VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

DƯƠNG TRỌNG LUYỆN

PHƯƠNG PHÁP BIẾN PHÂN TRONG VIỆC TÌM NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2011

VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

DƯƠNG TRỌNG LUYỆN

PHƯƠNG PHÁP BIẾN PHÂN TRONG VIỆC TÌM NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TSKH. Nguyễn Minh Trí

HÀ NỘI - 2011

LỜI GIỚI THIỆU

Lý thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng được nghiên cứu đầu tiên trong các công trình của J.D'Alembert (1717 - 1783), L.Euler (1707 - 1783), D.Bernoulli (1700 - 1782), J.Lagrange (1736 - 1813), P.Laplace (1749 - 1827), S.Poisson (1781 - 1840) và J.Fourier (1768 - 1830), như là một công cụ chính để mô tả cơ học cũng như mô hình giải tích của vật lý. Vào giữa thế kỷ XIX với sự xuất hiện các công trình của Riemann, lý thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng đã chứng tỏ là một công cụ thiết yếu của nhiều ngành toán học. Cuối thế kỷ XIX, H.Poincaré đã chỉ ra mối quan hệ biện chứng giữa lý thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng và các ngành toán học khác. Sang thế kỷ XX, lý thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng phát triển vô cùng mạnh mẽ nhờ có công cụ giải tích hàm, đặc biệt là từ khi xuất hiện lý thuyết hàm suy rộng do S.L. Sobolev và L.Schwartz xây dựng.

Khi xét một bài toán phương trình đạo hàm riêng (có thể đó là một bài toán biên, bài toán điều kiện ban đầu, bài toán điều kiện hỗn hợp, ...) ta thường gặp những khó khăn khác nhau về nghiệm của nó nhưng nhìn chung các vấn đề đặt ra đối với nghiệm của một bài toán là:

- Sự tồn tại nghiệm của bài toán.
- Tính duy nhất nghiệm.
- Tính trơn của nghiệm.

Mục đích của luận văn nghiên cứu sự tồn tại nghiệm không tầm thường của bài toán dạng:

$$\begin{cases} L_{f,h}(u) + g(u) = \Delta_x u + f^2(x)\,\Delta_y u + h^2(x)\,\Delta_z u + g(u) = 0 \text{ trong } \Omega, \\ \hfill u = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

trong đó Ω là miền giới nội với biên $\partial\Omega$ trơn trong $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^{n_3}$, với $n_1 \geq 1, n_2 \geq 1, n_3 \geq 1$, và $\{0\} \in \Omega$, $g(u) \in C(\mathbb{R})$, $g(0) = 0$,

$$f(x) = f(x_1, ..., x_{n_1}) \in C^2(\mathbb{R}^{n_1}), h(x) = h(x_1, ..., x_{n_1}) \in C^2(\mathbb{R}^{n_1}),$$

$$x = (x_1, .., x_{n_1}), \; y = (y_1, ..., y_{n_2}), z = (z_1, ..., z_{n_3}),$$

$$u(x, y, z) = u(x_1, .., x_{n_1}, \; y_1, ..., y_{n_2}, z_1, ..., z_{n_3}),$$

$$\Delta_x = \sum_{j=1}^{n_1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \; \Delta_y = \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}, \Delta_z = \sum_{j=1}^{n_3} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}.$$

Luận văn bao gồm 2 chương chính sau đây:

Chương 1. Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm không tầm thường của bài toán:

$$\begin{cases} L_f(u) + g(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g(u) = 0 \text{ trong } \Omega, \\ \hfill u = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

trong đó $g(u) \in C(\mathbb{R})$, $g(0) = 0$, $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$, Ω là miền giới nội trong $\mathbb{R}^2$ với biên $\partial\Omega$ trơn và $\{0\} \in \Omega$.

Kết quả đạt được: Chỉ ra một số trường hợp đặc biệt của hàm $f(x)$, $g(u)$ và miền Ω mà bài toán (1.1) không có nghiệm không tầm thường, đồng thời cũng chỉ ra sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán trên nhờ sử dụng phương pháp biến phân.

Chương 2. Mục đích chính của chương là xét bài toán tổng quát:

$$\begin{cases} L_{f,h}(u) + g(u) = \Delta_x u + f^2(x)\Delta_y u + h^2(x)\Delta_z u + g(u) = 0 \text{ trong } \; \Omega, \\ \hfill u = 0 \text{ trên } \; \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.3)$$

trong đó Ω là miền giới nội với biên $\partial\Omega$ trơn trong $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^{n_3}$, với $n_1 \geq 1, n_2 \geq 1, n_3 \geq 1$, và $\{0\} \in \Omega$, $g(u) \in C(\mathbb{R})$, $g(0) = 0$,

$$f(x) = f(x_1, ..., x_{n_1}) \in C^2(\mathbb{R}^{n_1}), h(x) = h(x_1, ..., x_{n_1}) \in C^2(\mathbb{R}^{n_1}),$$

$$x = (x_1, .., x_{n_1}), \; y = (y_1, ..., y_{n_2}), z = (z_1, ..., z_{n_3}),$$

$$u\,(x,y,z)=u\,(x_1,..,x_{n_1},\;y_1,...,y_{n_2},z_1,...,z_{n_3}\;)\,,$$
$$\Delta_x=\sum_{j=1}^{n_1}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2},\;\Delta_y=\sum_{j=1}^{n_2}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2},\,\Delta_z=\sum_{j=1}^{n_3}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}.$$

Kết quả đạt được:

Chỉ ra được một số trường hợp đặc biệt của n_1, n_2, n_3, $f(x)$, $h(x)$ và $g(u)$ với các điều kiện nhất định thì phương trình không có nghiệm không tầm thường, đồng thời cũng chỉ ra được điều kiện tồn tại nghiệm của bài toán trên nhờ sử dụng phương pháp biến phân.

Luận văn này được hoàn thành với sự chỉ bảo nhiệt tình và chu đáo của *PGS.TSKH. Nguyễn Minh Trí.*

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn vô cùng sâu sắc đến Thầy, người Thầy đã từng bước hướng dẫn và chỉ đường cho tôi từng bước làm quen với việc nghiên cứu toán học, trong đó có chuyên ngành Phương trình vi phân Đạo hàm riêng để từ đó nẵm vững lý thuyết và tự giải được các bài toán của mình.

Tôi xin bày tỏ lòng cảm ơn chân thành đến các Thầy giáo, Cô giáo của Viện Toán học, phòng Phương trình vi phân đã động viên khuyến khích, chia sẻ kinh nghiệm và hướng dẫn tôi trong suốt quá trình học tập vừa qua. Xin gửi tới các đồng nghiệp của Khoa Tự Nhiên, Trường Đại học Hoa Lư những lời cảm ơn chân thành vì đã động viên, tạo điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

Mặc dù đã rất cố gắng nhưng luận văn cũng không tránh khỏi những thiếu sót, tôi rất mong sự đóng góp quý báu của thầy cô và đồng nghiệp.

Hà Nội, tháng 8 năm 2011

Học viên thực hiện

Dương Trọng Luyện

Chương 1
Đồng nhất thức Pohozaev và định lý nhúng cho không gian Sobolev có trọng liên hợp với toán tử Elliptic suy biến

1.1 Đồng nhất thức Pohozaev

Giả sử Ω là miền giới nội trong $\mathbb{R}^2$ với biên $\partial\Omega$ trơn và $\{0\} \in \Omega$. Ta xét bài toán sau:

$$\begin{cases} L_f(u) + g(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g(u) = 0 \text{ trong } \Omega, \\ \hfill u = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

trong đó $g(u) \in C(\mathbb{R})$, $g(0) = 0$, $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$.
Đặt $G(u) = \int\limits_0^u g(t)\,dt$ và $\upsilon = (\upsilon_x, \upsilon_y)$ là vector pháp tuyến đơn vị ngoài trên $\partial\Omega$.

Định nghĩa 1.1.1. *Giả sử k là một số thực dương, khi đó miền Ω được gọi là L_k - hình sao đối với điểm $\{0\}$, nếu bất đẳng thức $x\upsilon_x + (k+1)\,y\upsilon_y > 0$ thỏa mãn hầu khắp nơi trên $\partial\Omega$.*

Ví dụ 1. Hình tròn $B_1 = \left\{(x, y),\ x^2 + y^2 < 1\right\}$ là L_k - hình sao đối với mọi k dương.

Bổ đề 1.1.2. *(**Đồng nhất thức Pohozaev**). Giả sử $u(x, y)$ là nghiệm của bài toán (1.1) thuộc không gian $H^2(\Omega)$. Khi đó với mỗi $\beta > 0$ ta có $u(x, y)$ thỏa mãn đẳng thức:*

$$\int\limits_{\Omega}\left[(1+\beta)\,G(u)-\frac{\beta-1}{2}g(u)\,u\right]dxdy=$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^2\left(\upsilon_x^2+f^2(x)\,\upsilon_y^2\right)(x\upsilon_x+\beta y\upsilon_y)\,ds$$

$$+\int\limits_{\Omega}\left(xf(x)\,f'(x)+(1-\beta)\,f^2(x)\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2dxdy.$$

Chứng minh.

Do Ω là miền trơn và bị chặn nên theo định lý nhúng Sobolev ta có $H^2(\Omega)\subset C^{0,\alpha}(\Omega)\,,\ 0<\alpha<1$ mà:

$$\frac{\partial}{\partial x}(xG(u))=G(u)+xg(u)\,\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(yG(u))=G(u)+yg(u)\,\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Theo công thức Gauss – Green ta có:

$$\int\limits_{\Omega}G(u)\,dxdy=-\int\limits_{\Omega}xg(u)\,\frac{\partial u}{\partial x}dxdy,$$

$$\beta\int\limits_{\Omega}G(u)\,dxdy=-\beta\int\limits_{\Omega}yg(u)\,\frac{\partial u}{\partial y}dxdy.$$

Mà $u(x,y)$ là nghiệm của bài toán (1.1), nên ta có:

$$\begin{aligned}(\beta+1)\int\limits_{\Omega}G(u)\,dX &= -\int\limits_{\Omega}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+\beta y\frac{\partial u}{\partial y}\right)g(u)\,dxdy\\ &= \int\limits_{\Omega}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+\beta y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f^2(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy.\end{aligned}$$

Ta tính:

$$I_1=\int\limits_{\Omega}x\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdy$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2x\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

Theo công thức Gauss – Ostrogradskii ta có:

$$\int\limits_{\Omega} x\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdy = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdy + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \upsilon_x ds.$$

Tính :

$$I_2 = \beta\int\limits_{\Omega} y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y}dxdy$$

Ta có:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{y\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right\} = y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},$$

Do đó:

$$\int\limits_{\Omega} y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y}dxdy = -\int\limits_{\Omega} y\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy + \int\limits_{\partial\Omega} y\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\upsilon_x ds,$$

Mà

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{y\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2y\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

Nên

$$\int\limits_{\Omega} y\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdy = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdy + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} y\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \upsilon_y ds,$$

Suy ra:

$$I_2 = \frac{\beta}{2}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdy + \beta\int\limits_{\partial\Omega} y\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\upsilon_x ds - \frac{\beta}{2}\int\limits_{\partial\Omega} y\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial u}{\partial y}\upsilon_y ds.$$

Tính:

$$I_3 = \int\limits_{\Omega} xf^2(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dxdy$$

Ta có:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{xf^2(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right\} = xf^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + xf^2(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\int\limits_{\Omega} xf^2(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dxdy = -\int\limits_{\Omega} xf^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}dxdy + \int\limits_{\partial\Omega} xf^2(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\upsilon_y ds,$$

Mà:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{xf^2(x)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} = f^2(x)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2xf(x)f'(x)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2xf^2(x)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},$$

Do đó:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial\Omega} xf^2(x)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \upsilon_1 ds &= \int\limits_{\Omega} f^2(x)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy \\ &+ \int\limits_{\Omega} 2xf(x)f'(x)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy + \int\limits_{\Omega} 2xf^2(x)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy,\end{aligned}$$

Nên

$$\begin{aligned}I_3 = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} f^2(x)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy &+ \int\limits_{\Omega} xf(x)f'(x)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy \\ &+ \int\limits_{\partial\Omega} f^2(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\upsilon_y ds - \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} xf^2(x)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \upsilon_x ds.\end{aligned}$$

Tính:

$$I_4 = \beta\int\limits_{\Omega} f^2(x)\, y\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dxdy$$

Ta có:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{yf^2(x)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} = f^2(x)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2yf^2(x)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\partial\Omega} yf^2(x)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \upsilon_y ds = \int\limits_{\Omega} f^2(x)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy + \int\limits_{\Omega} 2yf^2(x)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dxdy$$

Nên ta có:

$$I_4 = -\frac{\beta}{2}\int\limits_{\Omega} f^2(x)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy + \frac{\beta}{2}\int\limits_{\partial\Omega} yf^2(x)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \upsilon_y ds.$$

Do vậy ta có:

$$(1+\beta)\int\limits_{\Omega} G(u)\,dxdy = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdy + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \upsilon_x ds$$

$$+\frac{\beta}{2}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdy + \beta\int\limits_{\partial\Omega} y\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\upsilon_x ds - \frac{\beta}{2}\int\limits_{\partial\Omega} y\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \upsilon_y ds$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} f^2(x)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy + \int\limits_{\Omega} xf(x)\,f'(x)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy + \int\limits_{\partial\Omega} f^2(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\upsilon_y ds$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} xf^2(x)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \upsilon_x ds - \frac{\beta}{2}\int\limits_{\Omega} f^2(x)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy + \frac{\beta}{2}\int\limits_{\partial\Omega} yf^2(x)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \upsilon_y ds.$$

Mà ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \upsilon_x\frac{\partial u}{\partial \upsilon}, \frac{\partial u}{\partial y} = \upsilon_y\frac{\partial u}{\partial \upsilon}.$$

Nên ta có:

$$(1+\beta)\int\limits_{\Omega} G(u)\,dxdy = \frac{\beta-1}{2}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdy +$$

$$\int\limits_{\Omega}\left[xf(x)\,f'(x) + \frac{(1-\beta)}{2}f^2(x)\right]\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^2\left(\upsilon_x^2 + f^2(x)\,\upsilon_y^2\right)(x\upsilon_x + \beta y\upsilon_y)\,ds.$$

Do $u(x,y)$ là nghiệm của bài toán nên ta có:

$$\int\limits_{\Omega}\left[(1+\beta)\,G(u) - \frac{\beta-1}{2}g(u)\,u\right]dxdy =$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^2\left(\upsilon_x^2 + f^2(x)\,\upsilon_y^2\right)(x\upsilon_x + \beta y\upsilon_y)\,ds$$

$$+\int\limits_{\Omega}\left(xf(x)\,f'(x) + (1-\beta)\,f^2(x)\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy.$$

□

Chọn $\beta = k+1$ khi đó áp dụng bổ đề trên ta có các định lý sau:

Định lí 1.1.3. *Giả sử Ω là L_k - hình sao đối với $\{0\}$, và thỏa mãn điều kiện sau:*

i. $(k+2)\,G\,(u) - \frac{k}{2} g\,(u)\,u < 0$, *khi* $u \neq 0$,

ii. $xf\,(x)\,f'\,(x) \geq kf^2\,(x)$, *trong* Ω.

Khi đó không tồn tại nghiệm không tầm thường $u \in H^2\,(\Omega)$ *cho bài toán (1.1).*

Định lí 1.1.4. *Giả sử Ω là L_k - hình sao đối với $\{0\}$, và thỏa mãn điều kiện sau:*

i. $(k+2)\,G\,(u) - \frac{k}{2} g\,(u)\,u < 0$, *khi* $u > 0$,

ii. $xf\,(x)\,f'\,(x) \geq kf^2\,(x)$, *trong* Ω.

Khi đó không tồn tại nghiệm dương không tầm thường $u \in H^2\,(\Omega)$ *cho bài toán (1.1).*

Ta xét một số trường hợp đặc biệt của $f(x)$ trong trường hợp $g\,(u) = \lambda u + |u|^{\gamma} u$.

Trường hợp 1: Với $f\,(x) = e^{-|x|^{-\delta}},\ \delta > 0$, khi đó ta có định lý sau:

Định lí 1.1.5. *Giả sử*

$$f\,(x) = e^{-|x|^{-\delta}},\ \delta > 0,\ \Omega = \left\{(x,y)\,,\ x^2 + y^2 < \left(\frac{\delta\gamma}{4+\gamma}\right)^{\frac{2}{\delta}}\right\},\ \lambda \leq 0,\ \gamma > 0.$$

Khi đó không tồn tại nghiệm không tầm thường $u \in H^2\,(\Omega)$ *cho bài toán (1.1).*

Chứng minh.

Giả sử tồn tại nghiệm không tầm thường $u \in H^2\,(\Omega)$ khi đó ta có:

$$f'\,(x) = sign(x).|x|^{-\delta-1}\delta.e^{-|x|^{-\delta}}$$

$$xf'\,(x) \geq kf\,(x)$$

$$\Leftrightarrow\ \delta|x|^{-\delta}e^{-|x|^{-\delta}} \geq k.e^{-|x|^{-\delta}} \Leftrightarrow |x| \leq \left(\frac{\delta}{k}\right)^{\frac{1}{\delta}}.$$

Mà ta có:

$$G\,(u) = \frac{\lambda u^2}{2} + \frac{|u|^{\gamma+2}}{\gamma+2},$$

Chọn $k = \frac{4}{\gamma} \Rightarrow xf'(x) \geq kf(x)$ trong Ω, khi đó $\beta = \frac{4+\gamma}{\gamma}$ thay vào ta có:

$$\int\limits_{\Omega} \left[\frac{4+2\gamma}{\gamma} \left(\frac{\lambda u^2}{2} + \frac{|u|^{\gamma+2}}{\gamma+2} \right) - \frac{2}{\gamma} \left(\lambda u^2 + |u|^{\gamma+2} \right) \right] dxdy =$$

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon} \right)^2 \left(\upsilon_x^2 + e^{-2|x|^{-\delta}} \upsilon_y^2 \right) \left(x\upsilon_x + \frac{4+\gamma}{\gamma} y\upsilon_y \right) ds$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \left(x\delta |x|^{-\delta} e^{-2|x|^{-\delta}} - \frac{4}{\gamma} e^{-2|x|^{-\delta}} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dxdy$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_{\Omega} \lambda u^2 dxdy = \frac{1}{2} \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon} \right)^2 \left(\upsilon_x^2 + e^{-2|x|^{-\delta}} \upsilon_y^2 \right) \left(x\upsilon_x + \frac{4+\gamma}{\gamma} y\upsilon_y \right) ds$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \left(x\delta |x|^{-\delta} e^{-2|x|^{-\delta}} - \frac{4}{\gamma} e^{-2|x|^{-\delta}} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dxdy,$$

Do $\lambda \leq 0$ nên: $\int\limits_{\Omega} \lambda u^2 dxdy \leq 0$, và

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon} \right)^2 \left(\upsilon_x^2 + e^{-2|x|^{-\delta}} \upsilon_y^2 \right) \left(x\upsilon_x + \frac{4+\gamma}{\gamma} y\upsilon_y \right) ds$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \left(x\delta |x|^{-\delta} e^{-2|x|^{-\delta}} - \frac{4}{\gamma} e^{-2|x|^{-\delta}} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dxdy \geq 0,$$

Nên phương trình không có nghiệm không tầm thường $u \in H^2(\Omega)$. □

Trường hợp 2: Với $f^2(x) = |x|^{2k} (1 + \varphi(x))$, trong đó $\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $\varphi(x) > -1,\ x\varphi'(x) \geq 0$ trong $\overline{\Omega}$, và k là một số thực dương.

Định lí 1.1.6. *Giả sử Ω là L_k - hình sao đối với $\{0\}$, và $f^2(x) = |x|^{2k} (1 + \varphi(x))$, $\varphi(x) > -1,\ x\varphi'(x) \geq 0$ trong $\overline{\Omega}$, $g(u) = \lambda u + |u|^\gamma u$ với $\lambda \leq 0,\ \gamma \geq \frac{4}{k}$. Khi đó bài toán (1.1) không có nghiệm không tầm thường $u \in H^2(\Omega)$.*

Chứng minh.

Giả sử tồn tại nghiệm không tầm thường $u \in H^2(\Omega)$, khi đó ta có đẳng thức sau:

$$\int\limits_{\Omega}\left[(k+2)\,G\,(u)-\frac{k}{2}g\,(u)\,u\right]dxdy=\int\limits_{\Omega}|x|^{2k}x\varphi'\,(x)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{2}dxdy$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^{2}\left(\upsilon_x^2+|x|^{2k}\,(1+\varphi\,(x))\,\upsilon_y^2\right)(x\upsilon_x+(k+1)\,y\upsilon_y)\,ds.$$

Mà:

$$G\,(u)=\frac{\lambda u^2}{2}+\frac{|u|^{\gamma+2}}{\gamma+2},$$

thay vào ta có:

$$\int\limits_{\Omega}\left[(k+2)\left(\frac{\lambda u^2}{2}+\frac{|u|^{\gamma+2}}{\gamma+2}\right)-\frac{k}{2}\left(\lambda u^2+|u|^{\gamma+2}\right)\right]dxdy=$$
$$\int\limits_{\Omega}|x|^{2k}x\varphi'\,(x)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{2}dxdy$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^{2}\left(\upsilon_x^2+|x|^{2k}\,(1+\varphi\,(x))\,\upsilon_y^2\right)(x\upsilon_x+(k+1)\,y\upsilon_y)\,ds$$

$$\Leftrightarrow\lambda\int\limits_{\Omega}u^2dxdy+\int\limits_{\Omega}|u|^{2+\gamma}\left(\frac{k+2}{\gamma+2}-\frac{k}{2}\right)dxdy=\int\limits_{\Omega}|x|^{2k}x\varphi'\,(x)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{2}dxdy$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^{2}\left(\upsilon_x^2+|x|^{2k}\,(1+\varphi\,(x))\,\upsilon_y^2\right)(x\upsilon_x+(k+1)\,y\upsilon_y)\,ds.$$

Nếu $\gamma>\frac{4}{k}$ và $\lambda\le 0$ khi đó ta có:

$$\lambda\int\limits_{\Omega}u^2dxdy+\int\limits_{\Omega}|u|^{2+\gamma}\left(\frac{k+2}{\gamma+2}-\frac{k}{2}\right)dxdy<0,$$

Nếu $u\neq 0$, điều này dẫn đến mâu thuẫn.

Nếu $\gamma=\frac{4}{k}$ và $\lambda=0$ khi đó ta có:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^{2}\left(\upsilon_x^2+|x|^{2k}\,(1+\varphi\,(x))\,\upsilon_y^2\right)(x\upsilon_x+(k+1)\,y\upsilon_y)\,ds$$
$$+\int\limits_{\Omega}|x|^{2k}x\varphi'\,(x)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{2}dxdy=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi'(x) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial v}\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Khi đó từ định lý duy nhất của Aronszain – Cordes suy ra $u \equiv 0$. Khi $x = 0$ khó khăn có thể loại bỏ nhờ sử dụng $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. $\square$

Nhận xét 1. Nếu $\{0\} \notin \Omega$, thì định lý 1.1.6 có thể không đúng. Trong trường hợp $\Omega \cap \{-\varepsilon < x < \varepsilon\} = \{\Phi\}$, có thể chứng minh được định lý về sự tồn tại nghiệm cho bất kỳ $g(u)$ được hạn chế bởi độ tăng của đa thức nhờ sử dụng định lý nhúng Sobolev.

Trong trường hợp đặc biệt $\varphi(x) = 0$, các kết quả đã được công bố trong ***[3].***

1.2 Định lý nhúng Sobolev cho không gian có trọng

Định nghĩa 1.2.1. *Ta ký hiệu $S_1^p(\Omega)$, $1 \le p < +\infty$ là không gian các hàm $u \in L^p(\Omega)$ thỏa mãn $\frac{\partial u}{\partial x} \in L^p(\Omega)$, $f(x)\frac{\partial u}{\partial y} \in L^p(\Omega)$.*
Chuẩn trong $S_1^p(\Omega)$, $1 \le p < +\infty$, được định nghĩa như sau:

$$\|u\|_{S_1^p(\Omega)} = \left[\int\limits_\Omega \left(|u|^p + \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p + \left|f(x)\frac{\partial u}{\partial y}\right|^p\right) dxdy\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Với $p = 2$ ta có tích vô hướng trong $S_1^2(\Omega)$ như sau:

$$(u,v)_{S_1^2(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right)_{L^2(\Omega)} + \left(f(x)\frac{\partial u}{\partial y}, f(x)\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{L^2(\Omega)}.$$

Định nghĩa 1.2.2. *$S_{1,0}^p(\Omega)$ được gọi là bao đóng của $C_0^1(\Omega)$ trong không gian $S_1^p(\Omega)$.*

Định nghĩa 1.2.3. *Hàm $u \in S_{1,0}^2(\Omega)$ được gọi là nghiệm yếu của bài toán (1.1) nếu đẳng thức :*

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} dxdy + \int\limits_\Omega f^2(x)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} dxdy = \int\limits_\Omega g(u)\varphi dxdy,$$

thỏa mãn với mọi $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Định lí 1.2.4. *$S_1^p(\Omega)$ là không gian Banach, $S_1^2(\Omega)$ là không gian Hilbert.*

Chứng minh. xem *[3]* $\square$

Ta xét một trường hợp đặc biệt của

$$f^2(x) = |x|^{2k}(1+\varphi(x)), \text{với } \varphi(x) \in C^2(\mathbb{R}), \varphi(x) > -1,\ x\varphi'(x) \geq 0.$$

Ta có các kết quả sau:

Định lí 1.2.5. *Giả sử $1 \leq p < k+2$. Khi đó $S_{1,0}^p(\Omega) \subset L^{\frac{(k+2)p}{k+2-p}-\tau}(\Omega)$ với τ là số dương đủ nhỏ.*

Chứng minh. Ta chứng minh với mỗi $u(x,y) \in C_0^1(\Omega)$, ta có bất đẳng thức sau:

$$\|u\|_{L^{\frac{(k+2)p}{k+2-p}-\tau}(\Omega)} \leq C\|u\|_{S_{1,0}^p(\Omega)}. \qquad (*)$$

Ta chứng minh (*) đúng với $p = 1$,

Lấy số M > 0 đủ lớn để $\Omega \subset [-M, M] \times [-M, M]$.

Khi đó ta có:

$$u(x,y) = \int\limits_{-M}^{x} \frac{\partial u}{\partial t}(t,y)\,dt, (x,y) \in \Omega,$$

Do vậy

$$|u(x,y)| \leq \int\limits_{-M}^{+M} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,y)\right| dt, (x,y) \in \Omega.$$

Tương tự ta có:

$$|u(x,y)| \leq \int\limits_{-M}^{+M} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right| dt, (x,y) \in \Omega$$

$$\Rightarrow\ |u(x,y)|^\delta \leq \left(\int\limits_{-M}^{+M} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right| dt\right)^\delta, (x,y) \in \Omega, \delta > 0.$$

Nên ta có:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} |u(x,y)|^{1+\delta} \mathrm{d}x\mathrm{d}y &\leq \int\limits_{-M}^{+M}\int\limits_{-M}^{+M} \left\{ \left(\int\limits_{-M}^{+M} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right| dt \right)^{\delta} \left(\int\limits_{-M}^{+M} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t,y) \right| dt \right) \right\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int\limits_{-M}^{+M} \left(\int\limits_{-M}^{+M} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right| dt \right)^{\delta} dx. \int\limits_{-M}^{M} \left(\int\limits_{-M}^{+M} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t,y) \right| dt \right) dy \\
&= \int\limits_{-M}^{+M}\int\limits_{-M}^{+M} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \right| dx\mathrm{d}y. \int\limits_{-M}^{+M} \left(\int\limits_{-M}^{+M} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \right| dy \right)^{\delta} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{-M}^{+M} \left(\int\limits_{-M}^{+M} \left| \tfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) \right| dy \right)^{\delta} \mathrm{d}x \\
&\leq \left(\int\limits_{-M}^{+M} |x|^{-\frac{k\delta}{1-\delta}} \left(\sqrt{1+\varphi(x)} \right)^{-\frac{\delta}{1-\delta}} \mathrm{d}x \right)^{1-\delta} \left\{ \int\limits_{-M}^{+M} |x|^{k} \sqrt{1+\varphi(x)} \left(\int\limits_{-M}^{+M} \left| \tfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)\, dy \right| \right) \mathrm{d}x \right\}^{\delta},
\end{aligned}$$

Do vậy

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} |u(x,y)|^{1+\delta} \mathrm{d}x\mathrm{d}y &\leq \int\limits_{-M}^{+M}\int\limits_{-M}^{+M} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \right| dx\mathrm{d}y. \left(\int\limits_{-M}^{+M} |x|^{\frac{-k\delta}{1-\delta}} \left(\sqrt{1+\varphi(x)} \right)^{\frac{-\delta}{1-\delta}} \mathrm{d}x \right)^{1-\delta} \\
&\qquad \left\{ \int\limits_{-M}^{+M} |x|^{k} \sqrt{1+\varphi(x)} \left(\int\limits_{-M}^{+M} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\, dy \right| \right) \mathrm{d}x \right\}^{\delta}.
\end{aligned}$$

Ta có $\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R}), \varphi(x) > -1$, nên trên $[-M, M]$, hàm số $\sqrt{1+\varphi(x)}$ là liên tục đều, nên $\exists x_0 \in [-M, M]$ để

$$\min_{[-M,M]} \sqrt{1+\varphi(x)} = \sqrt{1+\varphi(x_0)} = C_1 > 0,$$

Nên $\left(\sqrt{1+\varphi(x)} \right)^{\frac{-\delta}{1-\delta}} < C_2$, với $0 < \delta < \frac{1}{k+1}, C_2 > 0$.

Do đó với $0 < \delta < \frac{1}{k+1}$, khi đó tích phân

$$\int\limits_{-M}^{+M} |x|^{\frac{-k\delta}{1-\delta}} \left(\sqrt{1+\varphi(x)} \right)^{\frac{-\delta}{1-\delta}} \mathrm{d}x$$

là hội tụ.

Do vậy ta có:

$$\int\limits_{\Omega} |u(x,y)|^{1+\delta} d\mathrm{x}\mathrm{d}y \le C \left\| |x|^k \sqrt{1+\varphi(x)} \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^1(\Omega)}^{\delta} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^1(\Omega)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Young ta có:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^{1+\delta}(\Omega)} &\le C \left\| |x|^k \sqrt{1+\varphi(x)} \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{\delta}{1+\delta}} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{1+\delta}} \\
&\le C \left(\left\| |x|^k \sqrt{1+\varphi(x)} \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^1(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^1(\Omega)} \right).
\end{aligned}$$

Đối với p bất kỳ lấy $|u|^{\gamma}, \gamma > 1$ thay vào công thức trên và áp dụng bất đẳng thức Holder ta có:

$$\begin{aligned}
\| |u|^{\gamma} \|_{L^{1+\delta}(\Omega)} &\le C \left(\left\| |x|^k \sqrt{1+\varphi(x)} |u|^{\gamma-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^1(\Omega)} + \left\| |u|^{\gamma-1} \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^1(\Omega)} \right) \\
&\le C \left\| |u|^{\gamma-1} \right\|_{L^{p'}(\Omega)} \left(\left\| |x|^k \sqrt{1+\varphi(x)} \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^p(\Omega)} \right),
\end{aligned}$$

trong đó $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
Chọn $\gamma = \frac{p}{1-\delta p+\delta}$ ta có:

$$\left(\int\limits_{\Omega} (|u|)^{\frac{(1+\delta)p}{1-\delta p+\delta}} dx \right)^{\frac{1}{1+\delta}} \le C \left(\int\limits_{\Omega} (|u|)^{\frac{(1+\delta)p}{1-\delta p+\delta}} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\left\| |x|^k \sqrt{1+\varphi(x)} \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^p(\Omega)} \right)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \left(\int\limits_{\Omega} (|u|)^{\frac{(1+\delta)p}{1-\delta p+\delta}} dx \right)^{\frac{1}{1+\delta} - \frac{1}{p'}} &\le C \left(\left\| |x|^k \sqrt{1+\varphi(x)} \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^p(\Omega)} \right) \\
\Rightarrow \left(\int\limits_{\Omega} (|u|)^{\frac{(1+\delta)p}{1-\delta p+\delta}} dx \right)^{\frac{1-(p-1)\delta}{(1+\delta)p}} &\le C \left(\left\| |x|^k \sqrt{1+\varphi(x)} \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^p(\Omega)} \right),
\end{aligned}$$

hay

$$\|u\|_{L^{\frac{(1+\delta)p}{1-p\delta+\delta}}(\Omega)} \le C \left(\left\| |x|^k \sqrt{1+\varphi(x)} \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^p(\Omega)} \right).$$

Cho δ đủ gần $\frac{1}{k+1}$. Khi đó ta có điều phải chứng minh.

Tiếp theo ta chứng minh đẳng thức (*) đúng với $u(x,y) \in S_{1,0}^{p}(\Omega)$.

Do $S_{1,0}^{p}(\Omega)$ là bao đóng của $C_0^1(\Omega)$ trong không gian $S_1^p(\Omega)$. Nên tồn tại một dãy $\{u_n(x,y)\}_{n=0}^{\infty}, u_n(x,y) \in C_0^1(\Omega)$ mà $u_n(x,y)$ hội tụ đến $u(x,y)$ trong không gian $S_1^p(\Omega)$.

Nên ta có: $u_n(x,y)$ hội tụ đến $u(x,y)$ trong không gian $L^p(\Omega)$ và ta có:

$\|u_n\|_{S_{1,0}^p(\Omega)} \to \|u\|_{S_{1,0}^p(\Omega)}, \|u_n\|_{L^p(\Omega)} \to \|u\|_{L^p(\Omega)}$, khi $n \to \infty$.

Mặt khác ta có: $\frac{(k+2)p}{k+2-p} - \tau \geq p$, nên : $\|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|u_n - u\|_{L^{\frac{(k+2)p}{k+2-p}-\tau}(\Omega)}$.

Mà $\{u_n(x,y)\}_{n=0}^{\infty}$ là một dãy Cauchy trong không gian $S_{1,0}^{p}(\Omega)$, nên

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 > 0, \forall n > N_0, \forall p > 0$ ta có $\|u_n - u_{n+p}\|_{S_{1,0}^p(\Omega)} < \varepsilon$, theo chứng minh trên ta có: $\|u_n - u_{n+p}\|_{L^{\frac{(k+2)p}{k+2-p}-\tau}(\Omega)} < \varepsilon$.

Do vậy $\{u_n(x,y)\}_{n=0}^{\infty}$ là một dãy Cauchy trong không gian $L^{\frac{(k+2)p}{k+2-p}-\tau}(\Omega)$.

Nên ta có $\exists u_1(x,y) \in L^{\frac{(k+2)p}{k+2-p}-\tau}(\Omega)$ để $u_n(x,y)$ hội tụ đến $u_1(x,y)$ trong không gian $L^{\frac{(k+2)p}{k+2-p}-\tau}(\Omega)$ suy ra $u_1(x,y) \in L^p(\Omega)$.

Theo bất đẳng thức trên ta có:

$$\|u_n - u_1\|_{L^P(\Omega)} < C\|u_n - u_1\|_{L^{\frac{(k+2)p}{k+2-p}-\tau}(\Omega)}.$$

Do vậy ta có dãy $u_n(x,y)$ hội tụ đến $u_1(x,y)$ trong không gian $L^p(\Omega)$.

Do giới hạn của một dãy là duy nhất nên ta có: $u_n(x,y)$ hội tụ đến $u(x,y)$ trong không gian $L^{\frac{(k+2)p}{k+2-p}-\tau}(\Omega)$,

hay $\|u_n\|_{L^{\frac{(k+2)p}{k+2-p}-\tau}(\Omega)} \to \|u\|_{L^{\frac{(k+2)p}{k+2-p}-\tau}(\Omega)}$, khi $n \to \infty$.

Mà theo chứng minh trên ta có: $\|u_n\|_{L^{\frac{(k+2)p}{k+2-p}-\tau}(\Omega)} \leq C\|u_n\|_{S_{1,0}^p(\Omega)}$, cho $n \to \infty$, ta có điều phải chứng minh. □

Lưu ý 1. Trong trường hợp $1 \leq p < k+2$, phép nhúng $S_{1,0}^{p}(\Omega) \subset L^{\frac{(k+2)p}{k+2-p}+\tau}(\Omega)$ không tồn tại với τ là dương bất kỳ.

Định lí 1.2.6. *Giả sử* $1 \leq p < k+2$.

Khi đó ánh xạ nhúng $S_{1,0}^{p}(\Omega) \subset L^{\frac{(k+2)p}{k+2-p}-\tau}(\Omega)$ *là compact với mọi* τ *là dương đủ nhỏ.*

Định lí 1.2.7. *Giả sử* $p > k + 2$. *Khi đó* $S_{1,0}^{p} \subset C^{0}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Định lí 1.2.8. *Giả sử* $g(u)$ *thỏa mãn các điều kiện sau:*

i. $g\left(u\right) \in C_{loc}^{0,\alpha}\left(\mathbb{R}\right)$,

ii. $\left|g\left(u\right)\right| \leq C(1 + \left|u\right|^{m})$ *với* $1 < m < \frac{k+4}{k}$,

iii. $g\left(u\right) = \overline{\overline{o}}\left(u\right)$ *khi* $u \to 0$,

iv. Tồn tại A *sao cho với* $\left|u\right| \geq A$, $G\left(u\right) \leq \mu g\left(u\right) u$, *trong đó* $\mu \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$.

Khi đó bài toán

$$\begin{cases} L\left(u\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left|x\right|^{2k}\left(1 + \varphi\left(x\right)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\left(u\right) = 0 \ \textit{trong}\ \Omega, \\ \hfill \mathrm{u} = 0 \ \textit{trên}\ \partial\Omega, \end{cases}$$

luôn có nghiệm yếu không tầm thường.

Chứng minh.

Với $u \in S_{1,0}^{2}\left(\Omega\right)$ xét hàm sau:

$$\Phi\left(u\right) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + \left|\left|x\right|^k\sqrt{\left(1 + \varphi\left(x\right)\right)}\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2\right)dxdy - \int\limits_{\Omega} G\left(u\right)dxdy,$$

Từ các điều kiện của $g(u)$ ta có $\Phi\left(u\right)$ thỏa mãn các điều kiện (I_1), (I_2), (I_3) trong [1]. Do vậy $\Phi\left(u\right)$ có điểm tới hạn không tầm thường, nên bài toán trên có nghiệm yếu không tầm thường thuộc không gian $S_{1,0}^{2}\left(\Omega\right)$. □

Trong trường hợp đặc biệt $\varphi\left(x\right) = 0$, các kết quả đã được công bố trong ***[3].***

Chương 2
Định lý tồn tại và không tồn tại nghiệm của bài toán biên đối với một số lớp toán tử nửa tuyến tính Elliptic suy biến

2.1 Toán tử Baounedi – Goulaouic

Giả sử Ω là miền giới nội trong $\mathbb{R}^3$ với biên $\partial\Omega$ trơn và $\{0\} \in \Omega$. Ta xét bài toán sau:

$$\begin{cases} L_f(u) + g\left(u\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f^2\left(x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + g\left(u\right) = 0 \text{ trong } \Omega, \\ \hfill u = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

trong đó $g\left(u\right) \in C\left(\mathbb{R}\right),\ g\left(0\right) = 0,\ f\left(x\right) \in C^2\left(\mathbb{R}\right)$.
Đặt $G\left(u\right) = \int\limits_0^u g\left(t\right)dt,\ \upsilon = \left(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z\right)$ là vector pháp tuyến đơn vị ngoài trên $\partial\Omega$.

Định nghĩa 2.1.1. *Giả sử k là một số thực dương, khi đó miền Ω được gọi là L_k - hình sao đối với điểm $\{0\}$, nếu bất đẳng thức $x\upsilon_x + y\upsilon_y + \left(k+1\right)z\upsilon_z > 0$ thỏa mãn hầu khắp nơi trên $\partial\Omega$.*

Bổ đề 2.1.2. *Giả sử $u\left(x,y,z\right)$ là nghiệm của bài toán (2.1) thuộc không gian $H^2\left(\Omega\right)$. Khi đó với mỗi $\beta > 0$ ta có $u\left(x,y,z\right)$ thỏa mãn đẳng thức :*

$$\int\limits_{\Omega}\Big[(2+\beta)G(u)-\frac{\beta}{2}g(u)u\Big]dX=\int\limits_{\Omega}\big[xf'(x)f(x)+(1-\beta)f^2(x)\big]\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big)^2dX$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega}\left(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+f^2(x)\upsilon_z^2\right)\left(x\upsilon_x+y\upsilon_y+\beta z\upsilon_z\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^2ds,$$

trong đó $dX = dxdydz$.

Chứng minh.

Do Ω là miền trơn và bị chặn nên theo định lý nhúng Sobolev ta có: $H^2(\Omega)\subset C^{0,\alpha}(\Omega)\,, 0<\alpha<1$, mà

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(xG\left(u\right)\right)=G\left(u\right)+xg\left(u\right)\frac{\partial u}{\partial x},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(yG\left(u\right)\right)=G\left(u\right)+yg\left(u\right)\frac{\partial u}{\partial y},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(zG\left(u\right)\right)=G\left(u\right)+zg\left(u\right)\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Theo công thức Gauss - Green ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}G\left(u\right)dX &= -\int\limits_{\Omega}xg\left(u\right)\frac{\partial u}{\partial x}dX=-\int\limits_{\Omega}yg\left(u\right)\frac{\partial u}{\partial y}dX,\\ \beta\int\limits_{\Omega}G\left(u\right)dX &= -\beta\int\limits_{\Omega}zg\left(u\right)\frac{\partial u}{\partial z}dX.\end{aligned}$$

Mà $u(x,y,z)$ là nghiệm của bài toán (2.1), nên ta có:

$$\begin{aligned}(\beta+2)\int\limits_{\Omega}G\left(u\right)dX &= -\int\limits_{\Omega}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+\beta z\frac{\partial u}{\partial z}\right)g\left(u\right)dX\\ &= \int\limits_{\Omega}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+\beta z\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f^2\left(x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dX.\end{aligned}$$

Sử dụng công thức Gauss – Ostrogradskii ta có:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int\limits_{\Omega} x\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dX \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dX + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \upsilon_x ds. \\
I_2 &= \int\limits_{\Omega} x\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dX \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dX - \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} x\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \upsilon_x ds + \int\limits_{\partial\Omega} x\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\upsilon_y ds. \\
I_3 &= \int\limits_{\Omega} xf^2(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dX \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} f^2(x)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dX + + \int\limits_{\Omega} xf(x)f'(x)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dX \\
&- \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} xf^2(x)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \upsilon_x ds + \int\limits_{\partial\Omega} xf^2(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}\upsilon_z ds. \\
I_4 &= \int\limits_{\Omega} y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y}dX \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dX - \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} y\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \upsilon_y ds + \int\limits_{\partial\Omega} y\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\upsilon_x ds. \\
I_5 &= \int\limits_{\Omega} y\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dX \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dX + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \upsilon_y ds. \\
I_6 &= \int\limits_{\Omega} yf^2(x)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dX \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} f^2(x)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dX - \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} f^2(x)\,y\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \upsilon_y ds + \int\limits_{\partial\Omega} f^2(x)\,y\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\upsilon_z ds.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_7 &= \beta \int\limits_{\Omega} z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial z} dX \\
&= \frac{\beta}{2} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dX - \frac{\beta}{2} \int\limits_{\partial\Omega} z \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \upsilon_z ds + \beta \int\limits_{\partial\Omega} z \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \upsilon_x ds. \\
I_8 &= \beta \int\limits_{\Omega} z \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial u}{\partial z} dX \\
&= \frac{\beta}{2} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dX - \frac{\beta}{2} \int\limits_{\partial\Omega} z \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \upsilon_z ds + \beta \int\limits_{\partial\Omega} z \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \upsilon_y ds. \\
I_9 &= \beta \int\limits_{\Omega} z f^2(x) \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dX \\
&= -\frac{\beta}{2} \int\limits_{\Omega} f^2(x) \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dX + \frac{\beta}{2} \int\limits_{\partial\Omega} z f^2(x) \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \upsilon_z ds.
\end{aligned}
$$

Do vậy

$$
(\beta + 2) \int\limits_{\Omega} G(u)\, dX = \sum_{i=1}^{9} I_i,
$$

Mặt khác ta có:

$$
\frac{\partial}{\partial x} = \upsilon_x \frac{\partial}{\partial \upsilon},\ \frac{\partial}{\partial y} = \upsilon_y \frac{\partial}{\partial \upsilon},\ \frac{\partial}{\partial z} = \upsilon_z \frac{\partial}{\partial \upsilon}.
$$

Khi đó ta có:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} \left[(2+\beta) G(u) - \frac{\beta}{2} g(u) u \right] dX &= \int\limits_{\Omega} \left[x f'(x) f(x) + (1-\beta) f^2(x) \right] \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dX \\
&+ \frac{1}{2} \int\limits_{\partial\Omega} \left(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + f^2(x) \upsilon_z^2 \right) \left(x\upsilon_x + y\upsilon_y + \beta z \upsilon_z \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon} \right)^2 ds.
\end{aligned}
$$

□

Chú ý 2.1.1. *Đồng nhất thức vẫn đúng trong trường hợp toán tử nửa tuyến tính Elliptic là không suy biến.*

Chọn $\beta = k + 1$, áp dụng bổ đề trên ta có định lý sau:

Định lí 2.1.3. *Giả sử Ω là L_k - hình sao đối với $\{0\}$, và thỏa mãn điều kiện sau:*

$$i.\ \ (k+3)\,G\,(u) - \tfrac{k+1}{2} g\,(u)\,u < 0,\ \ khi\ \ u \neq 0,$$

$$ii.\ \ xf\,(x)\,f'\,(x) \geq kf^2\,(x)\,,\ \ trong\ \ \Omega.$$

Khi đó không tồn tại nghiệm tầm thường $u \in H^2\,(\Omega)$ cho bài toán (2.1).

Định lí 2.1.4. *Giả sử Ω là L_k - hình sao đối với $\{0\}$, và thỏa mãn điều kiện sau:*

$$i.\ \ (k+3)\,G\,(u) - \tfrac{k+1}{2} g\,(u)\,u < 0,\ \ khi\ \ u > 0,$$

$$ii.\ \ xf\,(x)\,f'\,(x) \geq kf^2\,(x)\,,\ \ trong\ \ \Omega.$$

Khi đó không tồn tại nghiệm dương không tầm thường $u \in H^2\,(\Omega)$ cho bài toán (2.1).

Ta xét một số trường hợp đặc biệt của $f(x)$ trong trường hợp $g\,(u) = \lambda u + |u|^{\gamma} u$.

Trường hợp 1. Với $f\,(x) = e^{-|x|^{-\delta}},\ \delta > 0$ ta có định lý sau:

Định lí 2.1.5. *Giả sử*

$$f\,(x) = e^{-|x|^{-\delta}},\ \delta > 0,\ \Omega = \left\{(x,y,z)\,,\ x^2+y^2+z^2 < \left(\frac{\delta\gamma}{4+\gamma}\right)^{\frac{2}{\delta}}\right\},\ \lambda \leq 0,\ \gamma > 0.$$

Khi đó không tồn tại nghiệm không tầm thường $u \in H^2\,(\Omega)$ cho bài toán (2.1).

Chứng minh.

Giả sử tồn tại nghiệm không tầm thường $u \in H^2\,(\Omega)$, khi đó ta có:

$$f'\,(x) = sign(x).|x|^{-\delta-1}\delta.e^{-|x|^{-\delta}}$$

$$xf'\,(x) \geq kf\,(x)$$

$$\Leftrightarrow\ \ \delta|x|^{-\delta} e^{-|x|^{-\delta}} \geq k.e^{-|x|^{-\delta}} \Leftrightarrow |x| \leq \left(\frac{\delta}{k}\right)^{\frac{1}{\delta}}.$$

Mà

$$G\,(u) = \frac{\lambda u^2}{2} + \frac{|u|^{\gamma+2}}{\gamma+2},$$

Chọn $k = \frac{4}{\gamma} \Rightarrow xf'(x) \geq kf(x)$ trong Ω, khi đó ta có: $\beta = \frac{4+\gamma}{\gamma}$. Do vậy:

$$\int\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{3\gamma+4}{\gamma} \right) \left(\frac{\lambda u^2}{2} + \frac{|u|^{\gamma+2}}{\gamma+2} \right) - \frac{\gamma+4}{2\gamma} \left(\lambda u^2 + |u|^{\gamma+2} \right) \right] dX =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left[xf'(x) f(x) - kf^2(x) \right] \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dX$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{\partial\Omega} \left(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + e^{-2|x|^{-\delta}} \upsilon_z^2 \right) \left(x\upsilon_x + y\upsilon_y + \frac{4+\gamma}{\gamma} z\upsilon_z \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon} \right)^2 ds$$

tương đương với:

$$\int\limits_{\Omega} \left(\lambda u^2 - \frac{\gamma}{\gamma+2} |u|^{\gamma+2} \right) dX = \int\limits_{\Omega} \left[xf'(x) f(x) - kf^2(x) \right] \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dX$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{\partial\Omega} \left(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + e^{-2|x|^{-\delta}} \upsilon_z^2 \right) \left(x\upsilon_z + y\upsilon_y + \frac{4+\gamma}{\gamma} z\upsilon_z \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon} \right)^2 ds.$$

Do $\lambda \leq 0, \gamma > 0$ nên ta có:

$$\int\limits_{\Omega} \left(\lambda u^2 - \frac{\gamma}{\gamma+2} |u|^{\gamma+2} \right) dX < 0,$$

Mà:

$$\int\limits_{\Omega} \left[xf'(x) f(x) - kf^2(x) \right] \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dX +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{\partial\Omega} \left(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + e^{-2|x|^{-\delta}} \upsilon_z^2 \right) \left(x\upsilon_x + y\upsilon_y + \frac{4+\gamma}{\gamma} z\upsilon_z \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon} \right)^2 ds > 0,$$

nên phương trình không có nghiệm tầm thường $u \in H^2(\Omega)$ do đó ta có điều phải chứng minh. □

Trường hợp 2. Với $f^2(x) = |x|^{2k}$, với k là một số thực dương khi đó ta có một số kết quả sau:

Định lí 2.1.6. *Giả sử Ω là L_k - hình sao đối với $\{0\}$, và thỏa mãn:*

$$(k+3) G(u) - \frac{k+1}{2} g(u) u < 0, \ \textit{khi } u \neq 0.$$

Khi đó không tồn tại nghiệm không tầm thường $u \in H^2(\Omega)$ cho bài toán (2.1).

Định lí 2.1.7. *Giả sử Ω là L_k - hình sao đối với $\{0\}$, và thỏa mãn:*

$$g(u) = \lambda u + |u|^\gamma u \text{ với } \lambda \le 0,\ \gamma > \frac{4}{k+1}.$$

Khi đó bài toán (2.1) không tồn tại nghiệm không tầm thường $u \in H^2(\Omega)$.

Định lý tồn tại nghiệm đối với trường hợp 2.

Ta xét bài toán sau:

Giả sử Ω là miền giới nội trong $\mathbb{R}^3$ với biên $\partial\Omega$ và $\{0\} \in \Omega$. Ta xét bài toán sau:

$$\begin{cases} L_k(u) + g(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + |x|^{2k}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + g(u) = 0 \text{ trong } \Omega, \\ \hfill u = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \end{cases} \qquad (*)$$

trong đó $g(u) \in C(\mathbb{R})$, $g(0) = 0$.

Đặt $G(u) = \int\limits_0^u g(t)\,dt$, $\upsilon = (\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$ là vectơ pháp tuyến đơn vị ngoài trên $\partial\Omega$.

Định nghĩa 2.1.8. *Ta kí hiệu $\overline{S_1^p}(\Omega)$, $1 \le p < +\infty$ là không gian các hàm $u \in L^p(\Omega)$ thỏa mãn:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} \in L^p(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial y} \in L^p(\Omega),\ |x|^k \frac{\partial u}{\partial z} \in L^p(\Omega).$$

Chuẩn trong $\overline{S_1^p}(\Omega)$, $1 \le p < +\infty$ được định nghĩa như sau:

$$\|u\|_{\overline{S_1^p}(\Omega)} = \left[\int\limits_\Omega \left(|u|^p + \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^p + \left||x|^k\frac{\partial u}{\partial z}\right|^p\right) dxdy\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Với $p = 2$ ta có tích vô hướng trong $\overline{S_1^2}(\Omega)$ như sau:

$$(u,v)_{\overline{S_1^2}(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right)_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}\right)_{L^2(\Omega)} + \left(|x|^k\frac{\partial u}{\partial z}, |x|^k\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{L^2(\Omega)}.$$

Định nghĩa 2.1.9. $\overline{S_{1,0}^p}(\Omega)$ *được gọi là bao đóng của $C_0^1(\Omega)$ trong không gian* $\overline{S_1^p}(\Omega)$.

Định nghĩa 2.1.10. *Hàm* $u \in \overline{S_{1,0}^2}(\Omega)$ *được gọi là nghiệm yếu của bài toán (*) nếu đẳng thức:*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}dxdydz + \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}dxdydz + \int\limits_{\Omega} |x|^{2k}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z}dxdydz = \int\limits_{\Omega} g(u)\,\varphi dxdydz,$$

thỏa mãn với mọi $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Định lí 2.1.11. $\overline{S_1^p}(\Omega)$ *là không gian Banach;* $\overline{S_1^2}(\Omega)$ *là không gian Hilbert.*

Chứng minh. Xem [2] □

Định lí 2.1.12. *Giả sử* $1 \le p < k+3$ *. Khi đó* $\overline{S_{1,0}^p}(\Omega) \subset L^{\frac{(k+3)p}{k+3-p}-\tau}(\Omega)$ *với mọi* τ *dương đủ nhỏ.*

Lưu ý 2. Trong trường hợp $1 \le p < k+3$, phép nhúng $\overline{S_{1,0}^p}(\Omega) \subset L^{\frac{(k+3)p}{k+3-p}+\tau}(\Omega)$ không tồn tại với mọi τ dương bất kì.

Định lí 2.1.13. *Giả sử* $1 \le p < k+3$. *Khi đó ánh xạ nhúng* $\overline{S_{1,0}^p}(\Omega) \subset L^{\frac{(k+3)p}{k+3-p}-\tau}(\Omega)$ *là compact với mọi* τ *dương đủ nhỏ.*

Định lí 2.1.14. *Giả sử* $p > k+3$. *Khi đó* $\overline{S_{1,0}^p}(\Omega) \subset C^0\left(\overline{\Omega}\right)$.

Định lí 2.1.15. *Giả sử* $g(u)$ *thỏa mãn các điều kiện sau:*

i. $g(u) \in C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R})$,

ii. $|g(u)| \le C(1+|u|^m)$ *với* $1 < m < \frac{k+5}{k+1}$,

iii. $g(u) = \overline{\overline{o}}(u)$ *khi* $u \to 0$,

iv. Tồn tại A sao cho với $|u| \ge A$, $G(u) \le \mu g(u)\,u$, *trong đó* $\mu \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$.

Khi đó bài toán

$$\begin{cases} L_k(u) + g(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + |x|^{2k}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + g(u) = 0 \text{ trong } \Omega, \\ u = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \end{cases}$$

luôn có nghiệm yếu không tầm thường.

2.2 Toán tử kiểu Grushin

Giả sử Ω là miền giới nội với biên $\partial\Omega$ trơn trong $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, với $n_1 \geq 1, n_2 \geq 1$ và $\{0\} \in \Omega$. Ta xét bài toán biên sau:

$$\begin{cases} L_f(u) + g(u) = \Delta_x u + f^2(x)\,\Delta_y u + g(u) = 0 \text{ trong } \Omega, \\ \hfill u = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

trong đó

$$x = (x_1, .., x_{n_1}),\ y = (y_1, ..., y_{n_2}),\ \Delta_x = \sum_{j=1}^{n_1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \Delta_y = \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2},$$

$$f(x) = f(x_1, ..., x_{n_1}) \in C^2(\mathbb{R}^{n_1}),\ g(u) \in C(\mathbb{R}),\ g(0) = 0,$$

$$u(x, y) = u(x_1, ..., x_{n_1}, y_1, ..., y_{n_2}).$$

Đặt $G(u) = \int\limits_0^u g(t)\,dt$, $\upsilon = \left(\upsilon_{x_1}, ..., \upsilon_{x_{n_1}}, \upsilon_{y_1}, ..., \upsilon_{y_{n_2}}\right)$ là vector pháp tuyến đơn vị ngoài trên $\partial\Omega$.

Định nghĩa 2.2.1. *Miền Ω được gọi là hình sao đối với điểm $\{0\}$, nếu bất đẳng thức $\sum\limits_{j=1}^{n_1} x_j \upsilon_{x_j} + \sum\limits_{i=1}^{n_2} y_i \upsilon_{y_i} > 0$ thỏa mãn hầu khắp nơi trên $\partial\Omega$.*

Ví dụ 2. Nếu Ω là tập lồi và $\{0\} \in \Omega$ thì Ω là hình sao đối với $\{0\}$. Nhưng một miền hình sao tổng quát thì không nhất thiết là lồi.

Định nghĩa 2.2.2. *Giả sử k là một số thực dương, khi đó miền Ω được gọi là L_k - hình sao đối với điểm $\{0\}$, nếu bất đẳng thức $\sum\limits_{j=1}^{n_1} x_j \upsilon_{x_j} + (k+1) \sum\limits_{i=1}^{n_2} y_i \upsilon_{y_i} > 0$ thỏa mãn hầu khắp nơi trên $\partial\Omega$.*

Bổ đề 2.2.3. *Giả sử $u(x, y)$ là nghiệm của bài toán (2.2) thuộc không gian $H^2(\Omega)$. Khi đó $u(x, y)$ thỏa mãn đẳng thức:*

$$\int\limits_{\Omega}\left[\left(1+\frac{n_2}{n_1}\right)G(u)-\frac{n_1+n_2-2}{2n_1}g(u)\,u\right]dxdy =$$

$$\frac{1}{n_1}\int\limits_{\Omega}(x,\nabla_x f(x))\,f(x)\,|\nabla_y u|^2 dxdy$$

$$+\frac{1}{2n_1}\int\limits_{\partial\Omega}[(x,\upsilon_x)+(y,\upsilon_y)]\left[|\upsilon_x|^2+f^2(x)\,|\upsilon_y|^2\right]\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^2 ds,$$

trong đó: $\upsilon_x=\left(\upsilon_{x_1},...,\upsilon_{x_{n_1}}\right),\ \upsilon_y=\left(\upsilon_{y_1},...,\upsilon_{y_{n_2}}\right), dxdy=dx_1....dx_{n_1}dy_1...dy_{n_2}.$

Chứng minh.

Ta có:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i G(u))=G(u)+x_i g(u)\frac{\partial u}{\partial x_i},\ i=1,...,n_1$$

Từ công thức Gauss ta có:

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i G(u))\,dxdy=\int\limits_{\partial\Omega}x_i G(u)\cos(\upsilon,x_i)\,ds=0$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\Omega}G(u)\,dxdy=-\int\limits_{\Omega}x_i g(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}ds\ ,i=1,...,n_1$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int\limits_{\Omega}G(u)\,dxdy &= -\frac{1}{n_1}\int\limits_{\Omega}g(u)\sum_{i=1}^{n_1}\left(x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dxdy\\ &= -\frac{1}{n_1}\int\limits_{\Omega}(x,\nabla_x u)\,g(u)\,dxdy.\end{aligned}$$

Tương tự ta có:

$$\beta\int\limits_{\Omega}G(u)\,dxdy=-\frac{\beta}{n_2}\int\limits_{\Omega}(y,\nabla_y u)\,g(u)\,dxdy$$

$$\Rightarrow (1+\beta)\int\limits_{\Omega}G(u)\,dxdy=-\int\limits_{\Omega}\left[\frac{1}{n_1}(x,\nabla_x u)+\frac{\beta}{n_2}(y,\nabla_y u)\right]g(u)\,dxdy$$

$$=\int\limits_{\Omega}\left[\frac{1}{n_1}(x,\nabla_x u)+\frac{\beta}{n_2}(y,\nabla_y u)\right]\left(\Delta_x u+f^2(x)\,\Delta_y u\right)dxdy.$$

Tính:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{n_1}\int\limits_{\Omega}(x,\nabla_x u)\,\Delta_x u dxdy\\
&= \frac{n_1-2}{2n_1}\int\limits_{\Omega}|\nabla_x u|^2 dxdy + \frac{1}{2n_1}\int\limits_{\partial\Omega}(x,\upsilon_x)\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^2|\upsilon_x|^2 ds.\\
I_2 &= \frac{\beta}{n_2}\int\limits_{\Omega}(y,\nabla_y u)\,\Delta_x u dxdy\\
&= \frac{\beta}{2}\int\limits_{\Omega}|\nabla_x u|^2 dxdy + \frac{\beta}{2n_2}\int\limits_{\partial\Omega}(y,\upsilon_y)\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^2|\upsilon_x|^2 ds.\\
I_3 &= \frac{\beta}{n_2}\int\limits_{\Omega}(y,\nabla_y u)\,f^2(x)\,\Delta_y u dxdy\\
&= \frac{\beta(n_2-2)}{2n_2}\int\limits_{\Omega}f^2(x)\,|\nabla_y u|^2 dxdy + \frac{\beta}{2n_2}\int\limits_{\partial\Omega}(y,\upsilon_y)\,f^2(x)\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^2|\upsilon_y|^2 ds.\\
I_4 &= \frac{1}{n_1}\int\limits_{\Omega}(x,\nabla_x u)\,f^2(x)\,\Delta_y u dxdy\\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}f^2(x)\,|\nabla_y u|^2 dxdy + \frac{1}{n_1}\int\limits_{\Omega}(x,\nabla_x f(x))\,f(x)\,|\nabla_y u|^2 dxdy\\
&+ \frac{1}{2n_1}\int\limits_{\partial\Omega}(x,\upsilon_x)\,f^2(x)\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^2|\upsilon_y|^2 ds.
\end{aligned}$$

Do đó:

$$(1+\beta)\int\limits_{\Omega} G(u)\,dxdy = \frac{n_1-2}{2n_1}\int\limits_{\Omega}|\nabla_x u|^2 dxdy + \frac{1}{2n_1}\int\limits_{\partial\Omega}(x,\upsilon_x)\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^2 |\upsilon_x|^2 ds$$

$$+\frac{\beta}{2}\int\limits_{\Omega}|\nabla_x u|^2 dxdy + \frac{\beta}{2n_2}\int\limits_{\partial\Omega}(y,\upsilon_y)\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^2 |\upsilon_x|^2 ds + \frac{\beta(n_2-2)}{2n_2}\int\limits_{\Omega} f^2(x)\,|\nabla_y u|^2 dxdy$$

$$+\frac{\beta}{2n_2}\int\limits_{\partial\Omega}(y,\upsilon_y)\,f^2(x)\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^2 |\upsilon_y|^2 ds + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} f^2(x)\,|\nabla_y u|^2 dxdy$$

$$+\frac{1}{n_1}\int\limits_{\Omega}(x,\nabla_x f(x))\,f(x)\,|\nabla_y u|^2 dxdy + \frac{1}{2n_1}\int\limits_{\partial\Omega}(x,\upsilon_x)\,f^2(x)\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^2 |\upsilon_y|^2 ds$$

$$=\left(\frac{n_1-2}{2n_1}+\frac{\beta}{2}\right)\int\limits_{\Omega}|\nabla_x u|^2 dxdy + \left(\frac{\beta(n_2-2)}{2n_2}+\frac{1}{2}\right)\int\limits_{\Omega} f^2(x)\,|\nabla_y u|^2 dxdy$$

$$+\frac{1}{n_1}\int\limits_{\Omega}(x,\nabla_x f(x))\,f(x)\,|\nabla_y u|^2 dxdy +$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{1}{2n_1}(x,\upsilon_x)+\frac{\beta}{2n_2}(y,\upsilon_y)\right]\left[|\upsilon_x|^2 + f^2(x)\,|\upsilon_y|^2\right]\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^2 ds,$$

Chọn $\beta = \frac{n_2}{n_1}$ khi đó ta có:

$$\left(1+\frac{n_2}{n_1}\right)\int\limits_{\Omega} G(u)\,dxdy = \frac{n_1+n_2-2}{2n_1}\int\limits_{\Omega}|\nabla_x u|^2 dxdy$$

$$+\frac{n_1+n_2-2}{2n_1}\int\limits_{\Omega} f^2(x)\,|\nabla_y u|^2 dxdy + \frac{1}{n_1}\int\limits_{\Omega}(x,\nabla_x f(x))\,f(x)\,|\nabla_y u|^2 dxdy$$

$$+\frac{1}{2n_1}\int\limits_{\partial\Omega}\left[(x,\upsilon_x)+(y,\upsilon_y)\right]\left[|\upsilon_x|^2 + f^2(x)\,|\upsilon_y|^2\right]\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^2 ds.$$

Mà $u(x,y)$ là nghiệm của bài toán nên ta có:

$$\int\limits_{\Omega}\left[\left(1+\frac{n_2}{n_1}\right)G(u) - \frac{n_1+n_2-2}{2n_1}g(u)\,u\right]dxdy =$$

$$\frac{1}{n_1}\int\limits_{\Omega}(x,\nabla_x f(x))\,f(x)\,|\nabla_y u|^2 dxdy$$

$$+\frac{1}{2n_1}\int\limits_{\partial\Omega}\left[(x,\upsilon_x)+(y,\upsilon_y)\right]\left[|\upsilon_x|^2 + f^2(x)\,|\upsilon_y|^2\right]\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^2 ds.$$

$\square$

Chú ý 2.2.1. *Đồng nhất thức vẫn đúng trong trường hợp toán tử nửa tuyến tính Elliptic là không suy biến.*

Định lí 2.2.4. *Giả sử* Ω *là hình sao đối với điểm* $\{0\}$ *và*

i. $\left(1+\frac{n_2}{n_1}\right)G(u)-\frac{n_1+n_2-2}{2n_1}g(u)u<0$ *khi* $u\neq 0$,

ii. $(x,\nabla_x f(x))\,f(x)\geq 0$ *trong* Ω.

Khi đó không tồn tại nghiệm không tầm thường $u\in H^2(\Omega)$ *cho bài toán (2.2).*

Định lí 2.2.5. *Giả sử* Ω *là hình sao đối với điểm* $\{0\}$ *và*

i. $\left(1+\frac{n_2}{n_1}\right)G(u)-\frac{n_1+n_2-2}{2n_1}g(u)u<0$, *khi* $u>0$,

ii. $(x,\nabla_x f(x))\,f(x)\geq 0$, *trong* Ω.

Khi đó không tồn tại nghiệm dương không tầm thường $u\in H^2(\Omega)$ *cho bài toán (2.2).*

Định lí 2.2.6. *Giả sử* Ω *là hình sao đối với điểm* $\{0\}$, $n_1+n_2>2$ *và*

i. $g(u)=\lambda u+|u|^{\gamma}u$ *với* $\lambda\leq 0$, $\gamma>\frac{4}{n_1+n_2-2}$,

ii. $(x,\nabla_x f(x))\,f(x)\geq 0$ *trong* Ω.

Khi đó không tồn tại nghiệm không tầm thường $u\in H^2(\Omega)$ *cho bài toán (2.2).*

Ta xét một số trường hợp đặc biệt của hàm $f(x)$ và $g(u)$.

Trường hợp 1:

Với $f^2(x)=(x)^{2k}:=\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1}|x_i|^k\right)^2\Rightarrow f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n_1}|x_i|^k, k>0.$

Khi đó ta có đẳng thức sau:

$$(1+\beta)\int\limits_{\Omega}G(u)\,dxdy=\left(\frac{n_1-2}{2n_1}+\frac{\beta}{2}\right)\int\limits_{\Omega}|\nabla_x u|^2dxdy+\frac{k}{n_1}\int\limits_{\Omega}(x)^{2k}|\nabla_y u|^2dxdy$$
$$+\left(\frac{\beta(n_2-2)}{2n_2}+\frac{1}{2}\right)\int\limits_{\Omega}(x)^{2k}|\nabla_y u|^2dxdy$$
$$+\int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{1}{2n_1}(x,\upsilon_x)+\frac{\beta}{2n_2}(y,\upsilon_y)\right]\left[|\upsilon_x|^2+(x)^{2k}|\upsilon_y|^2\right]\left(\frac{\partial u}{\partial\upsilon}\right)^2ds,$$

Chọn $\beta = \frac{n_2}{n_1}(k+1)$ ta có đẳng thức sau:

$$\int\limits_{\Omega} \left[\frac{n_1 + n_2(k+1)}{n_1} G(u) - \frac{n_1 + n_2(k+1) - 2}{2n_1} g(u) u \right] dxdy$$
$$= \frac{1}{2n_1} \int\limits_{\partial\Omega} [(x, \upsilon_x) + (k+1)(y, \upsilon_y)] \left[|\upsilon_x|^2 + (x)^{2k} |\upsilon_y|^2 \right] \left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon} \right)^2 ds.$$

Dựa vào đẳng thức trên ta có một số kết quả sau:

Định lí 2.2.7. *Giả sử Ω là L_k - hình sao đối với điểm $\{0\}$, và*

$$\frac{n_1 + n_2(k+1)}{n_1} G(u) - \frac{n_1 + n_2(k+1) - 2}{2n_1} g(u) u < 0, \quad khi \;\; u \neq 0.$$

Khi đó không tồn tại nghiệm không tầm thường $u \in H^2(\Omega)$ cho bài toán (2.2).

Định lí 2.2.8. *Giả sử Ω là L_k - hình sao đối với điểm $\{0\}$, và*

$$\frac{n_1 + n_2(k+1)}{n_1} G(u) - \frac{n_1 + n_2(k+1) - 2}{2n_1} g(u) u < 0, \quad khi \;\; u > 0.$$

Khi đó không tồn tại nghiệm không tầm thường $u \in H^2(\Omega)$ cho bài toán (2.2).

Định lí 2.2.9. *Giả sử Ω là L_k - hình sao đối với điểm $\{0\}$, và*

$$g(u) = \lambda u + |u|^{\gamma} u, \quad với \;\; \lambda \leq 0, \; \gamma > \frac{4}{n_1 + n_2(k+1) - 2}.$$

Khi đó không tồn tại nghiệm không tầm thường $u \in H^2(\Omega)$ cho bài toán (2.2).

Trường hợp 2. Với

$$\begin{aligned}
f^2(x) &= [x]^{2k}(1 + \varphi(x)) := \left(\prod_{i=1}^{n_1} |x_i|^{k_i} \sqrt{1 + \varphi(x)} \right)^2 \Rightarrow f(x) = \prod_{i=1}^{n_1} |x_i|^{k_i} \sqrt{1 + \varphi(x)}, \\
\varphi(x) &= \varphi(x_1, ..., x_{n_1}) > -1, \; \varphi(x) \in C^2(\mathbb{R}^{n_1}), \; \sum_{i=1}^{n_1} x_i \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} \geq 0 \\
k &= (k_1, k_2, ..., k_{n_1}), k_i > 0, i = 1...n_1.
\end{aligned}$$

Khi đó ta có đẳng thức:

$$(1+\beta)\int\limits_{\Omega} G(u)\,dxdy = \left(\frac{n_1-2}{2n_1}+\frac{\beta}{2}\right)\int\limits_{\Omega}|\nabla_x u|^2 dxdy$$

$$+\left(\frac{\beta(n_2-2)}{2n_2}+\frac{1}{2}\right)\int\limits_{\Omega}[x]^{2k}(1+\varphi(x))|\nabla_y u|^2 dxdy+$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}k_i}{n_1}\int\limits_{\Omega}[x]^{2k}(1+\varphi(x))|\nabla_y u|^2 dxdy+\frac{1}{n_1}\int\limits_{\Omega}[x]^{2k}(1+\varphi(x))\sum_{i=1}^{n_1}\frac{x_i\partial\varphi(x)}{\partial x_i}|\nabla_y u|^2 dxdy$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{1}{2n_1}(x,\upsilon_x)+\frac{\beta}{2n_2}(y,\upsilon_y)\right]\left[|\upsilon_x|^2+[x]^{2k}(1+\varphi(x))|\upsilon_y|^2\right]\left(\frac{\partial u}{\partial\upsilon}\right)^2 ds,$$

Chọn $\beta=\frac{n_2}{n_1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1}k_i+1\right)$ ta có đẳng thức sau:

$$\int\limits_{\Omega}\left[\frac{n_1+n_2\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1}k_i+1\right)}{n_1}G(u)-\frac{n_1+n_2\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1}k_i+1\right)-2}{2n_1}g(u)\,u\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{n_1}\int\limits_{\Omega}[x]^{2k}(1+\varphi(x))\sum_{i=1}^{n_1}\frac{x_i\partial\varphi(x)}{\partial x_i}|\nabla_y u|^2 dxdy$$

$$+\frac{1}{2n_1}\int\limits_{\partial\Omega}\left[(x,\upsilon_x)+\left(\sum_{i=1}^{n_1}k_i+1\right)(y,\upsilon_y)\right]\left[|\upsilon_x|^2+[x]^{2k}(1+\varphi(x))|\upsilon_y|^2\right]\left(\frac{\partial u}{\partial\upsilon}\right)^2 ds.$$

Dựa vào đẳng thức trên ta có một số định lý sau:

Định lí 2.2.10. *Giả sử Ω là $L_{\sum\limits_{i=1}^{n_1}k_i}$ - hình sao đối với điểm $\{0\}$, và*

$$\frac{n_1+n_2\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1}k_i+1\right)}{n_1}G(u)-\frac{n_1+n_2\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1}k_i+1\right)-2}{2n_1}g(u)\,u<0,\quad khi\ u\neq 0.$$

Khi đó không tồn tại nghiệm không tầm thường $u\in H^2(\Omega)$ cho bài toán (2.2).

Định lí 2.2.11. *Giả sử Ω là $L_{\sum\limits_{i=1}^{n_1}k_i}$ - hình sao đối với điểm $\{0\}$, và*

$$\frac{n_1+n_2\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1}k_i+1\right)}{n_1}G(u)-\frac{n_1+n_2\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1}k_i+1\right)-2}{2n_1}g(u)\,u<0,\quad khi\ u>0.$$

Khi đó không tồn tại nghiệm dương không tầm thường $u \in H^2(\Omega)$ cho bài toán (2.2).

Định lí 2.2.12. *Giả sử Ω là $L_{\sum\limits_{i=1}^{n_1} k_i}$ - hình sao đối với điểm $\{0\}$, và*

$$g(u) = \lambda u + |u|^{\gamma} u \text{ với } \lambda \le 0,\ \gamma > \frac{4}{n_1 + n_2\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1} k_i + 1\right) - 2}.$$

Khi đó không tồn tại nghiệm không tầm thường $u \in H^2(\Omega)$ cho bài toán (2.2).

Chứng minh.

Giả sử tồn tại nghiệm không tầm thường $u \in H^2(\Omega)$ cho bài toán (2.2).

Khi đó ta có đẳng thức sau:

$$\int\limits_{\Omega} \left[\frac{n_1 + n_2\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1} k_i + 1\right)}{n_1} G(u) - \frac{n_1 + n_2\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1} k_i + 1\right) - 2}{2n_1} g(u)\, u \right] dxdy$$

$$= \frac{1}{n_1} \int\limits_{\Omega} [x]^{2k} (1 + \varphi(x)) \sum_{i=1}^{n_1} \frac{x_i \partial \varphi(x)}{\partial x_i} |\nabla_y u|^2 dxdy$$

$$+ \frac{1}{2n_1} \int\limits_{\partial\Omega} \left[(x, \upsilon_x) + \left(\sum_{i=1}^{n_1} k_i + 1\right)(y, \upsilon_y) \right] \left[|\upsilon_x|^2 + [x]^{2k}(1 + \varphi(x)) |\upsilon_y|^2 \right] \left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^2 ds,$$

Ta có:

$$G(u) = \frac{\lambda u^2}{2} + \frac{|u|^{\gamma+2}}{\gamma + 2}$$

Nên:

$$\int\limits_{\Omega} \left[\frac{n_1 + n_2\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1} k_i + 1\right)}{n_1} \left(\frac{\lambda u^2}{2} + \frac{|u|^{\gamma+2}}{\gamma+2}\right) - \frac{n_1 + n_2\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1} k_i + 1\right) - 2}{2n_1} \left(\lambda u^2 + |u|^{\gamma+2}\right) \right] dxdy =$$

$$= \frac{1}{n_1} \int\limits_{\Omega} [x]^{2k} (1 + \varphi(x)) \sum_{i=1}^{n_1} \frac{x_i \partial \varphi(x)}{\partial x_i} |\nabla_y u|^2 dxdy$$

$$+ \frac{1}{2n_1} \int\limits_{\partial\Omega} \left[(x, \upsilon_x) + \left(\sum_{i=1}^{n_1} k_i + 1\right)(y, \upsilon_y) \right] \left[|\upsilon_x|^2 + [x]^{2k}(1 + \varphi(x)) |\upsilon_y|^2 \right] \left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^2 ds$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{n_1}\int\limits_{\Omega} u^2 dxdy$$

$$+\int\limits_{\Omega} |u|^{2+\gamma}\left(\frac{n_1+n_2\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1} k_i+1\right)}{n_1(\gamma+2)}-\frac{n_1+n_2\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1} k_i+1\right)-2}{2n_1}\right)dxdy =$$

$$=\frac{1}{n_1}\int\limits_{\Omega}[x]^{2k}\left(1+\varphi\left(x\right)\right)\sum_{i=1}^{n_1}\frac{x_i\partial\varphi\left(x\right)}{\partial x_i}\left|\nabla_y u\right|^2 dxdy+$$

$$\frac{1}{2n_1}\int\limits_{\partial\Omega}\left[(x,\upsilon_x)+\left(\sum_{i=1}^{n_1}k_i+1\right)(y,\upsilon_y)\right]\left[\left|\upsilon_x\right|^2+[x]^{2k}\left(1+\varphi\left(x\right)\right)\left|\upsilon_y\right|^2\right]\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^2 ds.$$

Do $\lambda \le 0,\ \gamma > \frac{4}{n_1+n_2\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1} k_i+1\right)-2}$, nên suy ra

$$\frac{\lambda}{n_1}\int\limits_{\Omega} u^2 dxdy+\int\limits_{\Omega} |u|^{2+\gamma}\left(\frac{n_1+n_2\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1} k_i+1\right)}{n_1(\gamma+2)}-\frac{n_1+n_2\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1} k_i+1\right)-2}{2n_1}\right)dxdy<0.$$

Với $u \neq 0$ điều này là mâu thuẫn, nên ta có điều phải chứng minh.

$\square$

Trường hợp 3. Với

$$f\left(x\right)=e^{-\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1}|x_i|\right)^{-\delta}},\ \delta>0,\ g\left(u\right)=\lambda u+|u|^{\gamma}u.$$

Khi đó ta có đẳng thức sau:

$$(1+\beta)\int\limits_{\Omega} G\left(u\right)dxdy=$$

$$=\left(\frac{n_1-2}{2n_1}+\frac{\beta}{2}\right)\int\limits_{\Omega}\left|\nabla_x u\right|^2 dxdy+\left(\frac{\beta\left(n_2-2\right)}{2n_2}+\frac{1}{2}\right)\int\limits_{\Omega} f^2\left(x\right)\left|\nabla_y u\right|^2 dxdy+$$

$$+\frac{1}{n_1}\int\limits_{\Omega}\left(x,\nabla_x f\left(x\right)\right)f\left(x\right)\left|\nabla_y u\right|^2 dxdy+$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{1}{2n_1}\left(x,\upsilon_x\right)+\frac{\beta}{2n_2}\left(y,\upsilon_y\right)\right]\left[\left|\upsilon_x\right|^2+f^2\left(x\right)\left|\upsilon_y\right|^2\right]\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^2 ds,$$

Chọn $\beta = \frac{n_2}{n_1}(k+1)$, ta có đẳng thức sau:

$$\int\limits_{\Omega}\left[\frac{n_1+n_2(k+1)}{n_1}G(u) - \frac{n_1+n_2(k+1)-2}{2n_1}g(u)\,u\right]dxdy$$
$$= \frac{1}{n_1}\int\limits_{\Omega}\left[(x,\nabla_x f(x))\,f(x) - kf^2(x)\right]|\nabla_y u|^2 dxdy$$
$$+\frac{1}{2n_1}\int\limits_{\partial\Omega}\left[(x,\upsilon_x)+(k+1)(y,\upsilon_y)\right]\left[|\upsilon_x|^2 + f^2(x)\,|\upsilon_y|^2\right]\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^2 ds.$$

Định lí 2.2.13. *Giả sử*

$$f(x) = e^{-\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1}|x_i|^2\right)^{-\delta}},\ \delta>0,\ \Omega = \left\{(x_i,y_j),\ \sum_{i=1}^{n_1}x_i^2+\sum_{j=1}^{n_2}y_j^2 < \left(\frac{\delta\gamma n_2}{\gamma+2}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right\},$$
$$g(u) = \lambda u + |u|^{\gamma}u \text{ với } \lambda\le 0,\ \gamma>0.$$

Khi đó không tồn tại nghiệm không tầm thường $u\in H^2(\Omega)$ cho bài toán (2.2).

Chứng minh.

Giả sử tồn tại nghiệm không tầm thường $u\in H^2(\Omega)$ cho bài toán (2.2).

Khi đó ta có:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = 2x_i.\left(\sum_{i=1}^{n_1}|x_i|^2\right)^{-\delta-1}\delta.e^{-\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1}|x_i|^2\right)^{-\delta}}$$
$$(x,\nabla_x f(x)) \ge kf(x)$$
$$\Leftrightarrow\ 2\delta\left(\sum_{i=1}^{n_1}|x_i|^2\right)^{-\delta}e^{-\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1}|x_i|^2\right)^{-\delta}} \ge k.e^{-\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1}|x_i|^2\right)^{-\delta}} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n_1}|x_i|^2 \le \left(\frac{2\delta}{k}\right)^{\frac{1}{\delta}}.$$

Mà

$$G(u) = \frac{\lambda u^2}{2} + \frac{|u|^{\gamma+2}}{\gamma+2},$$

Khi đó ta có

$$\int\limits_{\Omega}\left[\frac{n_1+n_2\left(k+1\right)}{n_1}\left(\frac{\lambda u^2}{2}+\frac{\left|u\right|^{\gamma+2}}{\gamma+2}\right)-\frac{n_1+n_2\left(k+1\right)-2}{2n_1}\left(\lambda u+\left|u\right|^{\gamma}u\right)u\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{n_1}\int\limits_{\Omega}\left[\left(x,\nabla_x f\left(x\right)\right)f\left(x\right)-kf^2\left(x\right)\right]\left|\nabla_y u\right|^2 dxdy$$

$$+\frac{1}{2n_1}\int\limits_{\partial\Omega}\left[\left(x,\upsilon_x\right)+\left(k+1\right)\left(y,\upsilon_y\right)\right]\left[\left|\upsilon_x\right|^2+f^2\left(x\right)\left|\upsilon_y\right|^2\right]\left(\frac{\partial u}{\partial\upsilon}\right)^2 ds.$$

Chọn $k=\frac{4}{\gamma n_2}$ ta có:

$$\frac{\lambda}{n_1}\int\limits_{\Omega}u^2dxdy+\int\limits_{\Omega}\left|u\right|^{2+\gamma}\frac{\left(2-n_1-n_2\right)\gamma}{2n_1\left(\gamma+2\right)}dxdy=$$

$$=\frac{1}{2n_1}\int\limits_{\partial\Omega}\left[\left(x,\upsilon_x\right)+\left(\sum_{i=1}^{n_1}k_i+1\right)\left(y,\upsilon_y\right)\right]\left[\left|\upsilon_x\right|^2+\left[x\right]^{2k}\left|\upsilon_y\right|^2\right]\left(\frac{\partial u}{\partial\upsilon}\right)^2 ds,$$

Do $\lambda\leq 0,\ \gamma>0$, nên ta có:

$$\frac{\lambda}{n_1}\int\limits_{\Omega}u^2dxdy+\frac{\left(2-n_1-n_2\right)\gamma}{2n_1\left(\gamma+2\right)}\int\limits_{\Omega}\left|u\right|^{2+\gamma}dxdy<0.$$

Với $u\neq 0$ điều này là mâu thuẫn, nên ta có điều phải chứng minh. $\square$

Trường hợp 4: Với

$$f\left(x\right)=e^{-\left(\prod\limits_{i=1}^{n_1}\left|x_i\right|^{-\delta}\right)},\ \delta>0\ ,g\left(u\right)=\lambda u+\left|u\right|^{\gamma}u.$$

Chọn $\beta=\frac{n_2}{n_1}\left(k+1\right)$ ta có đẳng thức sau:

$$\int\limits_{\Omega}\left[\frac{n_1+n_2\left(k+1\right)}{n_1}G\left(u\right)-\frac{n_1+n_2\left(k+1\right)-2}{2n_1}g\left(u\right)u\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{n_1}\int\limits_{\Omega}\left[\left(x,\nabla_x f\left(x\right)\right)f\left(x\right)-kf^2\left(x\right)\right]\left|\nabla_y u\right|^2 dxdy$$

$$+\frac{1}{2n_1}\int\limits_{\partial\Omega}\left[\left(x,\upsilon_x\right)+\left(k+1\right)\left(y,\upsilon_y\right)\right]\left[\left|\upsilon_x\right|^2+f^2\left(x\right)\left|\upsilon_y\right|^2\right]\left(\frac{\partial u}{\partial\upsilon}\right)^2 ds.$$

Định lí 2.2.14. *Giả sử*

$$f(x) = e^{-\prod_{i=1}^{n_1}|x_i|^{-\delta}},\ \delta>0,\ \Omega=\left\{(x_i,y_j),\ \sum_{i=1}^{n_1}x_i^2+\sum_{j=1}^{n_2}y_j^2<n_1\left(\frac{\delta\gamma n_1 n_2}{4+\gamma}\right)^{\frac{2}{\delta n_1}}\right\},$$

$$g(u) = \lambda u+|u|^{\gamma}u \text{ với } \lambda\le 0,\ \gamma>0.$$

Khi đó không tồn tại nghiệm không tầm thường $u\in H^2(\Omega)$ cho bài toán (2.2).

Chứng minh.

Ta có:

$$x_i\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}=\delta.\prod_{i=1}^{n_1}|x_i|^{-\delta}.e^{-\prod_{i=1}^{n_1}|x_i|^{-\delta}}$$

$$(x,\nabla_x f(x))\ge kf(x)$$

$$\Leftrightarrow\ n_1\delta.\prod_{i=1}^{n_1}|x_i|^{-\delta}.e^{-\prod_{i=1}^{n_1}|x_i|^{-\delta}}\ge k.e^{-\prod_{i=1}^{n_1}|x_i|^{-\delta}}\Leftrightarrow\prod_{i=1}^{n_1}|x_i|\le\left(\frac{\delta n_1}{k}\right)^{\frac{1}{\delta}}.$$

Mà ta có:

$$G(u)=\frac{\lambda u^2}{2}+\frac{|u|^{\gamma+2}}{\gamma+2}.$$

Giả sử tồn tại nghiệm không tầm thường $u\in H^2(\Omega)$, khi đó ta có

$$\int_\Omega\left[\frac{n_1+n_2(k+1)}{n_1}\left(\frac{\lambda u^2}{2}+\frac{|u|^{\gamma+2}}{\gamma+2}\right)-\frac{n_1+n_2(k+1)-2}{2n_1}(\lambda u+|u|^{\gamma}u)u\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{n_1}\int_\Omega\left[(x,\nabla_x f(x))f(x)-kf^2(x)\right]|\nabla_y u|^2dxdy$$

$$+\frac{1}{2n_1}\int_{\partial\Omega}[(x,\upsilon_x)+(k+1)(y,\upsilon_y)]\left[|\upsilon_x|^2+f^2(x)|\upsilon_y|^2\right]\left(\frac{\partial u}{\partial\upsilon}\right)^2ds$$

$$\Rightarrow\frac{\lambda}{n_1}\int_\Omega u^2dxdy+\int_\Omega|u|^{2+\gamma}\left(\frac{n_1+n_2(k+1)}{n_1(\gamma+2)}-\frac{n_1+n_2(k+1)-2}{2n_1}\right)dxdy=$$

$$=\frac{1}{2n_1}\int_{\partial\Omega}[(x,\upsilon_x)+(k+1)(y,\upsilon_y)]\left[|\upsilon_x|^2+f(x)^2|\upsilon_y|^2\right]\left(\frac{\partial u}{\partial\upsilon}\right)^2ds.$$

Do: $\lambda\le0,\ \gamma>0$, và ta chọn: $k=\frac{4}{\gamma n_2}$ khi đó ta có:

$$\frac{\lambda}{n_1}\int_\Omega u^2dxdy+\frac{\gamma(2-n_1-n_2)}{2n_1(\gamma+2)}\int_\Omega|u|^{2+\gamma}dxdy<0.$$

Do $u \neq 0$, điều này dẫn đến mâu thuẫn, nên ta có điều phải chứng minh. $\square$

2.3 Toán tử kiểu Grushin tổng quát

Giả sử Ω là miền giới nội với biên $\partial\Omega$ trơn trong $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^{n_3}$, với $n_1 \geq 1, n_2 \geq 1, n_3 \geq 1$, và $\{0\} \in \Omega$. Ta xét bài toán biên sau:

$$\begin{cases} L_{f,h}(u) + g(u) = \Delta_x u + f^2(x)\Delta_y u + h^2(x)\Delta_z u + g(u) = 0 \text{ trong } \Omega, \\ \hfill u = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

trong đó $g(u) \in C(\mathbb{R}),\ g(0) = 0$,

$$f(x) = f(x_1, ..., x_{n_1}) \in C^2(\mathbb{R}^{n_1}), h(x) = h(x_1, ..., x_{n_1}) \in C^2(\mathbb{R}^{n_1}),$$

$$x = (x_1, .., x_{n_1}),\ y = (y_1, ..., y_{n_2}), z = (z_1, ..., z_{n_3}),$$

$$u(x, y, z) = u(x_1, .., x_{n_1},\ y_1, ..., y_{n_2}, z_1, ..., z_{n_3}),$$

$$\Delta_x = \sum_{j=1}^{n_1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},\ \Delta_y = \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}, \Delta_z = \sum_{j=1}^{n_3} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}.$$

Đặt $G(u) = \int\limits_0^u g(t)\,dt,\ \upsilon = \left(\upsilon_{x_1}, ..., \upsilon_{x_{n_1}}, \upsilon_{y_1}, ..., \upsilon_{y_{n_2}}, \upsilon_{z_1}, ..., \upsilon_{z_{n_3}}\right)$ là vector pháp tuyến đơn vị ngoài trên $\partial\Omega$.

Định nghĩa 2.3.1. *Miền Ω được gọi là tập hình sao đối với điểm $\{0\}$, nếu bất đẳng thức $\sum\limits_{j=1}^{n_1} x_j\upsilon_{x_j} + \sum\limits_{i=1}^{n_2} y_i\upsilon_{y_i} + \sum\limits_{i=1}^{n_3} z_i\upsilon_{z_i} > 0$ thỏa mãn hầu khắp nơi trên $\partial\Omega$.*

Ví dụ 3. Nếu Ω là lồi và $\{0\} \in \Omega$, thì Ω là tập hình sao đối với điểm $\{0\}$. Nhưng một miền hình sao tổng quát thì không nhất thiết là lồi.

Định nghĩa 2.3.2. *Giả sử k_1, k_2 là các số thực dương, khi đó miền Ω được gọi là L_{k_1,k_2} - hình sao đối với điểm $\{0\}$, nếu bất đẳng thức $\sum\limits_{j=1}^{n_1} x_j\upsilon_{x_j} + (k_1+1)\sum\limits_{i=1}^{n_2} y_i\upsilon_{y_i} + (k_2+1)\sum\limits_{i=1}^{n_3} z_i\upsilon_{z_i} > 0$ thỏa mãn hầu khắp nơi trên $\partial\Omega$.*

Bổ đề 2.3.3. *Giả sử $u(x,y,z)$ là nghiệm của bài toán (2.3) thuộc không gian $H^2(\Omega)$. Khi đó $u(x,y,z)$ thỏa mãn đẳng thức:*

$$\int\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{n_1+n_2+n_3}{n_1}\right)G(u)-\frac{n_1+n_2+n_3-2}{2n_1}g(u)\,u\right]dxdydz=$$

$$\frac{1}{n_1}\int\limits_{\Omega}(x,\nabla_x f(x))\,f(x)\,|\nabla_y u|^2dxdydz+\frac{1}{n_1}\int\limits_{\Omega}(x,\nabla_x h(x))\,h(x)\,|\nabla_z u|^2dxdydz$$

$$+\frac{1}{2n_1}\int\limits_{\partial\Omega}[(x,\upsilon_x)+(y,\upsilon_y)+(z,\upsilon_z)]\left[|\upsilon_x|^2+f^2(x)\,|\upsilon_y|^2+h^2(x)\,|\upsilon_z|^2\right]\left(\frac{\partial u}{\partial\upsilon}\right)^2ds,$$

trong đó: $\upsilon_x=\left(\upsilon_{x_1},...,\upsilon_{x_{n_1}}\right),\upsilon_y=\left(\upsilon_{y_1},...,\upsilon_{y_{n_2}}\right),\upsilon_z=\left(\upsilon_{z_1},...,\upsilon_{z_{n_3}}\right),dxdydz=dx_1....dx_{n_1}dy_1...dy_{n_2}dz_1...dz_{n_3}.$

Chứng minh.

Sử dụng công thức Gauss ta có:

$$(1+\alpha+\beta)\int\limits_{\Omega}G(u)\,dxdydz=\left(\frac{n_1-2}{2n_1}+\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\int\limits_{\Omega}|\nabla_x u|^2dxdydz$$

$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha(n_2-2)}{2n_2}+\frac{\beta}{2}\right)\int\limits_{\Omega}f^2(x)|\nabla_y u|^2dxdydz+\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta(n_3-2)}{2n_3}\right)\int\limits_{\Omega}h^2(x)|\nabla_z u|^2dxdydz$$

$$+\frac{1}{n_1}\int\limits_{\Omega}(x,\nabla_x f(x))\,f(x)\,|\nabla_y u|^2dxdydz+\frac{1}{n_1}\int\limits_{\Omega}(x,\nabla_x h(x))\,h(x)\,|\nabla_z u|^2dxdydz$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{1}{2n_1}(x,\upsilon_x)+\frac{\alpha}{2n_2}(y,\upsilon_y)+\frac{\beta}{2n_3}(z,\upsilon_z)\right]\left[|\upsilon_x|^2+f^2(x)\,|\upsilon_y|^2+h^2(x)\,|\upsilon_z|^2\right]\left(\frac{\partial u}{\partial\upsilon}\right)^2ds$$

Chọn $\alpha=\frac{n_2}{n_1},\beta=\frac{n_3}{n_1}$, khi đó ta có:

$$\int\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{n_1+n_2+n_3}{n_1}\right)G(u)-\frac{n_1+n_2+n_3-2}{2n_1}g(u)\,u\right]dxdydz=$$

$$\frac{1}{n_1}\int\limits_{\Omega}(x,\nabla_x f(x))\,f(x)\,|\nabla_y u|^2dxdydz+\frac{1}{n_1}\int\limits_{\Omega}(x,\nabla_x h(x))\,h(x)\,|\nabla_z u|^2dxdydz+$$

$$\frac{1}{2n_1}\int\limits_{\partial\Omega}[(x,\upsilon_x)+(y,\upsilon_y)]\left[|\upsilon_x|^2+f^2(x)\,|\upsilon_y|^2\right]\left(\frac{\partial u}{\partial\upsilon}\right)^2ds.$$

□

Định lí 2.3.4. *Giả sử Ω là tập hình sao đối với $\{0\}$, và*

i. $\left(\frac{n_1+n_2+n_3}{n_1}\right)G(u)-\frac{n_1+n_2+n_3-2}{2n_1}g(u)\,u<0$ *khi* $u\neq0$, *ii.* $(x, \nabla_x f(x)) f(x) \geq 0$ *trong* Ω,

iii. $(x, \nabla_x h(x)) h(x) \geq 0$ *trong* Ω.

Khi đó không tồn tại nghiệm không tầm thường $u \in H^2(\Omega)$ *cho bài toán (2.3).*

Định lí 2.3.5. *Giả sử* Ω *là tập hình sao đối với* $\{0\}$, *và thỏa mãn:*

i. $\left(\frac{n_1+n_2+n_3}{n_1}\right) G(u) - \frac{n_1+n_2+n_3-2}{2n_1} g(u) u < 0$ *khi* $u > 0$,

ii. $(x, \nabla_x f(x)) f(x) \geq 0$ *trong* Ω,

iii. $(x, \nabla_x h(x)) h(x) \geq 0$ *trong* Ω.

Khi đó không tồn tại nghiệm dương không tầm thường $u \in H^2(\Omega)$ *cho bài toán (2.3).*

Định lí 2.3.6. *Giả sử* Ω *là tập hình sao đối với* $\{0\}$, *và thỏa mãn:*

i. $g(u) = \lambda u + |u|^\gamma u$ *với* $\lambda \leq 0$, $\gamma > \frac{4}{n_1+n_2+n_3-2}$,

ii. $(x, \nabla_x f(x)) f(x) \geq 0$ *trong* Ω,

iii. $(x, \nabla_x h(x)) h(x) \geq 0$ *trong* Ω.

Khi đó không tồn tại nghiệm không tầm thường $u \in H^2(\Omega)$ *cho bài toán (2.3).*

Ta xét một số trường hợp đặc biệt của hàm $f(x)$ ***và*** $h(x)$

Trường hợp 1: Với

$$f^2(x) = (x)^{2k_1} := \left(\sum_{i=1}^{n_1} |x_i|^{k_1}\right)^2, h^2(x) = (x)^{2k_2} := \left(\sum_{i=1}^{n_1} |x_i|^{k_2}\right)^2, k_1 > 0, k_2 > 0.$$

Khi đó ta có đẳng thức sau:

$$(1+\alpha+\beta) \int_\Omega G(u)\, dxdydz = \left(\frac{n_1-2}{2n_1} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) \int_\Omega |\nabla_x u|^2 dxdydz +$$

$$+ \frac{k_2}{n_1} \int_\Omega (x)^{2k_2} |\nabla_z u|^2 dxdydz + \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha(n_2-2)}{2n_2} + \frac{\beta}{2}\right) \int_\Omega (x)^{2k_1} |\nabla_y u|^2 dxdydz$$

$$+ \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta(n_3-2)}{2n_3}\right) \int_\Omega (x)^{2k_2} |\nabla_z u|^2 dxdydz + \frac{k_1}{n_1} \int_\Omega (x)^{2k_1} |\nabla_y u|^2 dxdydz +$$

$$\int_{\partial\Omega} \left[\frac{1}{2n_1}(x, \upsilon_x) + \frac{\alpha}{2n_2}(y, \upsilon_y) + \frac{\beta}{2n_3}(z, \upsilon_z)\right] \left[|\upsilon_x|^2 + (x)^{2k_1}|\upsilon_y|^2 + (x)^{2k_2}|\upsilon_z|^2\right] \left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^2 ds$$

Chọn $\alpha = \frac{n_2}{n_1}(k_1+1), \beta = \frac{n_3}{n_1}(k_2+1)$ ta có đẳng thức sau:

$$\int\limits_{\Omega}\left[\frac{n_1+n_2(k_1+1)+n_3(k_2+1)}{n_1}G(u) - \frac{n_1+n_2(k_1+1)+n_3(k_2+1)-2}{2n_1}g(u)u\right]dxdydz$$

$$= \frac{1}{2n_1}\int\limits_{\partial\Omega}\left[(x,\upsilon_x)+(k_1+1)(y,\upsilon_y)+(k_2+1)(z,\upsilon_z)\right]\left[|\upsilon_x|^2+(x)^{2k_1}|\upsilon_y|^2+(x)^{2k_2}|\upsilon_z|^2\right]\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^2 ds.$$

Dựa vào đẳng thức trên ta có một số kết quả sau:

Định lí 2.3.7. *Giả sử Ω là L_{k_1,k_2} - hình sao đối với $\{0\}$, và thỏa mãn điều kiện sau:*

$$\frac{n_1+n_2(k_1+1)+n_3(k_2+1)}{n_1}G(u) - \frac{n_1+n_2(k_1+1)+n_3(k_2+1)-2}{2n_1}g(u)u < 0,$$

khi $u \neq 0$. Khi đó không tồn tại nghiệm không tầm thường $u \in H^2(\Omega)$ cho bài toán (2.3).

Định lí 2.3.8. *Giả sử Ω là L_{k_1,k_2} - hình sao đối với $\{0\}$, và thỏa mãn điều kiện sau:*

$$\frac{n_1+n_2(k_1+1)+n_3(k_2+1)}{n_1}G(u) - \frac{n_1+n_2(k_1+1)+n_3(k_2+1)-2}{2n_1}g(u)u < 0,$$

khi $u > 0$. Khi đó không tồn tại nghiệm dương không tầm thường $u \in H^2(\Omega)$ cho bài toán (2.3).

Định lí 2.3.9. *Giả sử Ω là L_{k_1,k_2} - hình sao đối với $\{0\}$, và thỏa mãn điều kiện sau:*

$$g(u) = \lambda u + |u|^{\gamma}u \text{ với } \lambda \le 0,\ \gamma > \frac{4}{n_1+n_2(k_1+1)+n_3(k_2+1)-2}.$$

Khi đó không tồn tại nghiệm không tầm thường $u \in H^2(\Omega)$ cho bài toán (2.3).

Trường hợp 2. Với

$$f^2(x) = [x]^{2k_1}(1+\varphi_1(x)) := \left(\prod_{i=1}^{n_1}|x_i|^{k_{1i}}\sqrt{1+\varphi_1(x)}\right)^2$$

$$h^2(x) = [x]^{2k_2}(1+\varphi_2(x)) := \left(\prod_{i=1}^{n_1} |x_i|^{k_{2i}} \sqrt{1+\varphi_2(x)}\right)^2$$

$$\varphi_j(x) \in C^2(\mathbb{R}^{n_1}), \varphi_j(x) > -1, \sum_{i=1}^{n_1} x_i \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x_i} \geq 0, \ \varphi_j(x) = \varphi_j(x_1, ..., x_{n_1}), j = 1, 2,$$

$$k_1 = (k_{11}, k_{12}, ..., k_{1n_1}), k_2 = (k_{21}, k_{22}, ..., k_{2n_1}), k_{1i} > 0, k_{2i} > 0, i = 1, ..., n_1.$$

Khi đó ta có đẳng thức:

$$(1+\alpha+\beta)\int_\Omega G(u)\,dxdydz = \left(\frac{n_1-2}{2n_1} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)\int_\Omega |\nabla_x u|^2 dxdydz +$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha(n_2-2)}{2n_2} + \frac{\beta}{2}\right)\int_\Omega [x]^{2k_1}(1+\varphi_1(x))|\nabla_y u|^2 dxdydz + \frac{\sum_{i=1}^{n_1} k_{1i}}{n_1}\int_\Omega [x]^{2k_1}(1+\varphi_1(x))|\nabla_y u|^2 dxdydz +$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta(n_3-2)}{2n_3}\right)\int_\Omega [x]^{2k_2}(1+\varphi_2(x))|\nabla_z u|^2 dxdydz + \frac{\sum_{i=1}^{n_1} k_{2i}}{n_1}\int_\Omega [x]^{2k_2}(1+\varphi_2(x))|\nabla_z u|^2 dxdydz$$

$$+\frac{1}{n_1}\int_\Omega [x]^{2k_1}(1+\varphi_1(x))\sum_{i=1}^{n_1}\frac{x_i \partial\varphi_1(x)}{\partial x_i}|\nabla_z u|^2 dxdydz +$$

$$+\frac{1}{n_1}\int_\Omega [x]^{2k_2}(1+\varphi_2(x))\sum_{i=1}^{n_1}\frac{x_i \partial\varphi_2(x)}{\partial x_i}|\nabla_z u|^2 dxdydz$$

$$+\int_{\partial\Omega}\left[\frac{1}{2n_1}(x,\upsilon_x) + \frac{\alpha}{2n_2}(y,\upsilon_y) + \frac{\beta}{2n_3}(z,\upsilon_z)\right]\left[|\upsilon_x|^2 + f^2(x)|\upsilon_y|^2 + h^2(x)|\upsilon_z|^2\right]\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^2 ds,$$

Chọn $\alpha = \frac{n_2}{n_1}\left(\sum_{i=1}^{n_1} k_{1i} + 1\right), \beta = \frac{n_3}{n_1}\left(\sum_{i=1}^{n_1} k_{2i} + 1\right)$ ta có đẳng thức sau:

$$\int_\Omega \left[\frac{n_1 + n_2 A + n_3 B}{n_1} G(u) - \frac{n_1 + n_2 A + n_3 B - 2}{2n_1} g(u)\,u\right] dxdydz$$

$$= \frac{1}{n_1}\int_\Omega f^2(x)\sum_{i=1}^{n_1}\frac{x_i\partial\varphi_1(x)}{\partial x_i}|\nabla_y u|^2 dxdydz + \frac{1}{n_1}\int_\Omega h^2(x)\sum_{i=1}^{n_1}\frac{x_i\partial\varphi_2(x)}{\partial x_i}|\nabla_z u|^2 dxdydz$$

$$+\frac{1}{2n_1}\int_{\partial\Omega}\left[(x,\upsilon_x) + A(y,\upsilon_y) + B(z,\upsilon_z)\right]\left[|\upsilon_x|^2 + f^2(x)|\upsilon_y|^2 + h^2(x)|\upsilon_z|^2\right]\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^2 ds,$$

trong đó: $A = \left(\sum_{i=1}^{n_1} k_{1i} + 1\right); B = \left(\sum_{i=1}^{n_1} k_{2i} + 1\right)$.

Dựa vào đẳng thức trên ta có một số định lý sau:

Định lí 2.3.10. *Giả sử* Ω *là* $L_{\sum\limits_{i=1}^{n_1} k_{1i}, \sum\limits_{i=1}^{n_1} k_{2i}}$ *- hình sao đối với* $\{0\}$*, và thỏa mãn điều kiện sau:*

$$\frac{n_1 + n_2A + n_3B}{n_1} G(u) - \frac{n_1 + n_2A + n_3B - 2}{2n_1} g(u)\, u < 0, \quad khi \quad u \neq 0.$$

Khi đó không tồn tại nghiệm không tầm thường $u \in H^2(\Omega)$ *cho bài toán (2.3).*

Định lí 2.3.11. *Giả sử* Ω *là* $L_{\sum\limits_{i=1}^{n_1} k_{1i}, \sum\limits_{i=1}^{n_1} k_{2i}}$ *- hình sao đối với* $\{0\}$*, và thỏa mãn điều kiện sau:*

$$\frac{n_1 + n_2A + n_3B}{n_1} G(u) - \frac{n_1 + n_2A + n_3B - 2}{2n_1} g(u)\, u < 0, \quad khi \quad u > 0.$$

Khi đó không tồn tại nghiệm dương không tầm thường $u \in H^2(\Omega)$ *cho bài toán (2.3).*

Định lí 2.3.12. *Giả sử* Ω *là* $L_{\sum\limits_{i=1}^{n_1} k_{1i}, \sum\limits_{i=1}^{n_1} k_{2i}}$ *- hình sao đối với* $\{0\}$*, và thỏa mãn điều kiện sau:*

$$g(u) = \lambda u + |u|^{\gamma} u \quad với \quad \lambda \leq 0,\ \gamma > \frac{4}{n_1 + n_2A + n_3B - 2}$$

Khi đó bài toán (2.3) không có nghiệm không tầm thường $u \in H^2(\Omega)$.

Trường hợp 3. Với

$$\begin{aligned}
f^2(x) &= [x]^{2k_1}(1 + \varphi(x)) := \left(\prod_{i=1}^{n_1} |x_i|^{k_{1i}} \sqrt{1 + \varphi(x)}\right)^2, \\
h^2(x) &= (x)^{2k_2} := \left(\sum_{i=1}^{n_1} |x_i|^{k_2}\right)^2 \Rightarrow h(x) = \sum_{i=1}^{n_1} |x_i|^{k_2}, \\
\varphi(x) &\in C^2(\mathbb{R}^{n_1}), \varphi(x) > -1,\ \sum_{i=1}^{n_1} x_i \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} \geq 0,\ \varphi(x) = \varphi(x_1, ..., x_{n_1}), \\
k_1 &= (k_{11}, k_{12}, ..., k_{1n_1}), k_{1i} > 0, i = 1, ..., n_1, k_2 > 0.
\end{aligned}$$

Khi đó ta có đẳng thức:

$$(1+\alpha+\beta)\int\limits_{\Omega} G(u)\,dxdydz = \left(\frac{n_1-2}{2n_1}+\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\int\limits_{\Omega}|\nabla_x u|^2 dxdydz + \frac{k_2}{n_1}\int\limits_{\Omega}(x)^{2k_2}|\nabla_z u|^2 dxdydz$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha(n_2-2)}{2n_2}+\frac{\beta}{2}\right)\int\limits_{\Omega}[x]^{2k_1}(1+\varphi(x))\,|\nabla_y u|^2 dxdydz +$$

$$+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}k_{1i}}{n_1}\int\limits_{\Omega}[x]^{2k_1}(1+\varphi(x))\,|\nabla_y u|^2 dxdydz + \left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta(n_3-2)}{2n_3}\right)\int\limits_{\Omega}(x)^{2k_2}|\nabla_z u|^2 dxdydz$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{1}{2n_1}(x,\upsilon_x)+\frac{\alpha}{2n_2}(y,\upsilon_y)+\frac{\beta}{2n_3}(z,\upsilon_z)\right]\left[|\upsilon_x|^2+f^2(x)\,|\upsilon_y|^2+h^2(x)\,|\upsilon_z|^2\right]\left(\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right)^2 ds.$$

Dựa vào đẳng thức trên ta có một số định lý sau:

Định lí 2.3.13. *Giả sử* Ω *là* $L_{\sum\limits_{i=1}^{n_1}k_{1i},k_2}$ *- hình sao đối với* $\{0\}$*, và thỏa mãn điều kiện sau:*

$$\frac{n_1+n_2\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1}k_{1i}+1\right)+n_3(k_2+1)}{n_1}G(u)-\frac{n_1+n_2\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1}k_{1i}+1\right)+n_3(k_2+1)-2}{2n_1}g(u)\,u<0.$$

với $u\neq 0$*. Khi đó không tồn tại nghiệm không tầm thường* $u\in H^2(\Omega)$ *cho bài toán (2.3).*

Định lí 2.3.14. *Giả sử* Ω *là* $L_{\sum\limits_{i=1}^{n_1}k_{1i},k_2}$ *- hình sao đối với* $\{0\}$*, và thỏa mãn điều kiện sau:*

$$\frac{n_1+n_2\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1}k_{1i}+1\right)+n_3(k_2+1)}{n_1}G(u)-\frac{n_1+n_2\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1}k_{1i}+1\right)+n_3(k_2+1)-2}{2n_1}g(u)\,u<0,$$

với $u>0$*. Khi đó không tồn tại nghiệm dương không tầm thường* $u\in H^2(\Omega)$ *cho bài toán (2.3).*

Định lí 2.3.15. *Giả sử* Ω *là* $L_{\sum\limits_{i=1}^{n_1}k_{1i},k_2}$ *- hình sao đối với* $\{0\}$*, và thỏa mãn điều kiện sau:*

$$g(u)=\lambda u+|u|^{\gamma}u \text{ với } \lambda\leq 0,\ \gamma>\frac{4}{n_1+n_2\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1}k_{1i}+1\right)+n_3(k_2+1)-2}.$$

Khi đó không tồn tại nghiệm không tầm thường $u\in H^2(\Omega)$ *cho bài toán (2.3).*

KẾT LUẬN

Luận văn đã chỉ ra được các kết quả về sự tồn tại nghiệm và không tồn tại nghiệm không tầm thường của bài toán biên:

$$\begin{cases} L_{f,h}(u) + g(u) = \Delta_x u + f^2(x)\Delta_y u + h^2(x)\Delta_z u + g(u) = 0 \text{ trong } \Omega, \\ \hfill u = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

trong đó Ω là miền giới nội với biên $\partial\Omega$ trơn trong $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^{n_3}$, với $n_1 \geq 1, n_2 \geq 1, n_3 \geq 1$, và $\{0\} \in \Omega$, $g(u) \in C(\mathbb{R})$, $g(0) = 0$,

$$f(x) = f(x_1, ..., x_{n_1}) \in C^2(\mathbb{R}^{n_1}), h(x) = h(x_1, ..., x_{n_1}) \in C^2(\mathbb{R}^{n_1}),$$

$$x = (x_1, .., x_{n_1}), \ y = (y_1, ..., y_{n_2}), z = (z_1, ..., z_{n_3}),$$

$$u(x, y, z) = u(x_1, .., x_{n_1}, \ y_1, ..., y_{n_2}, z_1, ..., z_{n_3}),$$

$$\Delta_x = \sum_{j=1}^{n_1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \ \Delta_y = \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}, \ \Delta_z = \sum_{j=1}^{n_3} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}.$$

Luận văn xét một số trường hợp đặc biệt của $f(x)$, $h(x)$, $g(u)$, n_1, n_2, n_3 mà trong đó bài toán không có nghiệm không tầm thường và chỉ ra điều kiện tồn tại nghiệm của bài toán. Các kết quả của luận văn mới chỉ dừng lại ở việc chỉ ra sự tồn tại và không tồn tại nghiệm không tầm thường của bài toán trên bằng cách sử dụng phương pháp biến phân. Hướng nghiên cứu có thể phát triển thêm nữa, chẳng hạn là tính trơn của nghiệm của bài toán trên và tính chất nghiệm của bài toán trên bằng cách sử dụng phương pháp biến phân.

Tài liệu tham khảo

[1] A. Ambrosetri and P.Rabinowitz, *Dual variational methods in critical theory and applications.* Journal of Funtion Analysis 14 (1973), 349 – 381.

[2] N.M.Chuong, T.D.Ke and N.M.Tri, *Non – existence theorems for boundary value problems for some classes of semilinear degenrate elliptic operators.* preprint (1999).

[3] N.M.Tri *Critical Sobolev exponent for hypoelliptic operators,* Acta Mathematic Vietnamica, Vol.23 (1998), N1, 83 – 94.

[4] N.M.Tri, *Semilinear Degenerate Elliptic Differential Equations*. Local and global theories, Lambert Academic Publishing, 2010.271pp.