳng  $Oyz$ , cho ba điểm  $p = (0, p_y, p_z)$ ,  $q = (0, q_y, q_z)$ ,  $t = (0, t_y, t_z)$ . Lấy

$$S = (q_y - p_y)(t_z - p_z) - (t_y - p_y)(q_z - p_z). \quad (1)$$

Trong không gian 3 - chiều, nhìn mặt phẳng  $Oyz$  từ phía  $x \approx +\infty$  và nhìn trục  $Oy$  từ phải sang trái, gọi  $t$  là *điểm nằm bên trái* (tương ứng, *nằm trên*, *nằm*

bên phải) của đường thẳng có hướng  $pq$  từ  $p$  đến  $q$  nếu  $S > 0$  (trùng,  $S = 0$ ,  $S < 0$ ).

**Quy ước 1.18.** Để cho đơn giản, chúng tôi quy ước phía bên trái cạnh định hướng là phần bên trong của tập  $A$ .

## Thủ tục xác định cạnh cực biên của bao lồi trong mặt phẳng

### Bài toán

**Cho:**  $A = \{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\} \subset \mathbf{E}^2$ ,  $n \geq 4$ .

(Trong  $A$  không có ba điểm nào thẳng hàng, ...).

**Tìm:** Các cạnh cực biên của bao lồi  $\text{conv } A$ .

### Mô tả thủ tục (xem [10])

Bởi vì cạnh cực biên đi qua điểm cực biên, do đó chúng ta có thể tìm cạnh cực biên từ các điểm cực biên, cũng có thể dựa vào định nghĩa cạnh cực biên: nếu  $[a, b]$  là cạnh cực biên của  $\text{conv } A$  thì mọi điểm của  $A$  nằm về một phía của đường thẳng đi qua  $[a, b]$ . Có thể mô tả thủ tục như sau.

- Lấy hai điểm  $p_i, p_j$  tùy ý thuộc hệ điểm  $A = \{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\} \subset \mathbf{E}^2$  đã cho.

- Lấy điểm  $p_l \in A \setminus \{p_i, p_j\}$ .

+ Nếu tất cả các điểm  $p_l$  nằm bên trái hoặc nằm trên  $[p_i, p_j]$  thì  $[p_i, p_j]$  là một cạnh cực biên của  $\text{conv } A$ .

+ Nếu có một điểm  $p_l$  nằm bên phải  $[p_i, p_j]$  thì  $[p_i, p_j]$  không là cạnh cực biên của  $\text{conv } A$ .

Dựa vào hai tính chất này, Thủ tục 1 bên dưới được xây dựng để kiểm tra xem một cạnh có phải là cạnh cực biên của  $\text{conv } A$  hay không.

**Thủ tục 1: Xác định cạnh cực biên** (xem [10])

1. **for** mỗi một  $i$  **do**
2.     **for** mỗi một  $j \neq i$  **do**
3.         **for** mỗi một  $l \neq j \neq i$  **do**
4.             **if** với mọi  $p_l$  nằm bên trái (hoặc nằm trên)  $[p_i, p_j]$  **then**
5.                  $[p_i, p_j]$  là cạnh cực biên của  $\text{conv } A$
6.             **end if**
7.         **end for**
8.     **end for**
9. **end for.**

**Ví dụ 1.19.** Cho  $A = \{p_0(1;2), p_1(2;8), p_2(4;17), p_3(2;20), p_4(-2;13), p_5(-3;13)\} \in \mathbf{E}^2$ .

Tìm các cạnh cực biên của  $\text{conv } A$ .

Dựa vào Thủ tục 1, quá trình tìm cạnh cực biên của  $\text{conv } A$  được thực hiện như sau.

- Tại điểm  $p_0$ , ta có các cạnh  $[p_0, p_1], [p_0, p_2], [p_0, p_3], [p_0, p_4], [p_0, p_5]$ .

+ Xét vị trí các điểm  $p_2, p_3, p_4, p_5$  với  $[p_0, p_1]$ . Áp dụng công thức (1), tại điểm  $p_2$  chúng tôi có  $S_2 = (2-1)(17-2) - (4-1)(8-2) = -3 < 0$ . Do đó,  $p_2$  nằm bên phải  $[p_0, p_1]$ . Vậy  $[p_0, p_1]$  không là cạnh cực biên của  $\text{conv } A$ .

+ Xét vị trí các điểm  $p_1, p_3, p_4, p_5$  với  $[p_0, p_2]$ . Tương tự, chúng tôi kết luận được  $p_1, p_3, p_4, p_5$  nằm bên trái  $[p_0, p_2]$ . Vậy  $[p_0, p_2]$  là cạnh cực biên của  $\text{conv } A$ .

+ Xét vị trí các điểm  $p_1, p_2, p_4, p_5$  với  $[p_0, p_3]$ . Tương tự, chúng tôi kết luận được  $p_1, p_2$  nằm bên phải  $[p_0, p_3]$ . Vậy  $[p_0, p_3]$  không là cạnh cực biên của  $\text{conv } A$ .

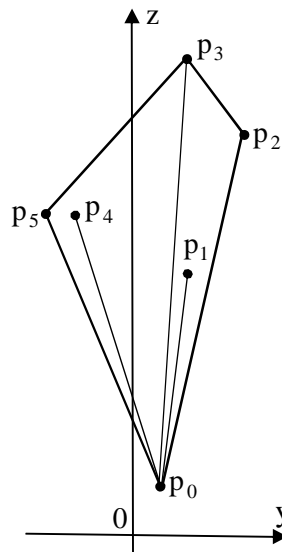
+ Xét vị trí các điểm  $p_1, p_2, p_3, p_5$  với  $[p_0, p_4]$ . Tương tự, chúng tôi kết luận được  $p_1, p_2, p_3$  nằm bên phải  $[p_0, p_4]$ . Vậy  $[p_0, p_4]$  không là cạnh cực biên của  $\text{conv } A$ .

+ Xét vị trí các điểm  $p_1, p_2, p_3, p_4$  với  $[p_0, p_5]$ . Tương tự, chúng tôi kết luận được  $p_1, p_2, p_3, p_4$  nằm bên phải  $[p_0, p_5]$ . Vậy  $[p_0, p_5]$  không là cạnh cực biên của  $\text{conv } A$ .

Do đó,  $[p_0, p_2]$  là cạnh cực biên của  $\text{conv } A$ .

- Tương tự, tại các điểm  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$ , chúng tôi kết luận được  $[p_2, p_3]$ ,  $[p_3, p_5]$ ,  $[p_5, p_0]$  là các cạnh cực biên tiếp theo của  $\text{conv } A$ .

Vậy các cạnh cực biên của  $\text{conv } A$  là  $[p_0, p_2]$ ,  $[p_2, p_3]$ ,  $[p_3, p_5]$ ,  $[p_5, p_0]$  (xem hình 3).



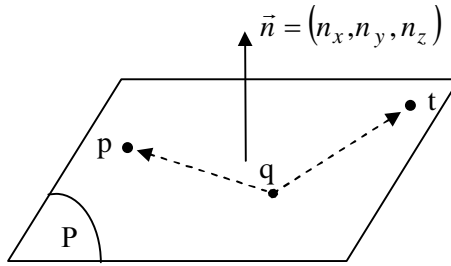
Hình 3. Hình minh hoạ cho ví dụ 1.19

### 1.3 Đường thẳng và mặt phẳng trong $\mathbf{E}^3$

Giả sử, mặt phẳng  $P$  đi qua ba điểm độc lập  $p = (p_x, p_y, p_z)$ ,  $q = (q_x, q_y, q_z)$  và  $t = (t_x, t_y, t_z)$ . Như chúng ta đã biết, phương trình mặt phẳng  $P$  có dạng

$$xn_x + yn_y + zn_z - d = 0$$

ở đây,  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$  là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng  $P$  (xem hình 4). Rõ ràng  $d := n_x q_x + n_y q_y + n_z q_z$ . Với  $w = (w_x, w_y, w_z) \in P$  và  $n_z \neq 0$  đặt  $w_z^* := \frac{d - n_x w_x - n_y w_y}{n_z}$  thì  $w^* := (w_x, w_y, w_z^*) \in P$ . Khi đó, nếu  $w_z > w_z^*$  (tương ứng,  $w_z < w_z^*$ ) thì  $w$  được gọi là nằm phía trên (tương ứng, phía dưới) mặt phẳng  $P$ . Chúng tôi ký hiệu  $pq$  (tương ứng,  $[p, q]$ ) là đường thẳng (tương ứng, đoạn thẳng) có hướng từ  $p$  đến  $q$ .

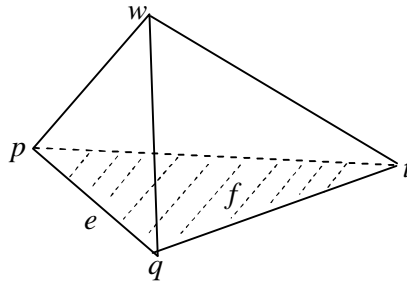


Hình 4.  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$  là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng  $P$

Cho các điểm  $p, q, t, w \in \mathbf{E}^3$ , đặt  $V := V(p, q, t, w) = \begin{vmatrix} p_x & p_y & p_z & 1 \\ q_x & q_y & q_z & 1 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \\ w_x & w_y & w_z & 1 \end{vmatrix}$ . (2)

Khi đó,  $V > 0$  khi và chỉ khi  $p, q, t$  tạo thành một vòng quay ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ phía  $w$  (xem [10]). (3)

Trong trường hợp này, chúng tôi nói  $w$  nằm phía dương của mặt phẳng qua ba điểm  $p, q, t$  (xem hình 5) (nếu ba điểm này tạo thành một vòng quay ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ phía  $w$ ) và ký hiệu mặt phẳng  $f$  bởi  $f(p, q, t)$  (xem [10], [11]). Do đó,  $f(p, q, t) = f(q, t, p) = f(t, p, q)$  và  $f(p, q, t) \neq f(p, t, q)$ .



Hình 5.  $w$  nằm phía dương của mặt  $f(p, q, t)$

Cho  $P$  là tập hữu hạn điểm trong  $\mathbf{E}^3$ . Khi đó, bao lồi  $\text{conv}P$  của tập  $P$  là một khối đa diện lồi ([9]). Một khối đa diện lồi được mô tả bằng biên gồm các mặt, các cạnh và các đỉnh (xem [11]). Nếu không có bốn điểm nào của  $P$  đồng phẳng thì mọi mặt của  $\text{conv}P$  là các tam giác. Gọi  $f$  là một mặt tam giác của  $\text{conv}P$  và cho  $p, q, t$  là ba đỉnh của  $f$ , khi đó, mặt  $f$  có một sự định hướng với ý nghĩa  $\text{conv}P$  nằm trong một phía của mặt phẳng chứa  $f$  và phía kia là hoàn toàn rỗng. Từ (3), giả sử  $V > 0$  với mọi  $w \in P \setminus \{p, q, t\}$ . Chúng tôi ký hiệu mặt  $f$  bởi mặt  $f(p, q, t)$ , hoặc mặt  $f(e, t)$ , với  $e := [p, q]$ . Do đó, giả sử  $[p, q]$  là cạnh của  $\text{conv}P$ , để xác định ba điểm  $p, q, t \in P$  có tạo thành một mặt của  $\text{conv}P$  hay không chúng tôi sẽ kiểm tra xem  $w$  có nằm phía dương của mặt  $f(p, q, t)$ , với mọi  $w \in P \setminus \{p, q, t\}$  hay không, tức là  $V > 0$ , với mọi  $w \in P \setminus \{p, q, t\}$  (xem [12]).



Trong luận văn này, chúng tôi không trình bày vấn đề giải quyết dạng suy biến như các điểm có tọa độ  $x, y$  trùng nhau, ba điểm thẳng hàng, bốn điểm đồng phẳng.

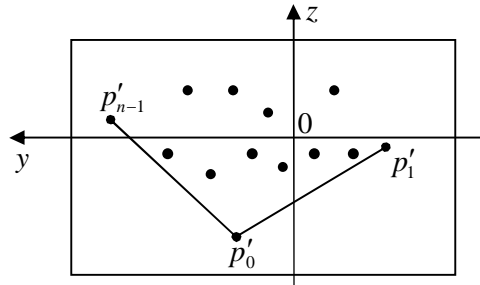
Gọi  $P = \{p_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}^3, i = 0, 1, \dots, n-1\}$ ,  $n \geq 4$ . Đặt

$$x_{\max} := \max \{x : (x, y, z) \in P\}, \quad x_{\min} := \min \{x : (x, y, z) \in P\}, \quad y_{\max} := \max \{y : (x, y, z) \in P\},$$

$$y_{\min} := \min \{y : (x, y, z) \in P\}, \quad z_{\max} := \max \{z : (x, y, z) \in P\}, \quad z_{\min} := \min \{z : (x, y, z) \in P\}$$

và  $P' = \{p'_0, p'_1, \dots, p'_{n-1}\}$  với  $p'_i = (0, y_i, z_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  ( $P'$  là hình chiếu của  $P$  theo phương song song với trục  $Ox$  xuống mặt phẳng  $Oyz$ ). Vì  $P$  được chứa trong hình hộp chữ nhật có các mặt xung quanh là  $x = x_{\max}$ ,  $x = x_{\min}$ ,  $y = y_{\max}$ ,  $y = y_{\min}$ ,  $z = z_{\max}$ ,  $z = z_{\min}$ , do đó chúng ta có

$$\text{conv } P \subset \{(x, y, z) : x_{\min} \leq x \leq x_{\max}; y_{\min} \leq y \leq y_{\max}; z_{\min} \leq z \leq z_{\max}\}.$$



Hình 6. Biểu diễn vị trí của các điểm  $p'_0, p'_1, p'_{n-1}$  trong mặt  $Oyz$

Giả sử  $m\bar{n}\bar{m}$  là một mặt của hình hộp chữ nhật, với  $\bar{n}, \bar{m}$  là giao của mặt  $x = x_{\max}$  và mặt  $z = z_{\min}$ ,  $n, m$  là giao của mặt  $x = x_{\max}$  và mặt  $z = z_{\max}$ . Vì  $P' \subset \{(0, y, z) : y_{\min} \leq y \leq y_{\max}, z_{\min} \leq z \leq z_{\max}\}$  nên  $P'$  nằm trong mặt phẳng  $Oyz$ . Trong không gian 3 - chiều, chúng tôi nhìn mặt phẳng  $Oyz$  từ phía  $x \approx +\infty$  và trục  $Oy$  từ phải sang trái. Chọn các điểm  $p'_0, p'_1, p'_{n-1} \in P'$  sao cho trên mặt phẳng  $Oyz$ , tìm điểm thấp nhất ở bên phải của  $P'$ , đặt là  $p'_0$ ; lấy  $p'_1$  (tương

ứng,  $p'_{n-1}$ ) sao cho các điểm khác của  $P'$  ở bên trái của  $p'_0 p'_1$  (tương ứng,  $p'_{n-1} p'_0$ ). (4)

(xem hình 6). Vì  $[p_0, p_1]$  (tương ứng,  $[p_0, p_{n-1}]$ ) là cạnh của bao lồi  $\text{conv}P$ , khi đó, nếu  $p_{0x} \geq 0 = p'_{0x}$  thì  $p_i$  ( $i \geq 2$ ) nằm phía dương của mặt  $f(p'_0, p_1, p_0)$ ; nếu  $p_{0x} < 0 = p'_{0x}$  thì  $p_i$  ( $i \geq 2$ ) nằm phía dương của mặt  $f(p'_0, p_0, p_1)$ .

**Mệnh đề 1.20.** (xem [10]) Giả sử  $P = \{p_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}^3, i = 0, 1, \dots, n-1\}$ ,  $n \geq 4$ . Trong mặt phẳng  $Oyz$ , các điểm  $p_0, p_1, p_{n-1}$  được xác định bởi (4). Khi đó,  $[p_0, p_1]$  và  $[p_0, p_{n-1}]$  là các cạnh của  $\text{conv}P$ .

Trong luận văn này, chúng tôi sử dụng  $[p_0, p_1]$  được xác định bởi (4) là cạnh đầu tiên của bao lồi  $\text{conv}P$  trong các thuật toán.

**Mệnh đề 1.21.** (xem [6]) Giả sử  $P = \{p_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}^3, i = 0, 1, \dots, n-1\}$ ,  $n \geq 4$ , ba điểm  $a, b, p$  là các điểm phân biệt trong  $P$ ,  $(a, b, p)$  cắt  $mn$  và  $\bar{m}\bar{n}$  tương ứng tại  $u$  và  $\bar{u}$ . Gọi  $a', b', p', u_p, \bar{u}_p$  là hình chiếu tương ứng của  $a, b, p, u, \bar{u}$  theo phương song song với trục  $Ox$  xuống mặt phẳng  $Oyz$ . Khi đó, trên mặt phẳng  $Oyz$ , các điểm  $a', b', p'$  nằm cùng phía với đường thẳng định hướng  $\bar{u}_p u_p$  (có thể nằm trên đường thẳng  $\bar{u}_p u_p$ ).

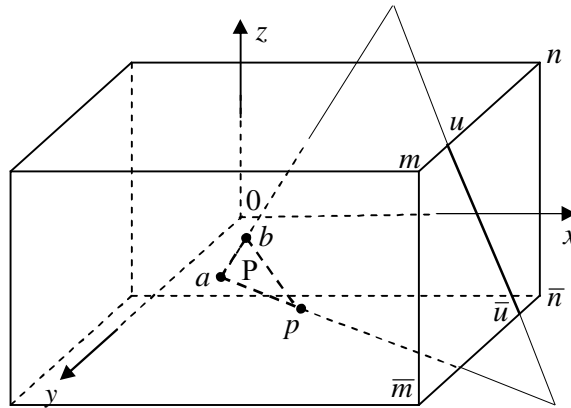
*Chứng minh:*

Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng chứa đường thẳng  $\bar{u}u$ . Suy ra  $(\alpha) := (a, b, p)$ . Vì  $\bar{u}u$  là giao của mặt  $x = x_{\max}$  với  $P$  được chứa trong hình hộp chữ nhật có các mặt xung quanh là  $x = x_{\max}$ ,  $x = x_{\min}$ ,  $y = y_{\max}$ ,  $y = y_{\min}$ ,  $z = z_{\max}$ ,  $z = z_{\min}$ . Do đó, hình chữ nhật  $mn\bar{n}\bar{m}$  là tập  $\{(x_{\max}, y, z) : y_{\min} \leq y \leq y_{\max}; z_{\min} \leq z \leq z_{\max}\}$ . Suy ra  $mn\bar{n}\bar{m}$  song song với  $Oyz$ . Mặt khác ta có,  $(a, b, p)$  giao với  $mn\bar{n}\bar{m}$  tại  $\bar{u}u$  (xem

hình 7). Do đó,  $a, b, p$  nằm cùng phía với đường thẳng  $\bar{u}u$ . Từ đây suy ra  $a', b', p'$  nằm cùng phía với đường thẳng  $u_p \bar{u}_p$ .  $\square$

Chú ý, nếu  $(a, b, p)$  vuông góc với  $m\bar{n}\bar{m}$  thì  $a', b', p' \in [u_p, \bar{u}_p]$ .

Trong không gian 3 - chiều, hình hộp chữ nhật chứa tất cả các điểm của P có thể được coi là biên. Trong trường hợp đặc biệt, hình hộp chữ nhật có các mặt xung quanh là  $x = x_{\max}$ ,  $x = x_{\min}$ ,  $y = y_{\max}$ ,  $y = y_{\min}$ ,  $z = z_{\max}$ ,  $z = z_{\min}$  được coi là biên của  $\text{conv}P$ . Giả sử  $\text{conv}P$  được xác định trong thuật toán gói quà (*xem [11]*) với cạnh đầu tiên  $[p_0, p_1]$  được xác định trong (4). Một miền hạn chế sẽ được xác định trong biên.



Hình 7. Mặt  $(a, b, p)$  cắt hình chữ nhật  $m\bar{n}\bar{m}$  tại  $\bar{u}u$

#### 1.4 Thuật toán gói quà tìm bao lồi của tập hữu hạn điểm trong không gian 3 - chiều

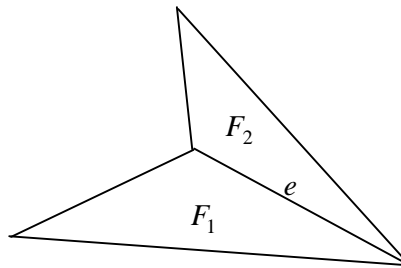
Năm 1970, D. R. Chand và S. S. Kapur đã đưa ra thuật toán gói quà tìm bao lồi của tập hữu hạn điểm trong không gian 3 - chiều (*xem [11]*). Cơ sở

của ý tưởng là xuất phát từ một cạnh cực biên của bao lồi, tìm mặt đầu tiên chứa cạnh này; sau đó, từ mặt đầu tiên tìm các mặt liền kề với nó; tiếp tục như thế tìm các mặt tiếp theo cho đến khi tất cả các mặt này bao xung quang tập hợp điểm. Chúng ta giả thiết rằng khối đa diện là đơn hình.

**Định nghĩa 1.22.** (xem [11]) Một khối đa diện được gọi là *đơn hình* nếu mỗi mặt của nó là một đơn hình, tức là mỗi mặt chứa chính xác ba cạnh.

**Định lý 1.23.** (xem [11]) Trong một khối đa diện đơn hình, một cạnh  $e$  của bao lồi là giao của chính xác hai mặt  $F_1, F_2$  và hai mặt  $F_1, F_2$  có chung một cạnh  $e$  khi và chỉ khi  $e$  được xác định bởi hai đỉnh cùng thuộc  $F_1, F_2$  (hai mặt  $F_1, F_2$  liền kề với  $e$ ) (xem hình 8).

Định lý 1.23 là cơ sở của Thuật toán 1 dưới đây, trong đó sử dụng cạnh  $e$  của mặt  $F_1$  đã có để xây dựng mặt liền kề  $F_2$  có chung cạnh  $e$  với  $F_1$ .



Hình 8. Hai mặt  $F_1, F_2$  được gọi là liền kề

### Bài toán

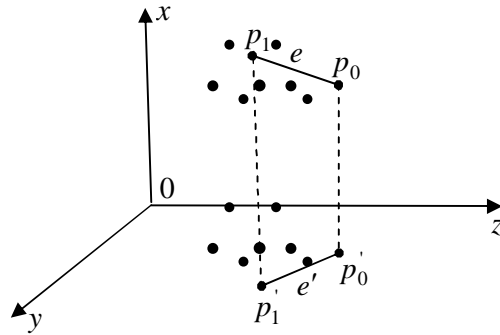
**Cho:**  $P := \{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\} \subset \mathbf{E}^3$ ,  $n \geq 4$ .

**Tìm:**  $Q$  là tập tất cả các mặt của  $\text{conv}P$ .

### Mô tả thuật toán (xem [11])

- Tìm cạnh cực biên đầu tiên  $e$  của  $\text{conv} P$ .

Chọn hệ trục  $Oxyz$ . Chiếu các điểm  $p_i = (x_i, y_i, z_i) \in P$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  theo phương song song với trục  $Ox$  xuống mặt phẳng  $Oyz$ , chúng ta được tập  $P' = \{p'_0, p'_1, \dots, p'_{n-1}\}$ ,  $p'_i = (0, y_i, z_i)$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ . Trên mặt phẳng  $Oyz$ , tìm cạnh cực biên đầu tiên của tập  $P'$  (sử dụng Thủ tục 1). Khi đó, cạnh tương ứng với cạnh cực biên của bao lồi  $\text{conv} P'$  là cạnh cực biên của bao lồi  $\text{conv} P$ . Giả sử  $[p'_0, p'_1] := e'$  là cạnh cực biên của  $\text{conv} P'$ , khi đó  $[p_0, p_1] := e$  là cạnh cực biên của  $\text{conv} P$  (xem hình 9).



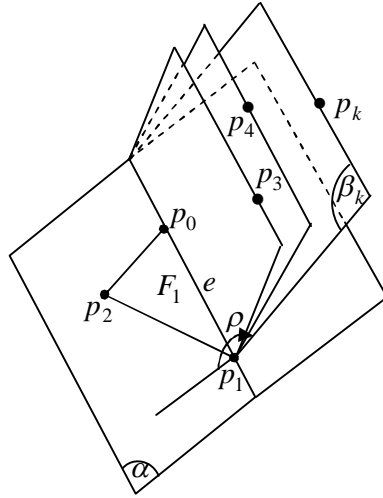
Hình 9.  $[p'_0, p'_1] = e'$  là cạnh cực biên của  $\text{conv} P'$ .  
 Khi đó,  $[p_0, p_1] = e$  là cạnh cực biên của  $\text{conv} P$

- Tìm mặt đầu tiên  $F_1$  chứa cạnh  $e$  của  $\text{conv} P$ .

Giả sử  $[p_0, p_1] := e$  là cạnh cực biên của  $\text{conv} P$ ,  $[p'_0, p'_1] := e'$  là hình chiếu song song của  $e$  xuống mặt phẳng  $Oyz$ . Gọi  $(\chi_l)$  là nửa mặt phẳng bờ  $e$  và chứa  $p_l \in P \setminus \{p_0, p_1\}$ . Dùng mặt phẳng  $(e, e')$  làm chuẩn, xét góc tạo bởi mặt phẳng  $(e, e')$  và mặt phẳng  $(\chi_l)$  xem góc nào bé nhất. Từ đó tìm được điểm cực biên thứ ba, giả sử là  $p_2$ , khi đó  $F_1 := \Delta p_0 p_1 p_2$  là mặt đầu tiên của  $\text{conv} P$ .

- Tìm mặt  $F_2$  liền kề và có chung cạnh  $e$  với mặt  $F_1$ .

Giả sử  $F_1 := \Delta p_0 p_1 p_2$  và  $[p_0, p_1] := e$ . Gọi  $(\alpha)$  là nửa mặt phẳng chứa  $F_1$  có bờ  $e$ ;  $(\beta_i)$  là nửa mặt phẳng chứa  $p_i \in P \setminus \{p_0, p_1, p_2\}$  có bờ  $e$ . Để tìm mặt  $F_2$  liền kề và có chung cạnh  $e$  với mặt  $F_1$  chúng ta đi tìm góc lớn nhất giữa  $(\alpha)$  và  $(\beta_i)$ , giả sử là góc  $\rho_k := \angle(\alpha, \beta_k)$ . Khi đó  $F_2 := \Delta p_0 p_1 p_k$  (xem hình 10).



Hình 10.  $\rho$  là góc tạo bởi  $(\alpha)$  và  $(\beta_k)$

- Tiếp tục quá trình tìm mặt liền kề cho đến khi tìm được  $\text{conv } P$ .

**Nhận xét 1.24.** (xem [11]) Để tìm góc lớn nhất giữa nửa mặt phẳng  $(\alpha)$  và các nửa mặt phẳng  $(\beta_i)$ , ta so sánh cotan của các góc đó và chọn góc có cotan lớn nhất. Cách tính góc giữa mặt phẳng  $(\alpha)$  và nửa mặt phẳng  $(\beta_k)$ ,  $p_k \in P \setminus \{p_0, p_1, p_2\}$  như sau.

Giả sử  $[p_0, p_1] := e$ ,  $F_1 := \Delta p_0 p_1 p_2 \in (\alpha)$ , điểm  $p_i \notin (\alpha)$ . Gọi  $\vec{n}$  là vectơ pháp tuyến, đơn vị của  $(\alpha)$  và  $\vec{a}$  là vectơ đơn vị của cạnh  $e$  và vectơ  $\vec{n}$ . Khi đó,  $\vec{n}$

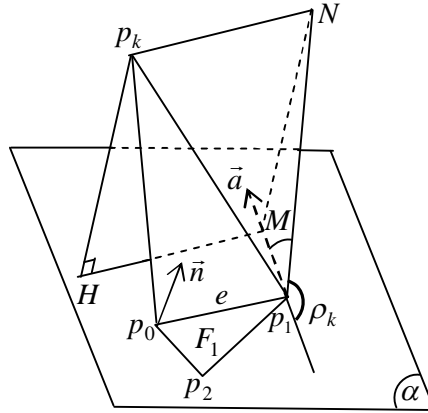
nằm cùng phía với nửa mặt phẳng chứa  $p_k$  có bờ  $(\alpha)$ ,  $\vec{n} = \frac{\overrightarrow{p_0 p_1} \times \overrightarrow{p_0 p_2}}{|\overrightarrow{p_0 p_1} \times \overrightarrow{p_0 p_2}|}$  và

$\vec{a} = \frac{\vec{n} \times \overrightarrow{p_1 p_0}}{|\vec{n} \times \overrightarrow{p_1 p_0}|}$ . Do đó,  $\vec{a}$  vuông góc với  $\vec{n}$  và  $\vec{a}$  vuông góc với  $\overrightarrow{p_1 p_0}$ . Suy ra

$\vec{a} \in (\alpha)$  và  $\vec{a}$  vuông góc với  $\overrightarrow{p_1 p_0}$ .

Từ  $p_k$  kẻ  $p_k H$  vuông góc với  $(\alpha)$ . Trong  $(\alpha)$  kẻ  $HM$  song song với  $p_0 p_1$ , sao cho  $M \in \vec{a}$ . Dựng hình chữ nhật  $p_k H M N$ . Khi đó,  $\rho_k$  là góc tạo bởi

$(\alpha)$  và  $(\beta_k)$  (xem hình 11). Ta có  $\cotan \rho_k = -\cotan(\pi - \rho_k) = -\frac{|\overrightarrow{p_1 M}|}{|\overrightarrow{MN}|}$ .



Hình 11. Góc  $\rho_k$  là góc tạo bởi  $(\alpha)$  và  $(\beta_k)$

$$\begin{aligned}
 \text{Mặt khác, ta lại có } \overrightarrow{p_1 p_k} \times \vec{a} &= (\overrightarrow{p_1 M} + \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{Hp_k}) \times \vec{a} \\
 &= \overrightarrow{p_1 M} \times \vec{a} + \overrightarrow{MH} \times \vec{a} + \overrightarrow{Hp_k} \times \vec{a} \\
 &= \overrightarrow{p_1 M} \times \vec{a} \quad (\text{do } \overrightarrow{MH}, \overrightarrow{Hp_k} \perp \vec{a}) \\
 &= t \times \vec{a} \times \vec{a} \\
 &= t \times \vec{a}^2 = t.
 \end{aligned}$$

Suy ra  $\overrightarrow{p_1 M} = t \times \vec{a} = (\overrightarrow{p_1 p_k} \times \vec{a}) \times \vec{a}$ . Do đó  $|\overrightarrow{p_1 M}| = |\overrightarrow{p_1 p_k} \times \vec{a}| \times |\vec{a}| = |\overrightarrow{p_1 p_k} \times \vec{a}|$ .

$$\text{Tương tự, ta có } |\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{p_1 p_k} \times \vec{n}|. \text{ Do đó, } \cotan \rho_k = -\frac{|\overrightarrow{p_1 p_k} \times \vec{a}|}{|\overrightarrow{p_1 p_k} \times \vec{n}|}.$$

Với mỗi  $p_k \in (\alpha)$ , chúng tôi tính được  $\rho_k \approx \cotan \rho_k = -\frac{\left| \overrightarrow{p_1 p_k} \times \vec{a} \right|}{\left| \overrightarrow{p_1 p_k} \times \vec{n} \right|}$ . Suy ra,

$$\rho_i = \max_k \rho_k.$$

### Thuật toán 1: Thuật toán gói quà (xem [11])

1. Xét  $Q := \phi$  và  $\varepsilon(P) := \phi$ ;
2. gọi Thủ tục 1 để tìm mặt  $F_1$ ;
3. gán  $\varepsilon(P)$  là tập các cạnh của  $F_1$ ;
4. gán  $Q := Q \cup F_1$ ;
5. **while** ( $Q \neq \phi$ ) **do**
6.     **begin** lấy  $F_1$  từ tập  $Q$ ; ( $Q$  có cấu trúc hàng đợi)
7.          $T$  đặt là tập các cạnh của  $F_1$ ;
8.         **for each**  $e \in T \cap \varepsilon(P)$  **do**
9.             **begin** tìm mặt cực biên  $F_2$  liền kề và có chung cạnh  $e$  với  $F_1$ ;
10.             gán vào  $\varepsilon(P)$  tất cả các cạnh của  $F_2$  chưa có trong  $\varepsilon(P)$   
và xoá tất cả các cạnh của  $F_2$  đã có trong  $\varepsilon(P)$ ;
11.             gán  $Q := Q \cup F_2$ ;
- end**;
12.     output  $F_1$ ;
- end**.

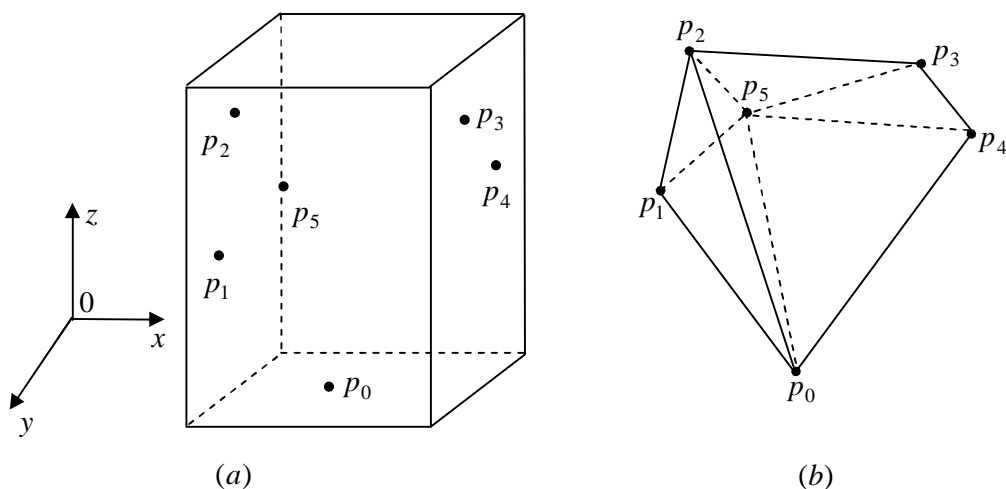
Khi đó,  $Q$  là tập có thứ tự các mặt cực biên của  $\text{conv} P$ .

### Ví dụ 1.25.

Cho  $P = \{p_0(1;1;2), p_1(-2;2;8), p_2(1;4;17), p_3(4;2;20), p_4(3;-2;13), p_5(-2;-3;13)\} \in \mathbf{E}^3$ .

Tìm  $\text{conv} P$ .





Hình 12. (a) Tập P được chứa trong hình hộp chữ nhật. (b) Biểu diễn bao lồi convP

Tập P được chứa trong hình hộp chữ nhật có các mặt xung quanh là  $x_{\max} = 4$ ,  $x_{\min} = -2$ ,  $y_{\max} = 4$ ,  $y_{\min} = -3$ ,  $z_{\max} = 20$ ,  $z_{\min} = 2$  (xem hình 12 (a)).

Dựa vào thuật toán gói quà, quá trình tìm bao lồi convP được thực hiện như sau.

1. Xét  $Q := \phi$  và  $\varepsilon(P) := \phi$ ;
2. gọi Thủ tục 1 để tìm mặt đầu tiên  $F_1$  đi qua cạnh  $e$  của convP;

Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$ . Chiếu các điểm của P theo phương song song với trục  $Ox$  xuống mặt phẳng  $Oyz$  ta được tập

$$P' = \{p'_0(1;2), p'_1(2;8), p'_2(4;17), p'_3(2;20), p'_4(-2;13), p'_5(-3;13)\}.$$

Từ ví dụ 1.19, giả sử  $e' := [p'_0, p'_2]$  là cạnh cực biên đầu tiên của convP' tìm được theo Thủ tục 1. Khi đó,  $e := [p_0, p_2]$  là cạnh cực biên đầu tiên của convP. Dùng mặt phẳng  $(e, e')$  làm chuẩn, xét góc tạo bởi mặt phẳng  $F := \Delta p_0 p_2 p'_2 \in (e, e')$  và mặt phẳng  $(\beta_k)$  chứa  $p_k \notin (e, e')$ ,  $p_k \in P \setminus \{p_0, p_2\}$ .

Gọi  $\vec{n}$  là vectơ pháp tuyến, đơn vị của mặt  $(e, e')$  và  $\vec{a}$  là vectơ đơn vị của cạnh  $e$  và  $\vec{n}$ . Theo Nhận xét 1.24, ta có  $\vec{n} = \frac{\overrightarrow{p_0 p_2} \times \overrightarrow{p_0 p'_2}}{|\overrightarrow{p_0 p_2} \times \overrightarrow{p_0 p'_2}|} = \left(0; \frac{-5}{\sqrt{26}}; \frac{1}{\sqrt{26}}\right)$  và  $\vec{a} = \frac{\overrightarrow{\vec{n} \times p_2 p_0}}{|\overrightarrow{\vec{n} \times p_2 p_0}|} = (1; 0; 0)$ .

Khi đó, góc tạo bởi mặt phẳng  $(\beta_k)$  chứa  $p_k$ , với  $p_k \in P \setminus \{p_0, p_2\}$  và mặt phẳng  $(e, e')$  là  $\rho_k \approx -\frac{|\overrightarrow{p_2 p_k} \times \vec{a}|}{|\overrightarrow{p_2 p_k} \times \vec{n}|}$ . Do đó, tại các điểm  $p_1, p_3, p_4, p_5$ , chúng tôi có

các góc tương ứng là

$$\rho_1 \approx -\frac{|\overrightarrow{p_2 p_1} \times \vec{a}|}{|\overrightarrow{p_2 p_1} \times \vec{n}|} \approx -0,9511; \quad \rho_3 \approx -\frac{|\overrightarrow{p_2 p_3} \times \vec{a}|}{|\overrightarrow{p_2 p_3} \times \vec{n}|} \approx -0,9158;$$

$$\rho_4 \approx -\frac{|\overrightarrow{p_2 p_4} \times \vec{a}|}{|\overrightarrow{p_2 p_4} \times \vec{n}|} \approx -1,3165; \quad \rho_5 \approx -\frac{|\overrightarrow{p_2 p_5} \times \vec{a}|}{|\overrightarrow{p_2 p_5} \times \vec{n}|} \approx -1,3247.$$

Suy ra,  $\max\{\rho_1, \rho_3, \rho_4, \rho_5\} = \rho_3$ .

Vậy mặt  $\Delta p_0 p_2 p_3 := F_1$  là mặt đầu tiên của  $\text{conv} P$ .

3. gán  $\varepsilon(P) = \{[p_0, p_2], [p_0, p_3], [p_2, p_3]\}$ ;

4. gán  $Q := Q \cup F_1 = \{\Delta p_0 p_2 p_3\}$ ;

5. **while**  $(Q \neq \phi)$  **do**

6.     **begin** lấy  $F_1 = \Delta p_0 p_2 p_3$  từ tập  $Q$ ;

$$T = \{[p_0, p_2], [p_0, p_3], [p_2, p_3]\} \text{ là tập các cạnh của } F_1;$$

(Tương tự với cách tìm  $F_1$  ở trên, chúng tôi tìm được các mặt  $F_2$  phía dưới).

- với  $e = [p_0, p_3] \in T \cap \varepsilon(P) = \{[p_0, p_2], [p_0, p_3], [p_2, p_3]\}$  thì  $F_2 = \Delta p_0 p_3 p_4$

xoá  $[p_0, p_3]$  và gán  $\varepsilon(P) = \{[p_0, p_4], [p_3, p_4], [p_0, p_2], [p_2, p_3]\}$ ;

gán  $Q := Q \cup F_1 = \{\Delta p_0 p_3 p_4, \Delta p_0 p_2 p_3\}$ ;

- với  $e = [p_0, p_4] \in \varepsilon(\mathbf{P}) = \{[p_0, p_4], [p_3, p_4], [p_0, p_2], [p_2, p_3]\}$  thì  $F_2 = \Delta p_0 p_4 p_5$   
 xoá  $[p_0, p_4]$  và gán  $\varepsilon(\mathbf{P}) = \{[p_0, p_5], [p_4, p_5], [p_3, p_4], [p_0, p_2], [p_2, p_3]\}$ ;  
 gán  $Q := Q \cup F_1 = \{\Delta p_0 p_4 p_5, \Delta p_0 p_3 p_4, \Delta p_0 p_2 p_3\}$ ;
- với  $e = [p_0, p_5] \in \varepsilon(\mathbf{P}) = \{[p_0, p_5], [p_4, p_5], [p_3, p_4], [p_0, p_2], [p_2, p_3]\}$  thì  $F_2 = \Delta p_0 p_5 p_1$   
 xoá  $[p_0, p_5]$  và gán  $\varepsilon(\mathbf{P}) = \{[p_0, p_1], [p_5, p_1], [p_4, p_5], [p_3, p_4], [p_0, p_2], [p_2, p_3]\}$ ;  
 gán  $Q := Q \cup F_1 = \{\Delta p_0 p_5 p_1, \Delta p_0 p_4 p_5, \Delta p_0 p_3 p_4, \Delta p_0 p_2 p_3\}$ ;
- với  $e = [p_0, p_1] \in \varepsilon(\mathbf{P}) = \{[p_0, p_1], [p_5, p_1], [p_4, p_5], [p_3, p_4], [p_0, p_2], [p_2, p_3]\}$   
 thì  $F_2 = \Delta p_0 p_1 p_2$   
 xoá  $[p_0, p_1], [p_0, p_2]$  và gán  $\varepsilon(\mathbf{P}) = \{[p_1, p_2], [p_5, p_1], [p_4, p_5], [p_3, p_4], [p_2, p_3]\}$ ;  
 gán  $Q := Q \cup F_1 = \{\Delta p_0 p_1 p_2, \Delta p_0 p_5 p_1, \Delta p_0 p_4 p_5, \Delta p_0 p_3 p_4, \Delta p_0 p_2 p_3\}$ ;
- với  $e = [p_1, p_2] \in \varepsilon(\mathbf{P}) = \{[p_1, p_2], [p_5, p_1], [p_4, p_5], [p_3, p_4], [p_2, p_3]\}$  thì  $F_2 = \Delta p_1 p_2 p_5$   
 xoá  $[p_1, p_2], [p_5, p_1]$  và gán  $\varepsilon(\mathbf{P}) = \{[p_2, p_5], [p_4, p_5], [p_3, p_4], [p_2, p_3]\}$ ;  
 gán  $Q := Q \cup F_1 = \{\Delta p_1 p_2 p_5, \Delta p_0 p_1 p_2, \Delta p_0 p_5 p_1, \Delta p_0 p_4 p_5, \Delta p_0 p_3 p_4, \Delta p_0 p_2 p_3\}$ ;
- với  $e = [p_2, p_5] \in \varepsilon(\mathbf{P}) = \{[p_2, p_5], [p_4, p_5], [p_3, p_4], [p_2, p_3]\}$  thì  $F_2 = \Delta p_2 p_5 p_3$   
 xoá  $[p_2, p_5], [p_2, p_3]$  và gán  $\varepsilon(\mathbf{P}) = \{[p_5, p_3], [p_4, p_5], [p_3, p_4]\}$ ;  
 gán  $Q := Q \cup F_1 = \{\Delta p_2 p_5 p_3, \Delta p_1 p_2 p_5, \Delta p_0 p_1 p_2,$   
 $\Delta p_0 p_5 p_1, \Delta p_0 p_4 p_5, \Delta p_0 p_3 p_4, \Delta p_0 p_2 p_3\}$ ;
- với  $e = [p_5, p_3] \in \varepsilon(\mathbf{P}) = \{[p_5, p_3], [p_4, p_5], [p_3, p_4]\}$  thì  $F_2 = \Delta p_5 p_3 p_4$   
 xoá  $[p_5, p_3], [p_4, p_5], [p_3, p_4]$  và gán  $\varepsilon(\mathbf{P}) = \phi$ ;  
 gán  $Q := Q \cup F_1 = \{\Delta p_5 p_3 p_4, \Delta p_2 p_5 p_3, \Delta p_1 p_2 p_5, \Delta p_0 p_1 p_2,$   
 $\Delta p_0 p_5 p_1, \Delta p_0 p_4 p_5, \Delta p_0 p_3 p_4, \Delta p_0 p_2 p_3\}$ ;

Vậy

$$Q := \{\Delta p_5 p_3 p_4, \Delta p_2 p_5 p_3, \Delta p_1 p_2 p_5, \Delta p_0 p_1 p_2, \Delta p_0 p_5 p_1, \Delta p_0 p_4 p_5, \Delta p_0 p_3 p_4, \Delta p_0 p_2 p_3\}$$

là tập có thứ tự các mặt cực biên của  $\text{conv} P$  (xem hình 12 (b)).

CHƯƠNG 2

**MỐI LIÊN HỆ GIỮA MIỀN HẠN CHẾ TRONG KHÔNG  
GIAN 2 - CHIỀU VÀ BAO LÒI CỦA TẬP HỮU HẠN ĐIỂM  
TRONG KHÔNG GIAN 3 – CHIỀU**

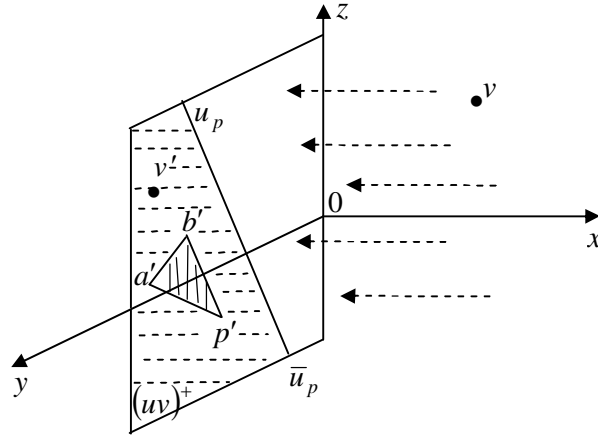
**2.1 Miền hạn chế và mặt định hướng trong không gian 2 - chiều**

Giả thiết rằng  $P = \{p_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}^3, i = 0, 1, \dots, n-1\}$ ,  $n \geq 4$  được chứa trong hình hộp chữ nhật có các mặt xung quanh là  $x = x_{\max}$ ,  $x = x_{\min}$ ,  $y = y_{\max}$ ,  $y = y_{\min}$ ,  $z = z_{\max}$ ,  $z = z_{\min}$ . Hình chữ nhật  $m\bar{n}\bar{m}$  là một mặt của hình hộp chữ nhật,  $\bar{m}\bar{n}$  là giao của hai mặt  $x_{\max}$  và  $z_{\min}$ ,  $mn$  là giao của hai mặt  $x_{\max}$  và  $z_{\max}$ . Lấy  $a, b, p \in P$  và  $(a, b, p)$  cắt  $mn$ ,  $\bar{m}\bar{n}$  tương ứng tại  $u$ ,  $\bar{u}$  (xem hình 7). Chúng tôi ký hiệu  $a', b', p', u_p, \bar{u}_p$  là hình chiếu tương ứng của  $a, b, p, u, \bar{u}$  theo phương song song với trục Ox lên mặt phẳng Oyz. Theo Mệnh đề 1.21, trong mặt Oyz, các điểm  $a', b', p'$  nằm cùng phía với đường thẳng  $\bar{u}_p u_p$ . Chúng tôi ký hiệu  $(uv)^+$  là nửa mặt phẳng đóng với biên  $\bar{u}_p u_p$  và chứa  $a', b', p'$  (xem hình 13).

**Định nghĩa 2.1.** ([6])

Miền  $\widetilde{(a, b, p)} := \{(0, y, z) \in (uv)^+ : y_{\min} \leq y \leq y_{\max}, z_{\min} \leq z \leq z_{\max}\}$  được gọi là *miền hạn chế* của mặt phẳng  $(a, b, p)$  (xem hình 14 và 15). Trong trường hợp  $e = [a, b] \in \text{conv}P$ , chúng tôi ký hiệu  $\widetilde{(e, p)}$  thay cho  $\widetilde{(a, b, p)}$ .

Chú ý, nếu mặt phẳng  $(a, b, p)$  vuông góc với mặt phẳng  $Oyz$  (tức là,  $(a, b, p)$  song song với  $Ox$ ), thì  $\widetilde{(a, b, p)} = [\bar{u}_p, u_p]$ .



Hình 13. Nửa mặt phẳng đóng  $(uv)^+$  (phần kẻ ngang) với biên  $u_p, \bar{u}_p$  chứa  $a', b', p'$

Giả sử  $\varepsilon(P)$  là tập tất cả các cạnh cực biên của  $\text{conv}P$ . Luôn tìm được mặt đầu tiên của  $\text{conv}P$  chứa  $[p_0, p_1] \in \varepsilon(P)$  (xem [10], [11]). Để tìm bao lồi  $\text{conv}P$  của  $P$ , chúng tôi dùng phương pháp mặt định hướng. Giả sử  $v'$  là hình chiếu của  $v \in P$  theo phương song song với trục  $Ox$  lên mặt phẳng  $Oyz$ .

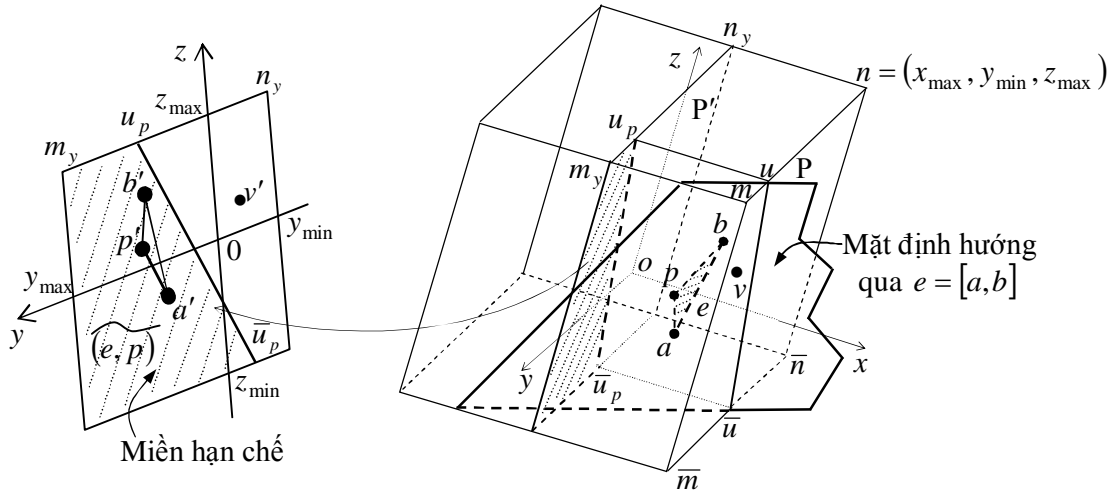
**Định nghĩa 2.2.** ([6]) Giả sử  $e = [a, b] \in \varepsilon(P)$ . Nếu tồn tại  $p \in P$ , sao cho

i)  $(e, p)$  giao với đường  $mn$ .

ii)  $v \in P$  sao cho  $v' \in \widetilde{(e, p)}$  kéo theo  $v$  nằm phía dương của  $f(e, p)$ ,

khi đó, mặt  $f(e, p)$  qua ba điểm  $a, b, p$  được gọi là *mặt định hướng* qua cạnh đầu tiên  $e = [a, b]$  (xem hình 14).

Trong Định nghĩa 2.2, mặt định hướng được xác định khi chiếu tập  $P$  theo phương song song với trục  $Ox$  xuống mặt phẳng  $Oyz$  (nghĩa là, mặt định hướng nằm trên mặt phẳng  $Oyz$ ). Chúng ta có thể chọn phương chiếu khác để mặt định hướng nằm trên mặt phẳng khác, ví dụ như mặt phẳng  $Oxy$ ,  $Oxz$ .



Hình 14. Mặt  $(e, p)$  và miền hạn chế  $\widetilde{(e, p)}$  tương ứng (phần kẻ sọc, bên trái đường  $\bar{u}_p u_p$ ).  
Mặt  $f(e, p)$  là mặt định hướng qua cạnh đầu tiên  $e = [a, b]$ .

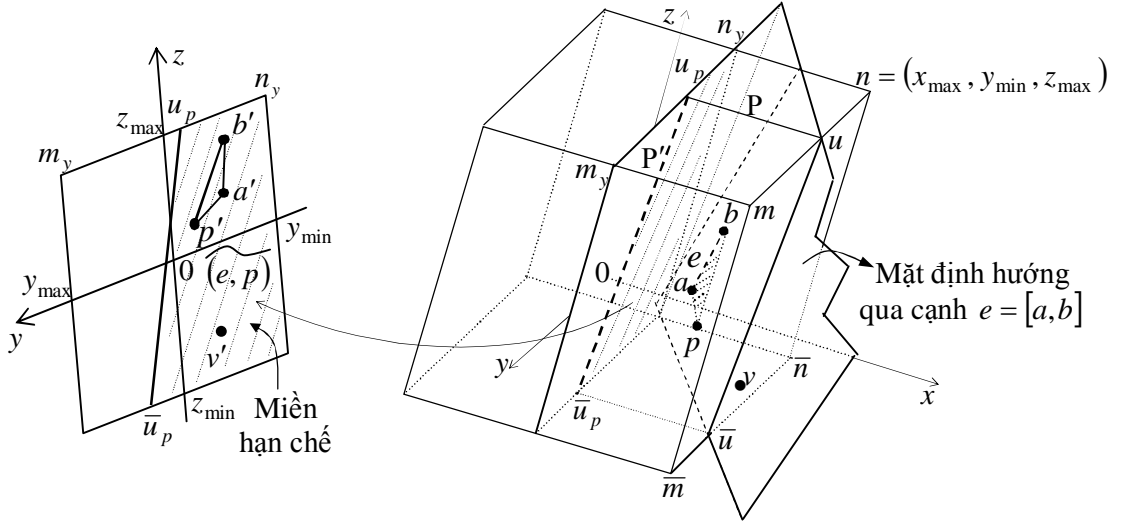
**Mệnh đề 2.3.** ([6]) Giả sử  $e = [a, b] \in \varepsilon(P)$ ,  $n_x$  và  $n_y$  là hoành độ và tung độ của tích có hướng hai vectơ  $\overrightarrow{ab} \times \overrightarrow{ap}$  khi  $p \in P$ .

i) Giả sử  $n_y \neq 0$ ,  $v \in P$  sao cho  $v' \notin \widetilde{(e, p)}$ . Khi đó,  $v$  nằm phía dương của  $f(e, p)$  (nghĩa là  $V(a, b, p, v) > 0$ ) nếu  $n_x > 0$ .

ii) Giả sử  $n_x > 0$ . Nếu  $f(e, p)$  là một mặt định hướng qua cạnh  $e$  thì  $f(e, p)$  là một mặt của  $\text{conv}P$ .

iii) Tồn tại duy nhất một điểm  $p \in P$  sao cho hoặc  $f(e, p)$  là một mặt của  $\text{conv}P$  với  $n_y = 0$ , hoặc  $f(e, p)$  là một mặt định hướng qua cạnh  $e$ .

Giả sử lấy được  $v \in P$  sao cho  $v' \notin \widetilde{(e, p)}$ . Vấn đề lấy  $v \in P$  như thế nào để  $v' \notin \widetilde{(e, p)}$  chúng tôi sẽ trình sau thuật toán tìm bao lồi bằng miền hạn chế.



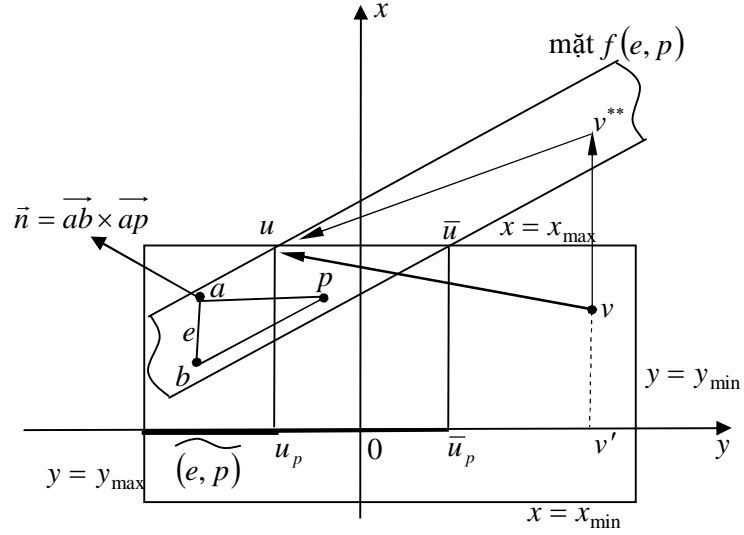
Hình 15. Mặt  $(e, p)$  và miền hạn chế  $(e, p)$  tương ứng (phần kẻ sọc, bên phải đường  $\bar{u}_p u_p$ ).  
Mặt  $f(e, p)$  là mặt định hướng qua cạnh đầu tiên  $e = [a, b]$ .

Cho  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$  là tích có hướng của hai vectơ  $\overline{ab} \times \overline{ap}$ . Vì  $(a, b, p)$  cắt  $mn$  và  $\bar{m}\bar{n}$  tương ứng tại  $u$  và  $\bar{u}$  (nghĩa là,  $n_y \neq 0$ ).  $u_p$  và  $\bar{u}_p$  là hình chiếu tương ứng của  $u$  và  $\bar{u}$  theo phương song song với trục  $Ox$  lên mặt phẳng  $Oyz$ . Vì  $u = (x_{\max}, u_y, z_{\max}) \in (a, b, p)$  và  $u_p = (0, u_y, z_{\max})$ , nên chúng ta có

$$\begin{aligned} V(a, b, p, u_p) &= -((u_{p_x} - a_x)n_x + (u_{p_y} - a_y)n_y + (u_{p_z} - a_z)n_z) \\ &= -((-a_x)n_x + (u_y - a_y)n_y + (z_{\max} - a_z)n_z) \\ &= -((x_{\max} - a_x)n_x + (u_y - a_y)n_y + (z_{\max} - a_z)n_z) + x_{\max}n_x \\ &= -V(a, b, p, u) + x_{\max}n_x = x_{\max}n_x. \end{aligned}$$

Lấy  $v \in P$ , khi đó

$$\begin{aligned} V(a, b, p, v) - V(a, b, p, u_p) &= (-a_x)n_x + (u_y - a_y)n_y + (z_{\max} - a_z)n_z \\ &\quad - ((v_x - a_x)n_x + (v_y - a_y)n_y + (v_z - a_z)n_z) \\ &= (-v_x)n_x + (u_y - v_y)n_y + (z_{\max} - v_z)n_z. \end{aligned}$$



Hình 16. Tương ứng với hình 15, nếu nhìn mặt  $Oyz$  từ phía  $x \approx +\infty$  thì  $(e, p)$  là miền hạn chế tương ứng.  $V(a, b, p, v) = \vec{n} \vec{v} \vec{u} = \vec{n} \vec{v} \vec{v}^{**} = n_x (v_x^{**} - v_x)$ . Khi đó, với mọi  $v \in P$  sao cho  $v' \notin (e, p)$  thì  $V(a, b, p, v) > 0$  nếu  $n_x > 0$

Suy ra  $V(a, b, p, v) = \vec{n} \vec{v} \vec{u}$  (xem hình 16). Lấy  $v^{**} \in (a, b, p)$  sao cho  $vv^{**}$  song song với trục  $Ox$ , từ đó chúng tôi có

$$\begin{aligned} V(a, b, p, v) &= \vec{n} \vec{v} \vec{u} = \vec{n} (\vec{v} \vec{v}^{**} + \vec{v}^{**} \vec{u}) \\ &= \vec{n} \vec{v} \vec{v}^{**} + \vec{n} \vec{v}^{**} \vec{u} \\ &= \vec{n} \vec{v} \vec{v}^{**} = n_x (v_x^{**} - v_x). \end{aligned}$$

Đặt  $s := (u_{p_y} - \bar{u}_{p_y})(p'_z - \bar{u}_{p_z}) - (p'_y - \bar{u}_{p_y})(u_{p_z} - \bar{u}_{p_z})$ . Giả sử  $\vec{n} = (\bar{n}_x, \bar{n}_y, \bar{n}_z)$  là tích có hướng của  $\vec{u}\vec{p}$  và  $\vec{u}\vec{u}$ . Khi đó,  $\vec{n} = (\bar{n}_x, \bar{n}_y, \bar{n}_z)$  là vectơ pháp tuyến của  $(a, b, p)$  và

$$\begin{aligned} \bar{n}_x &= (p_y - \bar{u}_y)(u_z - \bar{u}_z) - (u_y - \bar{u}_y)(p_z - \bar{u}_z) \\ \bar{n}_y &= (p_z - \bar{u}_z)(u_x - \bar{u}_x) - (u_z - \bar{u}_z)(p_x - \bar{u}_x) \\ &= (z_{\max} - z_{\min})(x_{\max} - p_x) \end{aligned} \tag{5}$$



$$\bar{n}_z = (p_x - \bar{u}_x)(u_y - \bar{u}_y) - (u_x - \bar{u}_x)(p_y - \bar{u}_y) = (p_x - x_{\max})(u_y - \bar{u}_y).$$

Vì  $u_{p_y} = u_y$ ,  $\bar{u}_{p_y} = \bar{u}_y$ ,  $\bar{u}_{p_z} = \bar{u}_z$ ,  $p'_y = p_y$ ,  $p'_z = p_z$  và (5), ta có

$$\bar{u}_y - u_y = \frac{(z_{\max} - z_{\min})\bar{n}_z}{\bar{n}_y} \quad \text{và} \quad s = (p_z - \bar{u}_z)(u_y - \bar{u}_y) - (u_z - \bar{u}_z)(p_y - \bar{u}_y) = -\bar{n}_x. \quad \text{Từ}$$

$z_{\max} > z_{\min}$  và  $x_{\max} \geq p_x$ , ta có  $\bar{n}_y \geq 0$ .

Do đó  $\bar{n} = \overrightarrow{ab} \times \overrightarrow{ap}$  và  $\bar{n} = \overrightarrow{up} \times \overrightarrow{uu}$  là các vectơ pháp tuyến tương ứng của các mặt phẳng  $(a, b, p)$ ,  $(n_x, n_y, n_z) = \rho(\bar{n}_x, \bar{n}_y, \bar{n}_z)$  với  $\rho \in \mathbf{R}$ ,  $\rho \neq 0$ . Mặt phẳng  $(a, b, p)$  có phương trình là  $x\bar{n}_x + y\bar{n}_y + z\bar{n}_z = \bar{d}$ . Khi đó,  $d = \rho\bar{d}$  và

$$\bar{d} = v_x^{**}\bar{n}_x + v_y^{**}\bar{n}_y + v_z^{**}\bar{n}_z = v_x^{**}\bar{n}_x + v_y\bar{n}_y + v_z\bar{n}_z.$$

$$\text{Từ đó ta có } v_x^{**} = \frac{d - v_y n_y - v_z n_z}{n_x} = \frac{\bar{d} - v_y \bar{n}_y - v_z \bar{n}_z}{\bar{n}_x}.$$

*Chứng minh mệnh đề 2.3:*

i) Lấy  $v \in P$  sao cho  $v' \notin \widetilde{(e, p)}$ . Xét hai trường hợp sau.

*Trường hợp 1.* Điểm  $p'$  nằm bên trái của đường  $\bar{u}_p u_p$ . Khi đó  $0 > s = -\bar{n}_x$

và  $v_y < v_y^*$ . Từ  $n_x > 0$ ,  $\bar{n}_y > 0$  và  $v_y < v_y^*$ , chúng tôi lấy

$$n_y(v_y^* - v_y) = \frac{n_x}{\bar{n}_x} \bar{n}_y (v_y^* - v_y) \geq 0.$$

Vì  $v_y^* = \frac{d - x_{\max} n_x - v_z n_z}{n_y}$  nên ta có  $d - x_{\max} n_x - v_z n_z - v_y n_y \geq 0$ . Từ  $n_x > 0$  và

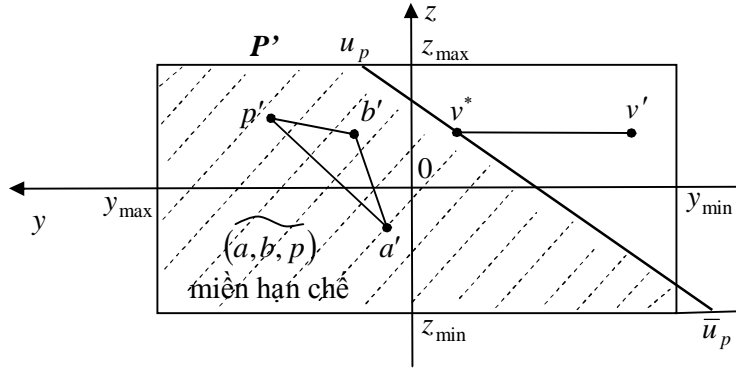
$$v_x^{**} = \frac{d - v_y n_y - v_z n_z}{n_x} \quad \text{ta có } v_x^{**} \geq x_{\max}. \quad \text{Do đó } v_x^{**} \geq v_x. \quad \text{Từ đó, ta có}$$

$V(a, b, p, v) = n_x(v_x^{**} - v_x) \geq 0$ . Vì  $a, b, p, v$  không đồng phẳng và  $V(a, b, p, v) > 0$  nên  $v$  nằm phía dương của mặt  $f(e, p)$ .

*Trường hợp 2.* Điểm  $p'$  nằm bên phải của đường  $\bar{u}_p u_p$ . Khi đó  $0 < s = -\bar{n}_x$  và  $v_y > v_y^*$ . Lập luận tương tự trường hợp 1 ở trên ta có  $V(a, b, p, v) > 0$ . Khi đó,  $v$  nằm phía dương của mặt  $f(e, p)$ .

ii) Nếu  $n_y \neq 0$ , giả sử mặt định hướng qua  $e = [a, b]$  là  $f(e, p)$  với  $p \in P$ . Lấy  $v \in P$  sao cho  $v' \notin \widetilde{(e, p)}$ . Từ (i) ta có  $v$  nằm phía dương của mặt  $f(e, p)$ . Từ đó ta có  $(a, b, p)$  là mặt của  $\text{conv}P$ .

iii) Từ  $e = [a, b]$  là cạnh cực biên của  $\text{conv}P$  ta có mặt  $f(e, p)$  với  $p \in P$ . Xét trường hợp mặt  $f(e, p)$  không song song với  $mn$  (nghĩa là,  $n_y \neq 0$ ). Do đó,  $f(e, p)$  là một mặt định hướng. Vì thế, tồn tại duy nhất mặt định hướng qua cạnh  $e$ . □



Hình 17. Nếu  $x_{\max} > 0$  và  $u_p$  nằm phía trên  $(a, b, p)$  thì miền hạn chế (phần kẻ sọc) nằm phía dưới  $\bar{u}_p u_p$

Lấy  $v^* \in [u_p, \bar{u}_p]$  sao cho  $v'v^*$  song song với  $Oy$ . Do đó  $v^* = (0, v_y^*, v_z)$  (xem hình 17 và 18). Mặt phẳng  $(a, b, p)$  có phương trình  $xn_x + yn_y + zn_z = d$  và có vectơ pháp tuyến là  $\bar{n} = (n_x, n_y, n_z)$ . Vì  $(a, b, p) \cap mn$  tại một điểm duy nhất nên  $n_y \neq 0$ . Rõ ràng,  $v^* = (0, v_y^*, v_z) \in [u_p, \bar{u}_p]$ . Theo Định lý Thales, ta có

$$v_y^* = \frac{(z_{\max} - z_{\min})\bar{u}_y - (v_z - z_{\min})(\bar{u}_y - u_y)}{z_{\max} - z_{\min}}.$$

Mặt khác ta có,  $u = (x_{\max}, u_y, z_{\max}) \in (a, b, p)$  và  $\bar{u} = (x_{\max}, \bar{u}_y, z_{\max}) \in (a, b, p)$  suy ra

$$d = u_x n_x + u_y n_y + u_z n_z = x_{\max} n_x + u_y n_y + z_{\max} n_z$$

và

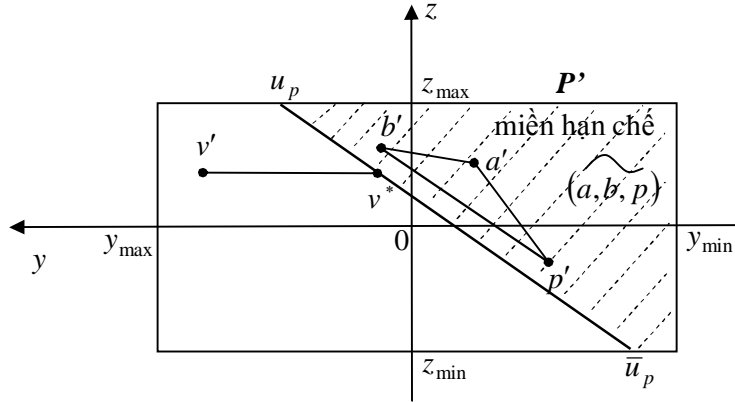
$$d = \bar{u}_x n_x + \bar{u}_y n_y + \bar{u}_z n_z = x_{\max} n_x + \bar{u}_y n_y + z_{\min} n_z.$$

Từ đó ta có

$$u_{p_y} = u_y = \frac{d - x_{\max} n_x - z_{\max} n_z}{n_y}$$

$$\bar{u}_{p_y} = \bar{u}_y = \frac{d - x_{\max} n_x - z_{\min} n_z}{n_y} \quad (6)$$

$$v_y^* = \frac{d - x_{\max} n_x - v_z n_z}{n_y}.$$



Hình 18. Nếu  $x_{\max} > 0$  và  $u_p$  nằm phía dưới  $(a, b, p)$  thì miền hạn chế (phần kẻ sọc) nằm phía trên  $\bar{u}_p u_p$

**Mệnh đề 2.4.** ([6]) Giả sử  $a, b, p \in P$  và  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$  là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(a, b, p)$ . Khi đó,  $u_p$  nằm phía trên (tương ứng, phía dưới) mặt phẳng  $(a, b, p)$  khi và chỉ khi  $\frac{x_{\max} n_x}{n_z} < 0$  (tương ứng,  $\frac{x_{\max} n_x}{n_z} > 0$ ).

Chứng minh:

Từ  $d = x_{\max} n_x + u_y n_y + z_{\max} n_z$ ,  $u_p = (0, u_y, z_{\max})$  nằm phía trên (tương ứng, phía dưới) mặt phẳng  $(a, b, p)$  khi và chỉ khi  $z_{\max} > \frac{d - u_y n_y}{n_z}$  (tương ứng,

$z_{\max} < \frac{d - u_y n_y}{n_z}$ ), nghĩa là,  $z_{\max} > \frac{x_{\max} n_x + z_{\max} n_z}{n_z}$  (tương ứng,

$z_{\max} < \frac{x_{\max} n_x + z_{\max} n_z}{n_z}$ ). Điều này tương đương với  $\frac{x_{\max} n_x}{n_z} < 0$  (tương ứng,

$\frac{x_{\max} n_x}{n_z} > 0$ ). □

**Mệnh đề 2.5.** ([6]) Giả sử  $[a, b]$  là cạnh của  $\text{conv}P$ ,  $p \in P$  và  $u_p$  nằm phía trên (tương ứng, phía dưới) mặt phẳng  $(a, b, p)$ . Khi đó,

i) Nếu  $x_{\max} > 0$  thì miền  $(\widehat{a, b, p})$  nằm phía dưới (tương ứng, phía trên) đường định hướng  $\vec{u}_p u_p$  trên mặt phẳng  $Oyz$  (nhìn từ phía  $x \approx +\infty$ ). Nếu  $x_{\max} < 0$  thì  $(\widehat{a, b, p})$  nằm phía trên (tương ứng, phía dưới) đường định hướng  $\vec{u}_p u_p$  trên mặt phẳng  $Oyz$  (nhìn từ phía  $x \approx +\infty$ ).

ii) Nếu  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$  là tích có hướng của hai vectơ  $\vec{ab} \times \vec{ap}$  và

$$\left( v_x - \frac{d - v_y n_y - v_z n_z}{n_x} \right) x_{\max} n_x > 0 \quad (7)$$

$$\text{(tương ứng, } \left( v_x - \frac{d - v_y n_y - v_z n_z}{n_x} \right) x_{\max} n_x < 0)$$

thì  $v$  nằm phía dương của  $f(a,b,p)$ .

iii) Nếu (7) không đúng với  $\vec{n} = \overline{ab} \times \overline{ap}$  và  $v' \in (\widetilde{a,b,p})$  thì  $f(a,b,p)$  không là mặt định hướng qua cạnh  $[a,b]$ .

*Chứng minh:*

i) Đầu tiên, chúng tôi xét trường hợp  $u_p$  nằm phía trên mặt phẳng  $(a,b,p)$ .

Từ  $\bar{n}_z \neq 0$ ,  $\bar{u}_y - u_y \neq 0$ , có hai khả năng sau:

*Khả năng 1:*  $\bar{u}_y - u_y < 0$  (xem hình 14 và 17). Khi đó  $\bar{n}_z < 0$ , chúng tôi cần chứng minh  $(\widetilde{a,b,p})$  nằm phía dưới (trương ứng, phía trên) đường định hướng  $\bar{u}_p u_p$ . Từ Mệnh đề 1.21, chúng tôi chứng minh được  $p'$  nằm bên trái đường định hướng  $\bar{u}_p u_p$  (sử dụng công thức (1)) nếu nhìn mặt phẳng Oyz từ phía  $x \approx +\infty$  và nhìn trục Oy từ phải qua trái. Từ Mệnh đề 2.4, ta có  $\frac{x_{\max} \bar{n}_x}{\bar{n}_z} = -\frac{sx_{\max}}{\bar{n}_z} < 0$  và do đó  $sx_{\max} < 0$ . Như vậy, nếu nhìn mặt phẳng Oyz từ phía  $x \approx +\infty$  và nhìn trục Oy từ phải qua trái và nếu  $x_{\max} > 0$  (trương ứng,  $x_{\max} < 0$ )  $p'$  nằm bên trái (trương ứng, bên phải) đường định hướng  $\bar{u}_p u_p$ , thì  $(\widetilde{a,b,p})$  cũng nằm bên trái (trương ứng, bên phải) đường định hướng  $\bar{u}_p u_p$ . Do đó,  $(\widetilde{a,b,p})$  nằm phía dưới (trương ứng, phía trên) đường định hướng  $\bar{u}_p u_p$  trên mặt phẳng Oyz (nhìn từ phía  $x \approx +\infty$ ).

*Khả năng 2:*  $\bar{u}_y - u_y > 0$ . Khi đó  $\bar{n}_z > 0$  và  $sx_{\max} > 0$ . Như vậy, nếu  $x_{\max} > 0$  (trương ứng,  $x_{\max} < 0$ ) thì  $(\widetilde{a,b,p})$  nằm bên trái (trương ứng, bên phải) đường định hướng  $\bar{u}_p u_p$  (xem hình 19). Vậy  $(\widetilde{a,b,p})$  nằm phía dưới (trương ứng, phía trên) đường định hướng  $\bar{u}_p u_p$  trên mặt phẳng Oyz (nhìn từ phía  $x \approx +\infty$ ).

Sau đó, chúng tôi xét trường hợp  $u_p$  nằm phía dưới mặt phẳng  $(a, b, p)$ .

Khi đó, có hai khả năng sau:

*Khả năng 3:*  $\bar{u}_y - u_y < 0$ . Khi đó,  $\bar{n}_z < 0$ . Từ Mệnh đề 2.4, chúng ta có  $\frac{x_{\max} \bar{n}_x}{\bar{n}_z} = -\frac{sx_{\max}}{\bar{n}_z} > 0$  và do đó  $sx_{\max} > 0$ . Như vậy, nếu nhìn mặt phẳng  $Oyz$  từ phía  $x \approx +\infty$ , nhìn trục  $Oy$  từ phải qua trái và nếu  $x_{\max} > 0$  (tương ứng,  $x_{\max} < 0$ ) thì  $p'$  nằm bên phải (tương ứng, bên trái) đường định hướng  $\bar{u}_p u_p$  và do đó  $(\widetilde{a, b, p})$  cũng nằm bên phải (tương ứng, bên trái) đường định hướng  $\bar{u}_p u_p$  (xem hình 18). Vậy  $(\widetilde{a, b, p})$  nằm phía trên (tương ứng, phía dưới) đường định hướng  $\bar{u}_p u_p$  trên mặt phẳng  $Oyz$  (nhìn từ phía  $x \approx +\infty$ ).

*Khả năng 4:*  $\bar{u}_y - u_y > 0$ . Khi đó,  $\bar{n}_z > 0$  và  $sx_{\max} < 0$ . Như vậy, nếu  $x_{\max} > 0$  (tương ứng,  $x_{\max} < 0$ ) thì  $(\widetilde{a, b, p})$  nằm bên trái (tương ứng, bên phải) đường định hướng  $\bar{u}_p u_p$ . Vậy  $(\widetilde{a, b, p})$  nằm phía trên (tương ứng, phía dưới) đường định hướng  $\bar{u}_p u_p$  trên mặt phẳng  $Oyz$  (nhìn từ phía  $x \approx +\infty$ ).

ii) Từ (7) và  $v_x^{**} = \frac{d - v_y n_y - v_z n_z}{n_x}$  ta có

$$(v_x - v_x^{**})x_{\max} n_x > 0 \text{ (tương ứng, } (v_x - v_x^{**})x_{\max} n_x < 0 \text{)}. \quad (8)$$

Giả sử  $u_p$  nằm phía trên mặt phẳng  $(a, b, p)$  và giả sử ta có (8) (nghĩa là,

$(v_x - v_x^{**})x_{\max} n_z > 0$ ). Từ Mệnh đề 2.4, ta có  $\frac{x_{\max} n_x}{n_z} < 0$ . Từ (8), ta có

$$V(a, b, p, v) = -(v_x - v_x^{**})n_x > 0.$$

Giả sử  $u_p$  nằm phía dưới mặt phẳng  $(a, b, p)$  và giả sử ta có (8) (nghĩa là,

$(v_x - v_x^{**})x_{\max} n_z < 0$ ). Từ Mệnh đề 2.4, ta có  $\frac{x_{\max} n_x}{n_z} > 0$ . Từ (8), ta có

$$V(a, b, p, v) = -(v_x - v_x^{**})n_x > 0.$$

Vậy  $v$  nằm phía dương của mặt  $f(a, b, p)$ .

iii) Giả sử (7) không đúng với vector pháp tuyến  $\vec{n} = \vec{ab} \times \vec{ap}$  của mặt phẳng  $(a, b, p)$  và với  $v' \in \widetilde{(a, b, p)}$ . Chứng minh tương tự như (ii) ở trên, ta có  $V(a, b, p, v) \leq 0$ , và do đó  $v$  không nằm phía dương của  $f(a, b, p)$  với  $v' \in \widetilde{(a, b, p)}$ . Do đó, mặt  $f(a, b, p)$  không là mặt định hướng qua cạnh  $e = [a, b]$ .  $\square$

## 2.2 Thuật toán tìm bao lồi của tập hữu hạn điểm trong không gian 3 - chiều bằng miền hạn chế trong không gian 2 - chiều

Thuật toán này được cải biên từ thuật toán gói quà tìm bao lồi của tập hữu hạn điểm trong không gian 3 - chiều, ở bước tìm mặt đầu tiên  $F_1$  qua cạnh cực biên đầu tiên  $e$ , dựa trên ý tưởng của phương pháp mặt định hướng. Bao lồi được tạo thành bởi các mặt, một trong số những mặt này là mặt định hướng được xác định từ miền hạn chế trong không gian 2 - chiều. Ý tưởng của thuật toán là xuất phát từ cạnh cực biên đầu tiên  $e = [a, b]$  ta tìm điểm  $p \in P \setminus \{a, b\}$  sao cho  $V(a, b, p, v) > 0$  với mọi  $v \in P \setminus \{a, b, p\}$ . Khi đó,  $F_1 = (a, b, p)$  là mặt đầu tiên của  $\text{conv}P$ . Để không phải xét với mọi  $v \in P \setminus \{a, b, p\}$ , chúng tôi sử dụng miền hạn chế  $\widetilde{(e, p)}$  của mặt  $(a, b, p)$ , với mục đích là chỉ phải tính  $V(a, b, p, v)$ , với mọi  $v \in P \setminus \{a, b, p\}$  mà  $v' \in \widetilde{(e, p)}$ , còn nếu  $v' \notin \widetilde{(e, p)}$  thì không phải tính  $V(a, b, p, v)$ .

Với bài toán bao lồi trong không gian 3 - chiều, một hình hộp chữ nhật chứa các điểm của  $P$  có thể được coi như một biên. Nói riêng, hình hộp chữ nhật có các mặt xung quanh là  $x = x_{\max}$ ,  $x = x_{\min}$ ,  $y = y_{\max}$ ,  $y = y_{\min}$ ,  $z = z_{\max}$ ,  $z = z_{\min}$  được coi như biên của  $\text{conv}P$ .

## Thủ tục xác định mặt định hướng

### Bài toán

**Cho:**  $P = \{p_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}^3 : i = 0, 1, \dots, n-1\}$ ,  $n \geq 4$ .

**Tìm:** Một mặt định hướng  $f(e, p)$  qua cạnh đầu tiên  $e$ .

Nếu  $v \in P$  và có chỉ số là  $i$  (tức là  $v = p_i$ ) thì đặt  $v_{next} := p_{i+1}$ . Theo Mệnh đề 1.20, chúng ta chọn phần tử đầu tiên của  $\varepsilon(P)$ . Dựa vào Mệnh đề 2.3, thủ tục 2 xác định mặt định hướng qua cạnh đầu tiên  $e$  sẽ được trình bày ở dưới đây. Nếu không tồn tại mặt định hướng thì sẽ xác định một mặt qua  $e$ .

### Mô tả thủ tục ([6])

Dựa vào Định nghĩa 2.2, thủ tục xác định mặt định hướng được mô tả như sau

- Tìm cạnh cực biên đầu tiên  $e := [a, b]$  của  $\text{conv}P$  (sử dụng Thủ tục 1).
- Tìm  $p \in P \setminus \{a, b\}$  sao cho  $(e, p)$  giao với  $mn$  (trong đó,  $mn$  là giao của hai mặt  $x_{\max}$  và  $z_{\max}$ ) và  $v$  nằm phía dương của mặt  $f = (e, p)$ , (nghĩa là, tìm  $v \in P \setminus \{a, b, p\}$  sao cho  $v' \notin \widetilde{(e, p)}$ ).

Khi đó, mặt  $f = (e, p)$  là một mặt định hướng qua cạnh đầu tiên  $e := [a, b]$ .

### Thủ tục 2: Xác định mặt định hướng ([6])

Cho  $P \in \mathbf{E}^3$ , giả sử  $e := [a, b]$  là cạnh đầu tiên của bao lồi  $\text{conv}P$ .

1. Lấy  $p_0 \in P \setminus \{a, b\}$ .  $l := 0$ .
2. Xét  $f = (e, p_l)$ . Giả sử  $n_{l_x}$  và  $n_{l_y}$  là hoành độ và tung độ của tích có hướng

hai vectơ  $\overrightarrow{ab} \times \overrightarrow{ap_l}$ .

**If**  $n_{l_x} > 0$  và  $n_{l_y} \neq 0$



**While**  $v \in P$  **do**  
**If**  $v' \notin \widetilde{(e, p_l)}$  // do Mệnh đề 2.3 (i),  $v$  nằm phía dương của mặt  $f(e, p_l)$   
đặt  $v := v_{next}$   
**Else, if**  $v$  không nằm phía dương của mặt  $f(e, p_l)$   
// do Định nghĩa 2.2,  $f(e, p_l)$  không là mặt định hướng  
đặt  $l := l + 1$  **goto 2**  
**else**, đặt  $v := v_{next}$   
//  $f(e, p_l)$  là mặt định hướng qua  $e$   
**Else** // kiểm tra nếu  $f(e, p)$  là mặt của  $\text{conv}P$   
**While**  $v \in P \setminus \{a, b, p_l\}$  **do**  
**If**  $V(a, b, p_l, v) > 0$  // tức là,  $v$  nằm phía dương của mặt  $f(e, p_l)$   
đặt  $v := v_{next}$   
**Else**, đặt  $l := l + 1$  **goto 2**.  
//  $f(e, p_l)$  là mặt qua cạnh  $e$ .

## Thuật toán tìm bao lồi bằng miền hạn chế

### Bài toán

**Cho:**  $P := \{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\} \subset \mathbf{E}^3$ ,  $n \geq 4$ .

**Tìm:**  $Q$  là tập tất cả các mặt của  $\text{conv}P$ .

### Mô tả thuật toán ([6])

- Tìm cạnh cực biên đầu tiên  $e$  của  $\text{conv}P$  (sử dụng Thủ tục 1).
- Tìm mặt định hướng qua  $e$  (sử dụng Thủ tục 2). Từ đó tìm được mặt đầu tiên qua  $e$ .
- Tìm các mặt còn lại của  $\text{conv}P$  giống như thuật toán gói quà.

## Thuật toán 2: Tìm bao lồi bằng miền hạn chế ([6])

1. Đặt  $P := \{p'_0, p'_1, \dots, p'_{n-1}\}$  với  $p'_i = (0, y_i, z_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  và  $[p'_0, p'_1]$  được xác định bởi (4). Đặt  $e := [p_0, p_1]$ .

2. Xét  $Q := \phi$  và  $\varepsilon(P) := \phi$ ;

gọi Thủ tục 2 để tìm mặt  $F_1$ ;

gán các cạnh của  $F_1$  vào  $\varepsilon(P)$ ;

gán  $Q = Q \cup F_1$ ;

**while** ( $Q \neq \phi$ ) **do**

**begin** lấy  $F_1$  từ tập  $Q$ ;

$T$  đặt là tập các cạnh của  $F_1$ ;

**for each**  $e \in T \cap \varepsilon(P)$  **do** //  $e$  được chọn trong thuật toán gói quà

**begin** gọi Thủ tục 2 để tìm mặt  $F_2$  có chung cạnh  $e$  với  $F_1$ ;

        // thuật toán gói quà bởi mặt định hướng

        gán vào  $\varepsilon(P)$  tất cả các cạnh của  $F_2$  chưa có trong  $\varepsilon(P)$

        và xoá tất cả các cạnh của  $F_2$  đã có trong  $\varepsilon(P)$ ;

        gán  $Q = Q \cup F_2$ ;

**end**;

    output  $F_1$ ;

**end**;

Trong không gian 3 - chiều, chúng tôi nhìn mặt phẳng  $Oyz$  từ phía  $x \approx +\infty$  và nhìn trục  $Oy$  từ phải qua trái. Nếu  $\bar{u}_y < u_y$ ,  $(\widetilde{a, b, p})$  nằm phía dưới (tương ứng, phía trên) đường định hướng  $\bar{u}_p u_p$  và  $v_y < v_y^*$  (tương ứng,  $v_y > v_y^*$ ) thì  $v' \notin (\widetilde{a, b, p})$ . Ngược lại, nếu  $\bar{u}_y > u_y$ ,  $(\widetilde{a, b, p})$  nằm phía dưới (tương ứng, phía trên) đường định hướng  $\bar{u}_p u_p$  và  $v_y > v_y^*$  (tương ứng,  $v_y < v_y^*$ ) thì  $v' \notin (\widetilde{a, b, p})$ .

Theo (6), ta có  $\bar{u}_y - u_y = \frac{(z_{\max} - z_{\min})n_z}{n_y}$  và  $v_y^* = \frac{(d - x_{\max}n_x - v_z n_z)}{n_y}$ . Suy ra, từ

Mệnh đề 2.5 (i), chúng ta kết luận

nếu  $u_p$  nằm phía trên (tương ứng, phía dưới) mặt phẳng  $(a, b, p)$ ,

$$\left( v_y - \frac{d - x_{\max}n_x - v_z n_z}{n_y} \right) \frac{n_z}{n_y} x_{\max} > 0 \quad (9)$$

$$\text{(tương ứng, } \left( v_y - \frac{d - x_{\max}n_x - v_z n_z}{n_y} \right) \frac{n_z}{n_y} x_{\max} < 0 \text{)}$$

thì  $v' \notin \widetilde{(a, b, p)}$ .

Thay (1) (tương ứng, (2)) vào (9) (tương ứng, (8)), kiểm tra xem  $v'$  có thuộc miền hạn chế của  $(e, p)$  (tương ứng,  $v$  nằm phía dương của mặt  $f(e, p)$ ) hay không. Từ Mệnh đề 2.3 (i), nếu  $n_y \neq 0$  và  $n_x > 0$  thì  $v$  nằm phía dương của mặt  $f(e, p)$  với mọi  $v \in P$ ,  $v' \notin \widetilde{(a, b, p)}$ . Sau đó, từ Thủ tục 2, kiểm tra xem  $v = (v_x, v_y, v_z) \in P$  nằm phía dương của mặt  $f(e, p)$  hay không và  $(e, p)$  là mặt định hướng hay không, chúng tôi sử dụng (8) và (9) như sau

if  $n_x > 0$ ,  $n_y \neq 0$  then

if  $n_y v_y < d - x_{\max} n_x - v_z n_z$

then  $v$  nằm phía dương của mặt  $f(e, p)$

else, if  $n_x v_x < d - v_y n_y - v_z n_z$  (10)

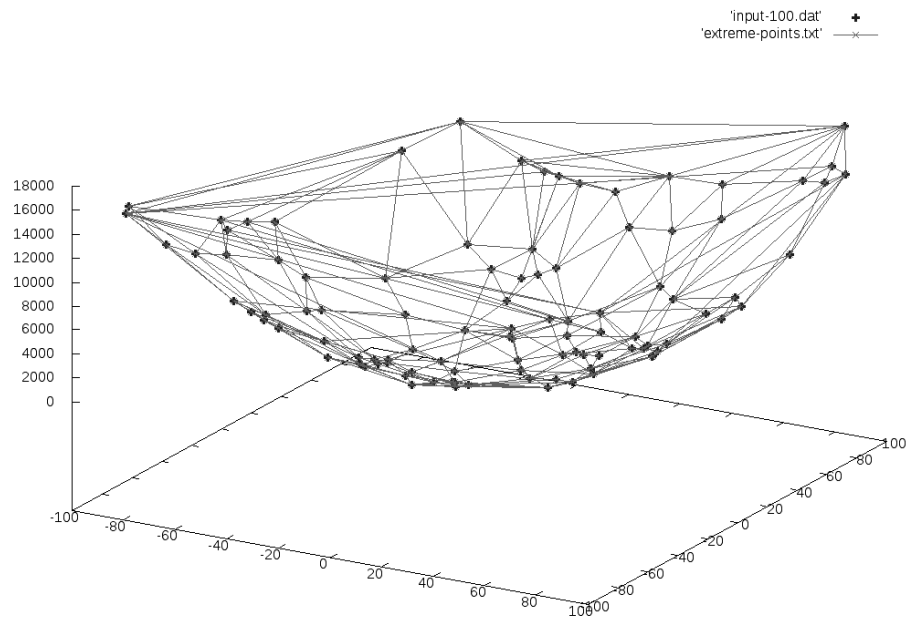
then  $v$  nằm phía dương của mặt  $f(e, p)$

else  $f(e, p)$  không là mặt định hướng,

// Từ Mệnh đề 2.3 (iii),  $f(e, p)$  không là mặt đầu tiên

khi đó  $(n_x, n_y, n_z) = \vec{ab} \times \vec{ap}$  và  $d := p_x n_x + p_y n_y + p_z n_z$ .

**Ví dụ.** Trong không gian 3 - chiều  $E^3$ , cho bộ điểm P ngẫu nhiên phân bố đều gồm 100 điểm (xem phụ lục). Thực hiện tính toán sử dụng thuật toán 2 (code của thuật toán này được cho trong bài báo [6] của P. T. An và L. H. Trang) thu được kết quả bao lồi có 196 mặt và 294 cạnh; tổng số lượt điểm không cần phải xét trong toàn bộ chương trình là 15385 (vì mỗi cạnh bao lồi đang xét, nếu hạn chế được thì có một miền hạn chế khác với những cạnh khác) (xem hình 19).



Hình 19. Biểu diễn bao lồi conv P

### 2.3 Kết quả tính toán

Thuật toán gói quà và thuật toán mới trình bày trong mục 2.2 được thực hiện trong C (việc thực hiện thuật toán gói quà có trong [7]). Code và chương

trình chạy bởi GNU C trong SuSe Linux 10.0 và được thực hiện trên một bộ xử lý Pentium IV.

Tập  $P = \{p_i = (x_i, y_i, z_i) : x, y, z \in \mathbf{R}, z_i = x_i^2 + y_i^2, i = 0, 1, \dots, n-1\} \subset \mathbf{E}^3$  gồm những điểm ngẫu nhiên nằm trên mặt của paraboloid và do đó tất cả các điểm của  $P$  là điểm cực biên của bao lồi  $\text{conv} P$ . Bảng 1 cho thấy thuật toán tìm bao lồi bằng miền hạn chế được mô tả trong mục 2.2 và thực hiện bởi (10) chạy nhanh hơn đáng kể thuật toán gói quà.

Input (số điểm ngẫu nhiên của $P$ trong 3D)	Thuật toán gói quà	Thuật toán miền hạn chế
n	Thời gian thực hiện thuật toán tính theo giây	
2000	2.859683	<b>2.770367</b>
5000	19.908366	<b>19.108360</b>
7000	45.485017	<b>42.728962</b>
11000	108.292630	<b>99.300761</b>
15000	218.984432	<b>183.929030</b>
17000	288.311208	<b>245.224522</b>

Bảng 1: Thời gian chạy của thuật toán mới được trình bày trong mục 2.2 và thuật toán gói quà trình bày trong [11] (tính theo giây) với  $P = \{p_i = (x_i, y_i, z_i) : x, y, z \in \mathbf{R}, z_i = x_i^2 + y_i^2, i = 0, 1, \dots, n-1\} \subset \mathbf{E}^3$ , khi  $\{(x_i, y_i) : x, y \in \mathbf{R}, i = 0, 1, \dots, n-1\}$  là tập điểm ngẫu nhiên nằm trong hình vuông kích thước 200x200.

## KẾT LUẬN

Trong luận văn này, chúng tôi nghiên cứu về ”**Mối liên hệ giữa miền hạn chế trong không gian 2 - chiều và bao lồi của tập hữu hạn điểm trong không gian 3 - chiều**” và đã đạt được một số kết quả, cũng như đưa ra một số hướng nghiên cứu phát triển luận văn. Cụ thể như sau.

### 1. Kết quả đạt được

- Trình bày lại một cách chi tiết thuật toán gói quà tìm bao lồi của tập hữu hạn điểm trong không gian 3 – chiều và đưa ra ví dụ minh họa cho thuật toán này (mục 1.4).
- Chứng minh lại một số tính chất của miền hạn chế và mặt định hướng trong không gian  $E^3$  (mục 2.1).
- Trình bày lại một cách chi tiết thuật toán tìm bao lồi trong không gian 3 – chiều bằng miền hạn chế trong không gian 2 - chiều và đưa ra ví dụ minh họa cho thuật toán này (mục 2.2).
- Trình bày lại một số kết quả tính toán của hai thuật toán đã được thực thi trên máy tính (mục 2.3).

### 2. Hướng phát triển luận văn

- Nghiên cứu mặt định hướng trong các mặt phẳng  $Oxy$ ,  $Oxz$ .
- Sử dụng miền hạn chế để tìm bao lồi của tập hữu hạn điểm trong không gian nhiều chiều.
- Sử dụng mặt định hướng trong việc xây dựng tam giác phân Delaunay.

## PHỤ LỤC

Bộ điểm P và các mặt của bao lồi convP trong ví dụ của mục 2.2

```
% Running time: 0.004575

% The total number of non-visiting points: 15385

%% Vertices:          V = 100
%% index:    x        y        z
18.153799    96.074402    10154.309570
46.582401    -34.160000    2557.671387
8.377230     11.709500     251.124939
44.406700    28.217699     2509.305664
80.825203    31.765699     6872.825684
76.652603    84.576897     12828.441406
66.527496    10.952200     3884.068848
-4.532080    -8.408730     131.042053
-25.853100   -25.150200    1464.623169
-36.320499   13.588200     2100.307129
55.629799    -68.258003    6595.734375
29.638800    78.324402     7328.852539
-53.452599   -13.298300    3623.670166
72.086197    -68.891602    8581.366211
36.326801    -88.066399    7992.571289
-12.120300   88.586304     8893.818359
-8.838850    55.113701     3710.414307
-81.314598   -49.418400    9692.999023
-2.324670    24.728500     892.618286
-19.988701   88.407997     9208.162109
94.976303    44.037800     10217.828125
6.015670     -26.323400    500.100647
-17.104900   20.224001     1119.449463
71.483902    -7.689850     4299.997559
88.290398    -71.363098    11312.244141
36.862701    16.516600     1370.849731
-29.988100   -92.322304    9104.084961
14.113300    -73.636902    4920.376465
-50.194000   24.038500     3943.469482
-39.651501   -95.950302    10547.619141
84.479202    99.026001     16762.740234
40.352001    5.041690      1260.022583
-25.450800   87.936699     9435.228516
-4.551970    59.420601     4128.834961
47.455299    47.711102     4387.193848
-88.603798   -15.426200    9084.306641
-36.076698   54.585701     5199.421875
-28.435801   -31.300900    1934.402832
29.786699    18.504999     1069.759277
12.737700    78.853500     6903.339355
```

-15.903300	63.332699	5008.811523
99.493500	3.684680	8796.552734
88.566803	78.233803	13570.587891
-2.135910	-26.318100	566.311890
-0.528460	-78.862801	5653.184570
29.715900	-67.466698	4594.742188
-23.523100	-3.543340	872.712891
-69.084503	68.020798	10821.339844
-88.282700	-2.192490	8895.308594
16.557600	-89.454803	7420.413086
-74.552399	-5.358090	6493.166992
33.363602	-5.864630	751.535156
46.321301	-17.297800	1802.428223
47.215801	80.566200	8842.208984
7.530930	-19.962200	258.351379
-84.442902	-90.246300	15627.998047
-91.842796	-13.769400	9672.494141
55.342999	17.146099	2878.672607
71.227798	28.863400	5330.027832
5.617640	-54.578999	2562.394043
-81.139000	-29.131399	8229.511719
-4.562920	-95.767799	8540.491211
-24.302200	50.553501	3890.946289
-65.807602	-2.230650	5161.574707
-33.631100	-94.699699	9805.473633
19.682600	-79.142601	5839.137695
-94.470398	-70.985397	14589.791016
87.833199	84.357498	14494.171875
38.157700	55.585300	4578.808594
86.289703	-38.797001	7657.504395
-55.033100	-19.936001	3982.169922
98.286003	75.501099	14827.955078
-54.259499	-48.801102	5643.778320
75.897202	-14.608700	4996.812988
-13.380000	51.760300	3480.996094
-22.619301	-28.557199	1424.960693
-22.104900	-23.027599	1154.322021
64.639999	-35.194401	4412.370605
68.530998	-97.036697	12571.349609
1.285370	89.252998	8711.126953
-20.539200	-65.779999	4526.815430
28.504700	-67.494003	4542.266602
81.780899	-21.753500	6056.961426
85.610703	-45.856300	8090.629883
-12.790300	40.763802	2353.924805
94.109100	-81.855499	13828.087891
21.865801	-3.960470	251.226654
-21.362801	-39.320499	1999.912476
-80.233902	-70.789497	11905.107422
16.480301	30.495800	1296.742920
-25.602501	-90.043404	8409.979492
12.378700	38.461300	1840.094604
25.860901	20.242300	979.607300
90.542000	5.852930	7241.002930
40.614498	93.062698	10610.575195
-57.552700	87.171700	12346.009766
-84.277199	9.037550	8321.750977
-34.029202	87.674698	10000.595703



```
81.024399  -92.559196  13476.042969
-0.958653  23.921101   826.023193
```

```
%% Faces:    F = 196
%% List of all hull faces:
%%   v0     v1     v2     (vertex indices)
%%   7       2      86
%%   86      2      92
%%   92      2      89
%%   89      2      99
%%   99      2      22
%%   22      2      7
%%   22      7      46
%%   46      7      76
%%   76      7      43
%%   43      7      54
%%   54      7      86
%%   54      86     51
%%   51      86     31
%%   31      86     38
%%   38      86     92
%%   38      92     3
%%   3       92     89
%%   3       89     68
%%   68      89     91
%%   91      89     99
%%   91      99     18
%%   18      99     22
%%   18      22     84
%%   84      22     62
%%   62      22     9
%%   9       22     46
%%   9       46     12
%%   12      46     8
%%   8       46     76
%%   8       76     75
%%   75      76     43
%%   75      43     87
%%   87      43     59
%%   59      43     21
%%   21      43     54
%%   21      54     1
%%   1       54     52
%%   52      54     51
%%   52      51     31
%%   52      31     23
%%   23      31     6
%%   6       31     57
%%   57      31     25
%%   25      31     38
%%   25      38     3
%%   25      3      57
%%   57      3      58
%%   58      3      34
%%   34      3      68
%%   34      68     53
%%   53      68     11
%%   11      68     39
```

⊗⊗	39	68	91
⊗⊗	39	91	33
⊗⊗	33	91	16
⊗⊗	16	91	84
⊗⊗	84	91	18
⊗⊗	16	84	74
⊗⊗	74	84	62
⊗⊗	74	62	40
⊗⊗	40	62	36
⊗⊗	36	62	28
⊗⊗	28	62	9
⊗⊗	28	9	63
⊗⊗	63	9	12
⊗⊗	63	12	70
⊗⊗	70	12	8
⊗⊗	70	8	37
⊗⊗	37	8	75
⊗⊗	37	75	87
⊗⊗	37	87	72
⊗⊗	72	87	80
⊗⊗	80	87	59
⊗⊗	80	59	44
⊗⊗	44	59	27
⊗⊗	27	59	81
⊗⊗	81	59	1
⊗⊗	1	59	21
⊗⊗	81	1	45
⊗⊗	45	1	10
⊗⊗	10	1	77
⊗⊗	77	1	52
⊗⊗	77	52	73
⊗⊗	73	52	23
⊗⊗	73	23	93
⊗⊗	93	23	6
⊗⊗	93	6	4
⊗⊗	4	6	58
⊗⊗	58	6	57
⊗⊗	4	58	34
⊗⊗	4	34	20
⊗⊗	20	34	42
⊗⊗	42	34	5
⊗⊗	5	34	53
⊗⊗	5	53	94
⊗⊗	94	53	11
⊗⊗	94	11	0
⊗⊗	0	11	39
⊗⊗	0	39	79
⊗⊗	79	39	33
⊗⊗	79	33	15
⊗⊗	15	33	40
⊗⊗	40	33	16
⊗⊗	40	16	74
⊗⊗	15	40	19
⊗⊗	19	40	32
⊗⊗	32	40	97
⊗⊗	97	40	36
⊗⊗	97	36	95
⊗⊗	95	36	47

⌘⌘	47	36	28
⌘⌘	47	28	96
⌘⌘	96	28	63
⌘⌘	96	63	50
⌘⌘	50	63	70
⌘⌘	50	70	60
⌘⌘	60	70	72
⌘⌘	72	70	37
⌘⌘	60	72	17
⌘⌘	17	72	88
⌘⌘	88	72	29
⌘⌘	29	72	80
⌘⌘	29	80	26
⌘⌘	26	80	90
⌘⌘	90	80	44
⌘⌘	90	44	61
⌘⌘	61	44	49
⌘⌘	49	44	27
⌘⌘	49	27	65
⌘⌘	65	27	81
⌘⌘	65	81	45
⌘⌘	65	45	14
⌘⌘	14	45	10
⌘⌘	14	10	78
⌘⌘	78	10	13
⌘⌘	13	10	77
⌘⌘	13	77	83
⌘⌘	83	77	69
⌘⌘	69	77	82
⌘⌘	82	77	73
⌘⌘	82	73	93
⌘⌘	82	93	41
⌘⌘	41	93	4
⌘⌘	41	4	20
⌘⌘	41	20	71
⌘⌘	71	20	42
⌘⌘	71	42	67
⌘⌘	67	42	5
⌘⌘	67	5	30
⌘⌘	30	5	94
⌘⌘	30	94	0
⌘⌘	30	0	95
⌘⌘	95	0	97
⌘⌘	97	0	19
⌘⌘	19	0	15
⌘⌘	15	0	79
⌘⌘	97	19	32
⌘⌘	30	95	55
⌘⌘	55	95	66
⌘⌘	66	95	47
⌘⌘	66	47	56
⌘⌘	56	47	48
⌘⌘	48	47	96
⌘⌘	48	96	50
⌘⌘	48	50	35
⌘⌘	35	50	60
⌘⌘	35	60	56
⌘⌘	56	60	17

```
%% 56 17 66
%% 66 17 88
%% 66 88 55
%% 55 88 29
%% 55 29 78
%% 78 29 61
%% 61 29 64
%% 64 29 26
%% 64 26 61
%% 61 26 90
%% 78 61 49
%% 78 49 14
%% 14 49 65
%% 55 78 98
%% 98 78 13
%% 98 13 24
%% 24 13 83
%% 24 83 85
%% 85 83 69
%% 85 69 41
%% 41 69 82
%% 85 41 71
%% 85 71 30
%% 30 71 67
%% 85 30 55
%% 85 55 98
%% 85 98 24
%% 35 56 48
```

```
%% Edges: E = 294
```

```
showpage
```

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

### TIẾNG VIỆT

- [1] P. T. An (2010-2012), *Bài giảng môn hình học tính toán*, Viện Toán học, Hà Nội.
- [2] N. H. Điền (2005), *Một số chuyên đề hình học tổ hợp*, NXB Giáo dục.
- [3] Đ. V. Lư và P. H. Khải (2000), *Giải tích lồi*, NXB Khoa học và kỹ thuật.

### TIẾNG ANH

- [4] P. T. An (2007), *A modification of Graham's algorithm for determining the convex hull of a finite planar set*, *Annales Mathematicae et Informaticae*, 34 pp. 269-274.
- [5] P. T. An (2010), *Method of Orienting Curves for determining the convex hull of a finite set of points in the plane*, *Optimization*, 59 (2) pp. 175-179.
- [6] P. T. An và L. H. Trang (2011), *An efficient convex hull algorithm for finite points sets in 3D based on the method of orienting curves*, *Optimization*, DOI: 10.1080/02331934.2011.623163.
- [7] T. Lambert, Gift wrapping algorithm in three dimensions, <http://www.cse.unsw.edu.au/~lambert/java/3d/giftwrap.html>.
- [8] S. R. Ley (1982), *Convex sets and their applications*, John Wiley & Sons.
- [9] P. McMullen và G. C. Shephard (1971), *Convex Polytopes and the Upper Bound Cojnecture*, Cambridge University Press.

- [10] J. O'Rourke (1998), *Computational Geometry in C*, Cambridge University Press, 2<sup>nd</sup> Edition.
- [11] F. P. Preparata và M. L. Shamos (1988), *Computational Geometry – An Introduction*, Springer – Verlag, New York, 2<sup>nd</sup> Edition.
- [12] K. Sugihara (1994), *Robust gift wrapping for the three-dimensional convex hull*, Journal of Computer and System Sciences, 49 pp. 391-407.
- [13] J. V. Tiel (2004), *Convex Analysis*, Royal Netherlands Meteorological Institute.
- [14] F. A. Valentine (1964), *Convex Sets*, Mc Graw-Hill, New York.