ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN MINH ĐỨC

VỀ NGHIỆM CỦA MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN KỲ DỊ CAUCHY VỚI DỊCH CHUYỂN CARLEMAN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC
Chuyên ngành: Toán Giải tích

HÀ NỘI - 2011

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

NGUYỄN MINH ĐỨC

VỀ NGHIỆM CỦA MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN KỲ DỊ CAUCHY VỚI DỊCH CHUYỂN CARLEMAN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01

Người hướng dẫn khoa học
PGS. TS. NGUYỄN MINH TUẤN

HÀ NỘI - NĂM 2011

Mục lục

Mở đầu

Lý thuyết các toán tử tích phân kì dị và các bài toán bờ Riemann của hàm giải tích biến phức đã được xây dựng và phát triển mạnh mẽ trong vòng nửa thế kỷ, từ những năm 1920 đến 1970. Các kết quả này gắn với tên tuổi nhiều nhà toán học nổi tiếng như Carleman, Noether, Muskhelishvili, Gakhov, Vekua,... Cùng song hành và tiếp ngay sau đó là sự ra đời của hàng loạt các lý thuyết các toán tử kỳ dị trong không gian tuyến tính tổng quát gắn với lý thuyết phương trình tích phân kì dị với dịch chuyển và liên hợp phức cũng như nhiều dạng bài toán bờ khác.

Lý thuyết giải được của toán tử tích phân kì dị chỉ có dạng đầy đủ với toán tử tích phân kì dị hai thành phần với dịch chuyển. Trong phạm vi của luận văn, ta chỉ tập trung nghiên cứu tính giải được của phương trình tích phân kì dị với dịch chuyển Carleman.

Cho Γ là chu tuyến đóng đơn và $\alpha(t) : \Gamma \to \Gamma$ là dịch chuyển Carleman ($\alpha(\alpha(t)) \equiv t$, $\alpha'(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, $\alpha'(t) \in H_\mu(\Gamma)$). Ta xét toán tử

$$K = (aI + bW)P_+ + (cI + dW)P_- \tag{1}$$

với W là toán tử dịch chuyển , $(W\varphi)(t) = \varphi(\alpha(t))$, trong $H_\mu(\Gamma)$ (hoặc $\text{Ł}_p(\Gamma)$). Cùng với toán tử K, ta cũng xét toán tử bạn của toán tử K

$$\widetilde{K} = (aI - bW)P_+ + (cI - dW)P_-, \tag{2}$$

trong $H_\mu(\Gamma)$ (hoặc $L_p(\Gamma)$). Khi đó, ta có hệ thức sau

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & I \\ W & -W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & \widetilde{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & W \\ I & -W \end{pmatrix} = \mathcal{A}P_+ + \mathcal{B}P_- + \mathcal{D}, \tag{3}$$

trong đó

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(\alpha(t)) & a(\alpha(t)) \end{pmatrix}, \mathcal{B}(t) = \begin{pmatrix} c(t) & d(t) \\ d(\alpha(t)) & c(\alpha(t)) \end{pmatrix}$$

nếu $\alpha = \alpha_+(t)$ bảo toàn hướng trên Γ, và

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} a(t) & d(t) \\ b(\alpha(t)) & c(\alpha(t)) \end{pmatrix}, \mathcal{B}(t) = \begin{pmatrix} c(t) & b(t) \\ d(\alpha(t)) & a(\alpha(t)) \end{pmatrix}$$

nếu $\alpha = \alpha_-(t)$ thay đổi hướng trên Γ.

Toán tử $\mathcal{D} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & (b(t) - d(t))(WSW - \gamma S) \\ 0 & (a(\alpha(t)) - c(\alpha(t))(WSW - \gamma S) \end{pmatrix}$, trong đó $\gamma = \pm 1$ nếu $\alpha = \alpha_\pm$ là toán tử compact bởi vì toán tử $D_0 = WSW - \gamma S$ là compact.

Lý thuyết Noether của toán tử (1) được phát biểu như sau:

$$\alpha = \alpha_+ : \Delta_1(t) = c(t)c(\alpha(t)) - d(t)d(\alpha(t)) \neq 0,\ \Delta_2(t) = a(t)a(\alpha(t)) - b(t)b(\alpha(t)) \neq 0,$$

$$\operatorname{ind} K = \frac{1}{4\pi}\left\{\arg\frac{\Delta_1(t)}{\Delta_2(t)}\right\}_\Gamma;$$

$$\alpha = \alpha(t)_- : \Delta(t) = a(t)c(\alpha(t)) - d(t)b(\alpha(t)) \neq 0$$

$$\operatorname{ind} K = -\frac{1}{2\pi}\{\arg\Delta(t)\}_\Gamma.$$

Từ hệ thức (3), suy ra

$$\dim\ker K + \dim\ker \widetilde{K} = \dim\ker(\mathcal{A}P_+ + \mathcal{B}P_- + \mathcal{D}).$$

Vì vậy, lý thuyết giải được của toán tử đa thành phần với dịch chuyển (1) được đưa về việc phân tích thành nhân tử toán tử ma trận không dịch chuyển

$$M = \mathcal{A}P_+ + \mathcal{B}P_- + \mathcal{D}.$$

Tất cả các tài liệu liên quan đến lý thuyết giải được của toán tử đa thành phần (1) được chia thành hai nhóm kết quả. Trong nhóm thứ nhất, lý thuyết giải được của toán tử được xây dựng bằng phương pháp đưa toán tử đa thành phần về toán tử hai thành phần, sử dụng các hạn chế về các hệ số a, b, c, d. Trong nhóm thứ hai, lý thuyết giải được của toán tử đa thành phần (1) được xây dựng với các hệ số a, b, c, d tùy ý thỏa mãn điều kiện Noether và với dịch chuyển phân tuyến tính Carleman tác động trên đường tròn hoặc trên đường thẳng.

Luận văn được chia thành hai chương cùng với phần mở đầu, kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1 trình bày các kiến thức về toán tử Noether, hàm dịch chuyển, toán tử dịch chuyển, công thức Sokhotski-Plemeli, bài toán bờ Riemann trong miền đơn liên và toán tử tích phân kì dị với dịch chuyển Carleman.

Chương 2 là phần chính của luận văn, trình bày lý thuyết giải được của phương trình tích phân kì dị đặc trưng tổng quát với dịch chuyển phân tuyến tính Carleman trên đường tròn đơn vị bằng phương pháp phân tích thành nhân tử.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS.TS Nguyễn

Minh Tuấn, trường Đại học Giáo dục - Đại học Quốc Gia Hà Nội. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và kính trọng sâu sắc đến thầy, người thầy đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình hoàn thành luận văn này.

Tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn tới các thầy cô giáo, các thành viên, các anh chị đồng nghiệp trong Seminar Giải tích trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc Gia Hà Nội, về những ý kiến đóng góp quý báu, sự giúp đỡ tận tình và sự cổ vũ hết sức to lớn trong thời gian qua.

Cuối cùng, tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám Hiệu, phòng Sau đại học, khoa Toán - Cơ - Tin học trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc Gia Hà Nội đã tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Toán tử Noether

Cho X_1 và X_2 là các không gian Banach.Ta kí hiệu $L(X_1, X_2)$ là không gian Banach tất cả các toán tử tuyến tính bị chặn A tác động từ không gian X_1 vào không gian X_2 với chuẩn $||A|| = \sup\{||Ax|| : ||x|| = 1\}$. Nếu X là không gian Banach, ta kí hiệu $L(X, X)$ bởi $L(X)$. Không gian xác định như thế là một đại số Banach, tích là phép hợp thành các toán tử.

Hạch và ảnh của toán tử $A \in L(X_1, X_2)$ là

$$\ker A := \{x \in X_1 : Ax = 0\}, \operatorname{im} A := \{Ax : x \in X_1\}.$$

Do toán tử A bị chặn nên $\ker A$ là không gian con đóng của X_1. Số chiều của không gian con $\ker A$, tức là số nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình

$$Ax = 0 \tag{1.1}$$

được kí hiệu là $\alpha(A)$, và ta viết $\alpha(A) = \dim \ker A$.

Cho X_1^* và X_2^* là không gian tất cả các hàm tuyến tính bị chặn tương ứng xác định trên X_1 và X_2, được gọi là các không gian liên hợp. Nếu $A \in L(X_1, X_2)$, thì toán tử liên hợp $A^* : X_2^* \to X_1^*$ được xác định bởi hệ thức $(A^*u)(x) = u(Ax)$ với $u \in X_2^*$. Tập $\ker A^* := \{u \in X_2^* : A^*u = 0\}$ là không gian con của X_2^* với số chiều $\alpha(A^*) = \dim \ker A^*$.

Toán tử tuyến tính $A \in L(X_1, X_2)$ được gọi là giải chuẩn (theo nghĩa Hausdorff) nếu phương trình

$$Ax = y \tag{1.2}$$

giải được với mọi $y \in X_2$ mà trực giao với tất cả các nghiệm của phương trình thuần nhất liên hợp $A^*u = 0$, tức là nếu và chỉ nếu

$$u(y) = 0 \text{ với mọi hàm } u \in \ker A^*. \tag{1.3}$$

Bây giờ, ta đưa ra các định nghĩa về toán tử Noether và chỉ số của nó.

Định nghĩa 1.1. Toán tử tuyến tính $A \in L(X_1, X_2)$ được gọi là toán tử Noether nếu:
(i) A là toán tử giải chuẩn,
(ii) $\alpha(A)$ và $\alpha(A^*)$ là các số hữu hạn.

Định nghĩa 1.2. Số nguyên $\operatorname{ind} A = \alpha(A) - \alpha(A^*)$ được gọi là chỉ số của toán tử Noether A.

Nhận xét 1.1. Ta có thể chứng minh được rằng điều kiện giải chuẩn của toán tử A (theo nghĩa Hausdorff) tương đương với điều kiện tập $\operatorname{im} A$ là đóng trong không gian X_2, tức là $\operatorname{im} A = \overline{\operatorname{im} A}$. Không gian $X_2/\overline{\operatorname{im} A}$ được gọi là đối hạch của toán tử A và được kí hiệu là coker A, tức là $\operatorname{coker} A = X_2/\overline{\operatorname{im} A}$. Ta kí hiệu số chiều của nó bởi $\beta(A)$, tức là $\beta(A) = \dim \operatorname{coker} A$. Ta cũng có thể chứng minh được rằng, với toán tử giải chuẩn $A \in L(X_1, X_2)$, không gian con $\ker A^*$ là hữu hạn chiều nếu và chỉ nếu không gian con coker A là hữu hạn chiều và $\alpha(A^*) = \beta(A)$. Vì vậy, ta thu được định nghĩa thay thế sau về toán tử Noether.

Định nghĩa 1.3. Toán tử tuyến tính $A \in L(X_1, X_2)$ được gọi là toán tử Noether nếu:
(i) A là toán tử giải chuẩn ($\operatorname{im} A = \overline{\operatorname{im} A}$),
(ii) $\alpha(A)$ và $\beta(A)$ là các số hữu hạn.

Định nghĩa 1.4. Toán tử Noether có chỉ số bằng 0 được gọi là toán tử Fredholm.

Ta thấy toán tử $A = I + D \in L(X)$, trong đó I là toán tử đồng nhất và D là toán tử compact là toán tử Fredholm, ta gọi là toán tử Fredholm chính tắc.

Ví dụ 1.1. Toán tử

$$U : C[a, b] \to C[a, b]$$

$$(U\varphi)(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds,$$

trong đó $K(x, s)$ là hàm số liên tục trên miền $\{a \le x \le b,\, a \le s \le b\}$ là toán tử Fredholm chính tắc.

*) Một số tính chất của toán tử Noether:

1. Toán tử A là toán tử Noether nếu và chỉ nếu toán tử A^* là toán tử Noether

và khi đó $\operatorname{ind} A^* = -\operatorname{ind} A$.
2. Cho toán tử Noether A có số dương $\rho(A)$. Khi đó, với mỗi toán tử B thỏa mãn điều kiện $||B|| < \rho(A)$, toán tử $A + B$ là toán tử Noether và $\operatorname{ind}(A + B) = \operatorname{ind} A$.
3. Nếu A là toán tử Noether và D là toán tử compact thì $A + D$ là toán tử Noether và $\operatorname{ind}(A + D) = \operatorname{ind} A$.
4. Nếu $B \in L(X_1, X_2)$ và $A \in L(X_2, X_3)$ là các toán tử Noether thì $AB \in L(X_1, X_3)$ cũng là toán tử Noether và $\operatorname{ind}(AB) = \operatorname{ind} A + \operatorname{ind} B$.

Định nghĩa 1.5. Ta nói rằng toán tử A có chính quy trái (phải) nếu tồn tại toán tử tuyến tính bị chặn R sao cho tích $RA\,(AR)$ là toán tử Fredholm chính tắc.

Toán tử R được gọi là chính quy trái (phải) của toán tử A. Ta nói toán tử A có chính quy nếu toán tử A có R_A vừa là có chính quy phải và chính quy trái. Khi đó, R_A được gọi là chính quy hai phía của A.

Định lý 1.1. (Tiêu chuẩn Noether, xem [6])
Các khẳng định sau về toán tử $A \in L(X_1, X_2)$ là tương đương:
(i) A là toán tử Noether;
(ii) Toán tử A có chính quy;
(iii) Có các toán tử $B_1 \in L(X_2, X_1)$ và $B_2 \in L(X_2, X_1)$ sao cho B_1A và AB_2 là các toán tử Noether.

1.2 Hàm dịch chuyển

Định nghĩa 1.6. Cho Γ là đường cong định hướng, đóng hoặc không đóng, đơn và $\alpha(t)$ là một đồng phôi ánh xạ đường cong Γ vào chính nó. Đồng phôi $\alpha(t) : \Gamma \to \Gamma$ được gọi là hàm dịch chuyển.

Hàm dịch chuyển $\alpha(t)$ bảo toàn hướng trên Γ được gọi là dịch chuyển thuận và kí hiệu là $\alpha_+(t)$. Hàm dịch chuyển $\alpha(t)$ thay đổi hướng trên Γ được gọi là dịch chuyển ngược và kí hiệu là $\alpha_-(t)$.

Về sau, nếu không có giả thiết nào khác, ta luôn giả thiết rằng dịch chuyển $\alpha(t)$ có đạo hàm $\alpha'(t)$ luôn khác không và thỏa mãn điều kiện Holder tại mọi điểm trên Γ.

Định nghĩa 1.7. Điểm $\tau \in \Gamma$ được gọi là điểm tuần hoàn của hàm dịch chuyển $\alpha(t)$ cấp $k \geq 1$ nếu $\alpha_k(\tau) = \tau$ và (với k>1) $\alpha_i(\tau) \neq \tau, \forall\, i = 1, 2, ..., k-1$, trong đó $\alpha_i(t) = \alpha(\alpha_{i-1}(t))$ và ta quy ước $\alpha_0(t) \equiv t$.

Điểm tuần hoàn bậc một được gọi là điểm bất động của hàm dịch chuyển.

Ta kí hiệu $M(\alpha, k)$ là tập các điểm tuần hoàn của dịch chuyển $\alpha(t)$ bậc k. Dãy $\alpha_n(t), n = 1, 2, ...$ được gọi là dãy lặp của dịch chuyển $\alpha(t)$ tại điểm $t \in \Gamma$.

Phân loại hàm dịch chuyển có thể được thực hiện dựa trên các sự kiện sau:
1) Hàm dịch chuyển $\alpha(t)$ bảo toàn hướng trên Γ hoặc thay đổi hướng (theo hướng ngược lại) trên Γ.
2) Hàm dịch chuyển $\alpha(t)$ có hoặc không có điểm tuần hoàn trên Γ.
3) Nếu tồn tại những điểm tuần hoàn thì hoặc là tất cả những điểm trên đường cong Γ tuần hoàn hoặc tập những điểm tuần hoàn trên Γ là một tập đóng.

*) Phân loại các dịch chuyển bảo toàn hướng:
Tập tất cả các phép dịch chuyển bảo toàn hướng của chu tuyến đóng, đơn, kí hiệu là M^+, được chia thành các lớp sau:
(1) Tồn tại số nguyên $k \geq 2$ (nhỏ nhất) sao cho $M(\alpha, k) = \Gamma$. (lớp M_1^+)
(2) $M(\alpha, k) \neq \varnothing$ và $M(\alpha, k) \neq \Gamma$. (lớp M_2^+)
(3)$M(\alpha, k) = \varnothing$. (lớp M_3^+)

Định nghĩa 1.8. Dịch chuyển bảo toàn hướng $\alpha(t)$ thỏa mãn điều kiện $M(\alpha, k) = \Gamma$ với $k \geq 2$ (thuộc lớp M_1^+) được gọi là dịch chuyển Carleman thuận cấp k. Dịch chuyển bảo toàn hướng $\alpha(t)$ thỏa mãn điều kiện $M(\alpha, k) \neq \Gamma$ được gọi là dịch chuyển không Carleman.

Từ việc phân lớp trên, ta suy ra rằng một dịch chuyển Carleman bảo toàn hướng cấp $k \geq 2$ không có điểm cố định trên Γ.

*) Phân loại các dịch chuyển thay đổi hướng:
Tập M^- tất cả các đồng phôi của Γ vào chính nó thay đổi hướng của Γ theo hướng ngược lại được chia thành các lớp M_1^- và M_2^- được xác định bởi các điều kiện sau:
(1) $\alpha_2(t) \equiv t$. (lớp M_1^-)
(2) $\alpha_2(t) \in M_2^+$ và $M(\alpha_2, 1) \neq \varnothing$. (lớp M_2^-)

Định nghĩa 1.9. Hàm dịch chuyển thay đổi hướng thuộc lớp M_1^- được gọi là dịch chuyển Carleman ngược hướng. Hàm dịch chuyển thuộc lớp M_2^- được gọi là dịch chuyển không Carleman.

Từ sự phân lớp trên, ta suy ra rằng không tồn tại đồng phôi $\alpha(t)$ của một chu tuyến đơn Γ lên chính nó, thay đổi hướng trên Γ và là một dịch chuyển Carleman sao cho số nhỏ nhất là $k > 2$.

Sau đây, ta phát biểu một số tính chất của hàm dịch chuyển và hàm dịch chuyển Carleman (xem chứng minh trong [6]):
1. Nếu hàm dịch chuyển $\alpha(t)$ bảo toàn hướng trên Γ và $M(\alpha, k) \neq \varnothing$ với $k \geq 1$ nào đó thì $M(\alpha, l) = \varnothing$, với mọi $l \neq k$.
2. Nếu một hàm dịch chuyển $\alpha(t)$ bảo toàn hướng trên Γ và các điểm $\tau_1, \tau_2 \in M(\alpha, 1)$ sao cho: $(\tau_1, \tau_2) \cap M(\alpha, 1) = \varnothing$ ((τ_1, τ_2) là cung mở của Γ với các đầu mút τ_1 và τ_2) thì với mỗi điểm $t \in (\tau_1, \tau_2)$, dãy lặp $\alpha_n(t)$ hội tụ về một điểm bất động hoặc là τ_1 hoặc là τ_2.
3. Cho một dịch chuyển Carleman bảo toàn hướng trên Γ với cấp $k > 2$, tồn tại một số nguyên dương l sao cho với dịch chuyển $\beta(t) = \alpha_l(t)$, các điểm $\beta_1(t), ..., \beta_{k-1}(t)$, $t \in \Gamma$ được sắp thứ tự theo chiều đã xác định của Γ.
4. Các lớp M_1^+, M_2^+, M_3^+, M_1^-, M_2^- là khác rỗng.

Định nghĩa 1.10. (Chỉ số của hàm số)

Cho Γ là đường cong đóng, định hướng và $G(t)$ là hàm số liên tục sao cho $G(t) \neq 0$ trên Γ. Chỉ số của hàm số $G(t)$ dọc theo chu tuyến Γ là tỉ số giữa độ tăng trưởng (số gia) của argumen của nó khi t chuyển động hết một lượt dọc theo chu tuyến (theo chiều dương) và 2π.

Ta kí hiệu $\{\omega\}_\Gamma$ là độ tăng của ω dọc theo Γ thì chỉ số của $G(t)$ được viết dưới dạng

$$k = \operatorname{Ind}_\Gamma G(t) = \frac{1}{2\pi}\{\arg G(t)\}_\Gamma. \tag{1.4}$$

*) Một số tính chất của chỉ số (xem [2])
1. Chỉ số của hàm số liên tục trên chu tuyến đóng và không triệt tiêu trên đó luôn là một số nguyên (vì sự tăng trưởng của argumen dọc theo chu tuyến đóng của hàm liên tục sẽ là bội của 2π).
2. Chỉ số của tích hai hàm số bằng tổng của các chỉ số. Chỉ số của một thương bằng hiệu các chỉ số tương ứng.
3. Nếu $G(t)$ là giá trị biên của hàm số giải tích từ bên trong hoặc từ bên ngoài chu tuyến thì chỉ số của nó bằng số không điểm từ bên trong hoặc từ bên ngoài chu tuyến lấy dấu âm.
4. Nếu hàm $G(t)$ giải tích từ bên trong chu tuyến trừ ra hữu hạn điểm có thể là các cực điểm thì chỉ số bằng hiệu giữa số không điểm và số cực điểm (kể cả bội).

Ví dụ 1.2. Xét hàm dịch chuyển phân tuyến tính

$$\alpha(t) = \frac{t - \beta}{\overline{\beta} t - 1}, \; |\beta| \neq 1,$$

có phân tích

$$\alpha(t) = \alpha^+(t)t^\mu\alpha^-(t), \tag{1.5}$$

trong đó $\alpha^+(t) = \lambda(\overline{\beta}t-1)^{-1}$, $\alpha^-(t) = \lambda^{-1}(t-\beta)t^{-1}$, $\lambda = \sqrt{1-|\beta|^2}$, $\mu = 1$ nếu $|\beta| < 1$ và $\alpha^+(t) = (i\lambda)^{-1}(t-\beta)$, $\alpha^-(t) = i\lambda t(\overline{\beta}t-1)^{-1}$, $\lambda = \sqrt{|\beta|^2-1}$, $\mu = -1$ nếu $|\beta| > 1$.

Nếu $|\beta| < 1$ thì các hàm $\alpha^+(t)$ và $\alpha^-(t)$ tương ứng giải tích trong các miền $D^+ = \{|z| < 1\}$ và $D^- = \{|z| > 1\}$ và chúng không có không điểm trong các miền đó bởi vì $1/\overline{\beta} \notin D^+$, $\beta \notin D^-$. Trong trường hợp này, chỉ số của phân tích (1.5) được xác định bởi thừa số t, tức là $\operatorname{Ind}_\Gamma \alpha(t) = 1$. Điều này chỉ ra rằng $\alpha(t)$ là một đồng phôi của đường tròn đơn vị $\Gamma_0 = \{t : |t| = 1\}$ vào chính nó bảo toàn hướng trên Γ_0. Bằng tính toán trực tiếp, ta dễ dàng kiểm tra được rằng trong trường hợp này các thừa số $\alpha^+(t)$ và $\alpha^-(t)$ thỏa mãn điều kiện

$$\alpha^\pm(\alpha(t)) = [\alpha^\pm(t)]^{-1}. \tag{1.6}$$

Trong trường hợp $|\beta| > 1$ các hàm $\alpha^+(t)$ và $\alpha^-(t)$ tương ứng giải tích trong các miền $D^+ = \{|z| < 1\}$ và $D^- = \{|z| > 1\}$ và chúng không có không điểm trong các miền đó bởi vì $\beta \notin D^+$, $1/\overline{\beta} \notin D^-$. Chỉ số của phân tích (1.5) được xác định bởi thừa số t^{-1}, tức là $\operatorname{Ind}_\Gamma \alpha(t) = -1$. Điều này chỉ ra rằng $\alpha(t)$ là một đồng phôi của đường tròn đơn vị $\Gamma_0 = \{t : |t| = 1\}$ vào chính nó thay đổi hướng trên Γ_0. Bằng tính toán trực tiếp, ta dễ dàng kiểm tra được rằng, nếu $\beta > 1$ thì các thừa số $\alpha^+(t)$ và $\alpha^-(t)$ thỏa mãn điều kiện

$$\alpha^\pm(\alpha(t)) = \alpha^\mp(t). \tag{1.7}$$

1.3 Toán tử tích phân kì dị

Định nghĩa 1.11. Đường cong định hướng Γ (đóng hoặc mở) được gọi là đường cong Lyapunov nếu điều kiện sau thỏa mãn: tiếp tuyến tại mọi điểm t của Γ tồn tại và tiếp tuyến đó tạo với trục thực một góc $\Theta(t)$ và thỏa mãn điều kiện Holder:

$$|\Theta(t_1) - \Theta(t_2)| < A|t_1 - t_2|^\mu,\ A > 0,\ 0 < \mu \le 1.$$

Một chu tuyến đa hợp Γ bao gồm hữu hạn các cong Lyapunov đóng, đơn, định hướng, không giao nhau là biên của một miền liên thông bị chặn D^+ trên mặt phẳng phức. Để đơn giản, chúng ta giả sử rằng: $z = 0 \in D^+$, ta kí hiệu $D^- = \mathbb{C} \setminus (D^+ \cup \Gamma)$ và D^- chứa điểm ∞. Chu tuyến Γ được định hướng sao cho khi di chuyển dọc trên nó thì miền D^+ luôn thuộc bên trái của chuyển động.

Tất cả các toán tử được xét trong luận văn tác động trong các không gian Banach $L_p(\Gamma)$, $(1 < p < \infty)$, $H_\mu(\Gamma)\,(0 < \mu \leq 1)$. Trong đó, $L_p(\Gamma)$ là không gian tất cả các hàm đo được Lebesgue trên Γ khả tích bậc p. Chuẩn trong $L_p(\Gamma)$ được xác định bởi

$$||\varphi||_{L_p} = \left(\int_\Gamma |\varphi(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$H_\mu(\Gamma)$, $\mu \in (0; 1]$ là không gian các hàm xác định trên Γ và thỏa mãn điều kiện Holder với số mũ μ. Không gian $H_\mu(\Gamma)$ là không gian Banach với chuẩn:

$$||\varphi||_{H_\mu} = \max_{t \in \Gamma} |\varphi(t)| + \sup_{\tau, t \in \Gamma} \frac{|\varphi(\tau) - \varphi(t)|}{|\tau - t|^\mu}.$$

Ta kí hiệu $C(\Gamma)$ là không gian Banach tất cả các hàm liên tục trên Γ với chuẩn:

$$||\varphi||_C = \max_{t \in \Gamma} |\varphi(t)|.$$

Định nghĩa 1.12. (Toán tử tích phân kỳ dị) Toán tử

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau,$$

trong đó tích phân được hiểu theo nghĩa giá trị chính Cauchy, hàm $\dfrac{1}{\tau - t}$ được gọi là nhân Cauchy và hàm $\varphi(t)$ được gọi là hàm mật độ của tích phân kỳ dị trong không gian $L_p(\Gamma)\,(1 < p < \infty)$, hoặc không gian $H_\mu(\Gamma)\,(0 < \mu \leq 1)$.

Toán tử S được xác định ở trên được gọi là toán tử tích phân kỳ dị.

Toán tử tích phân kì dị S có các tính chất sau (xem [6]):

1. Toán tử tích phân kì dị S bị chặn trong các không gian Banach $L_p(\Gamma)$, $(1 < p < \infty)$, $H_\mu(\Gamma)\,(0 < \mu < 1)$.
2. $S^2 = I$, trong đó I là toán tử đồng nhất (tính chất đối hợp).
3. Toán tử $D = aS - SaI$ là toán tử compact trong $L_p(\Gamma)$ nếu $a(t) \in C(\Gamma)$ hoặc trong $H_\mu(\Gamma)$ nếu $a(t) \in H_\mu(\Gamma)$.

1.4 Công thức Sokhotski - Plemeli

Ta khảo sát bài toán cơ bản về sự tồn tại giá trị của tích phân dạng Cauchy trên chu tuyến của tích phân và đánh giá mối liên hệ giữa giá trị của hàm số với tích phân kì dị.

Bổ đề 1.1. *(Bổ đề cơ bản, xem [2]) Khi hàm mật độ $\varphi(\tau)$ thỏa mãn điều kiện Holder và điểm t không trùng với các đầu mút của chu tuyến thì hàm số*

$$\Phi(z) = \int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z} d\tau$$

tại điểm $z = t$ của chu tuyến là liên tục, tức là hàm này có giá trị giới hạn xác định trên điểm t đi từ z từ mọi phía của chu tuyến, dọc theo mọi đường dẫn:

$$\lim_{z \to t} \Phi(z) = \int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau = \Phi(t).$$

Xét hàm số

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau, \tag{1.8}$$

trong đó $\varphi(\tau)$ thỏa mãn điều kiện Holder.

Giả sử chu tuyến Γ là đóng. Trong trường hợp chu tuyến mở ta bổ sung đường cong tùy ý để nó đóng và đặt trên đường cong phụ đó $\varphi(\tau) = 0$.

Để khảo sát giá trị của $\Phi(z)$ tại điểm t của chu tuyến, ta xét hàm số

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z} d\tau. \tag{1.9}$$

Kí hiệu giá trị của hàm giải tích $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ khi điểm z tiến tới điểm t của chu tuyến từ phía trong tương ứng bởi $\Phi^+(t)$, $\Psi^+(t)$, và từ phía ngoài tương ứng bởi $\Phi^-(t)$, $\Psi^-(t)$ (đối với chu tuyến mở sự tương ứng này được chọn từ trái qua phải). Để mô tả hướng đi tới giới hạn, ta viết $z \to t^+$ hoặc $z \to t^-$. Giá trị của hàm số tương ứng tại điểm t của chu tuyến được kí hiệu bởi $\Phi(t)$, $\Psi(t)$. Trong đó, $\Phi(t)$ là tích phân kì dị theo nghĩa giá trị chính

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau.$$

Xét hệ thức

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} 2\pi i, & \text{khi} \quad z \in D^+ \\ 0, & \text{khi} \quad z \in D^- \\ \pi i, & \text{khi} \quad z \in \Gamma. \end{cases}$$

Ta có

$$\Psi^+(t) = \lim_{z \to t^+} \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{1}{\tau - z} d\tau \right] = \Phi^+(t) - \varphi(t),$$

$$\Psi^-(t) = \lim_{z \to t^-} \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{1}{\tau - z} d\tau \right] = \Phi^-(t),$$

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{1}{\tau - z} d\tau = \Phi(t) - \frac{1}{2}\varphi(t).$$

Theo bổ đề cơ bản, hàm số $\Psi(t)$ là liên tục nên vế phải của hệ thức là đồng nhất, tức là

$$\Phi^+(t) - \varphi(t) = \Phi^-(t) = \Phi(t) - \frac{1}{2}\varphi(t).$$

Vậy nên

$$\begin{cases} \Phi^+(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \dfrac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \\ \Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \dfrac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \end{cases} \tag{1.10}$$

trong đó tích phân kì dị được hiểu theo nghĩa giá trị chính.

Công thức (1.10) được gọi là công thức Sokhotski - Plemeli.
Trừ và cộng các vế tương ứng của công thức (1.10) ta thu được hai công thức tương đương sau

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t), \tag{1.11}$$

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = (S\varphi)(t). \tag{1.12}$$

Cuối cùng, ta xét các toán tử

$$P_+ = \frac{1}{2}(I + S) \quad \text{và} \quad P_- = \frac{1}{2}(I - S).$$

Từ các tính chất của toán tử S, suy ra rằng các toán tử P_+ và P_- là các toán tử chiếu bù nhau trong không gian $H_\mu(\Gamma)$ và $L_p(\Gamma)$ với chu tuyến đóng Γ.

1.5 Bài toán bờ Riemann trong miền đơn liên

Giả sử Γ là chu tuyến đóng, đơn, trơn và chia mặt phẳng phức thành miền trong D^+ và miền ngoài D^- (giả thiết $\infty \in D^-$). Cho hai hàm số trên chu tuyến $G(t)$ và $g(t)$ thỏa mãn điều kiện Holder, trong đó $G(t)$ không triệt tiêu trên biên. Ta cần xác định hai hàm số $\Phi^+(z)$ giải tích trong miền D^+, và $\Phi^-(z)$ giải tích trong miền D^-, kể cả $z = \infty$, và thỏa mãn trên chu tuyến Γ hệ thức thuần nhất (bài toán thuần nhất)

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t), \tag{1.13}$$

hoặc hệ thức không thuần nhất (bài toán không thuần nhất)

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t). \tag{1.14}$$

Hàm số $G(t)$ được gọi là hệ số của bài toán Riemann, và hàm số $g(t)$ là phần tử tự do.

1.5.1 Bài toán bước nhảy

Trước tiên, ta xét bài toán bờ Riemann dạng đơn sơ nhất. Giả thiết rằng trên chu tuyến đóng Γ cho hàm số $\varphi(t)$ thỏa mãn điều kiện Holder. Ta cần xác định hai hàm số giải tích $\Phi(z) = \Phi^+(z)$ với $z \in D^+$, $\Phi(z) = \Phi^-(z)$ với $z \in D^-$, triệt tiêu tại vô cùng và thỏa mãn điều kiện

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t).$$

Từ công thức Sokhotski-Plemeli, hiển nhiên rằng hàm số

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau$$

là nghiệm của bài toán. Dễ dàng chứng minh rằng đây là nghiệm duy nhất của bài toán.

Nghiệm của bài toán trên có thể phát biểu dưới dạng sau: Hàm số tùy ý $\varphi(t)$ cho trên chu tuyến đóng và thỏa mãn điều kiện Holder, có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng hiệu của hai hàm số $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ tương ứng là các giá trị biên của các hàm giải tích $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$, dưới giả thiết $\Phi^-(\infty) = 0$. Nếu không đòi hỏi điều kiện $\Phi^-(\infty) = 0$, thì nghiệm của bài toán được cho bởi công thức

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau + \text{const}.$$

1.5.2 Bài toán thuần nhất

Giả thiết rằng bài toán bờ thuần nhất (1.13) có nghiệm và giả sử hàm số $\Phi^+(z)$ và $\Phi^-(z)$ là nghiệm của nó. Gọi số không điểm của các hàm số $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ tương ứng là N^+, N^-. Tính chỉ số của cả hai vế của hệ thức (1.13) ta nhận được

$$N^+ + N^- = \operatorname{Ind} G(t) = k.$$

Chỉ số k của hệ số của bài toán bờ Riemann được gọi là chỉ số của bài toán. Hiển nhiên, vế trái của hệ thức cuối cùng là không âm. Vì vậy, điều kiện cần để bài toán bờ Riemann thuần nhất giải được là chỉ số k không âm.

1. Trường hợp $k = 0$. Khi đó, $\ln G(t)$ là hàm số đơn trị, và $\ln \Phi^+(z)$, $\ln \Phi^-(z)$ giải tích. Lấy logarit hai vế của điều kiện biên (1.13), ta thu được

$$\ln \Phi^+(z) - \ln \Phi^-(z) = \ln G(t), \tag{1.15}$$

trong đó, $\ln G(t)$ là nhánh liên tục tùy ý. Dễ kiểm tra rằng kết quả nhận được không phụ tuộc vào việc chọn nhánh nào của logarit. Vậy nên, theo công thức Sokhotski-Plemeli, nghiệm của bài toán với điều kiện kèm thêm $\ln \Phi^-(\infty) = 0$ được cho bởi công thức

$$\ln \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau. \tag{1.16}$$

Ký hiệu $\ln \Phi(z) = L(z)$. Ta suy ra nghiệm của bài toán biên (1.13) thỏa mãn điều kiện $\Phi^-(\infty) = 1$, được cho bởi hàm số

$$\Phi^+(z) = e^{L^+(z)},\ \Phi^-(z) = e^{L^-(z)}. \tag{1.17}$$

Nếu không đòi hỏi điều kiện $\Phi^-(\infty) = 1$, thì công thức (4.17) phải chứa hằng số tự do và nghiệm của bài toán có dạng

$$\Phi^+(z) = Ae^{L^+(z)},\ \Phi^-(z) = Ae^{L^-(z)}, \tag{1.18}$$

trong đó A là hằng số tùy ý.

2. Trường hợp $k > 0$. Giả thiết rằng gốc tọa độ nằm trong miền D^+. Hàm số t^k có chỉ số k. Ta viết điều kiện biên dưới dạng

$$\Phi^+(t) = t^k[t^{-k}G(t)]\,\Phi^-(t).$$

Hiển nhiên là hàm số $G_1(t) = t^{-k}G(t)$ có chỉ số bằng 0. Biểu diễn nó dưới dạng thương $G_1(t) = \dfrac{e^{L^+(t)}}{e^{L^-(t)}}$, trong đó

$$L(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\ln[\tau^{-k}G(\tau)]}{\tau - z} d\tau. \tag{1.19}$$

Điều kiện biên viết lại được như sau

$$\frac{\Phi^+(t)}{e^{L^+(t)}} = t^k \frac{\Phi^-(t)}{e^{L^-(t)}}.$$

Hệ thức cuối cùng này cho thấy hàm số $\dfrac{\Phi^+(t)}{e^{L^+(t)}}$, giải tích trong D^+, và hàm số $t^k \dfrac{\Phi^-(t)}{e^{L^-(t)}}$, giải tích trong D^-, trừ ra tại vô cùng, trong đó nó có thể có cực điểm bậc không quá k, là thác triển giải tích của nhau qua chu tuyến Γ. Ngược lại, ta thấy chúng là nhánh của hàm số giải tích duy nhất trong cả mặt phẳng phức, trừ ra một cực điểm bậc không quá k tại vô cùng. Theo định lý Liouville suy rộng, hàm số này là đa thức bậc không quá k với hệ số phức tùy ý.

Vậy nên, ta nhận được nghiệm tổng quát của bài toán là

$$\Phi^+(z) = e^{L^+(z)} P_k(z), \; \Phi^-(z) = e^{L^-(z)} z^{-k} P_k(z). \tag{1.20}$$

Nếu $k < 0$ thì bài toán thuần nhất không có nghiệm.
Về sau, trong áp dụng của bài toán bờ Riemann để giải phương trình tích phân kì dị, ta thường tìm nghiệm của bài toán với điều kiện kèm thêm $\Phi^-(\infty) = 0$.

Từ công thức (1.20), thì $\Phi^-(\infty)$ bằng hệ số của t^k trong đa thức $P_k(z)$. Vậy nên, với điều kiện $\Phi^-(\infty) = 0$, nghiệm của phương trình thuần nhất có dạng

$$\Phi^+(z) = e^{L^+(z)} P_{k-1}(z), \; \Phi^-(z) = e^{L^-(z)} z^{-k} P_{k-1}(z), \tag{1.21}$$

trong đó $P_{k-1}(z)$ là đa thức bậc $k-1$ với hệ số tùy ý. Trong trường hợp này, bài toán có k nghiệm độc lập tuyến tính.

Định nghĩa 1.13. (Hàm chính tắc) Ta gọi hàm chính tắc của bài toán Riemann thuần nhất là hàm số giải tích thỏa mãn điều kiện biên (1.13) và khác không khắp nơi trong miền hữu hạn của mặt phẳng phức và tại điểm vô cùng có bậc bằng k.

Nếu ta viết lại điều kiện biên (1.13) của bài toán bờ Riemann dưới dạng

$$\Phi^+(t) = t^k [t^{-k}G(t)]\, \Phi^-(t),$$

thì dễ dàng thấy rằng với k tùy ý, hàm chính tắc của bài toán $\chi(z)$ được cho bởi công thức

$$\chi^+(z) = e^{L^+(z)},\ \chi^-(z) = z^{-k} e^{L^-(z)}, \tag{1.22}$$

trong đó $L(z)$ được cho bởi công thức (1.19).

Khi $k \geq 0$, nghiệm tổng quát của bài toán thuần nhất được biểu diễn qua hàm chính tắc như sau

$$\Phi^+(z) = \chi^+(z)\, P_k(z),\ \Phi^-(z) = \chi^-(z)\, P_k(z). \tag{1.23}$$

1.5.3 Bài toán không thuần nhất

Ta viết lại hệ số $G(t)$ của bài toán không thuần nhất (1.14) dưới dạng $G(t) = \dfrac{\chi^+(t)}{\chi^-(t)}$. Khi đó, bài toán (1.14) có dạng

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{\chi^-(t)} + \frac{g(t)}{\chi^+(t)}.$$

Ta thấy, hàm số $\dfrac{g(t)}{\chi^+(t)}$ thỏa mãn điều kiện Holder. Giả sử ta thay nó bởi hiệu các giá trị biên của hàm số giải tích

$$\frac{g(t)}{\chi^+(t)} = \Psi^+(t) - \Psi^-(t),$$

trong đó

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{g(\tau)}{\chi^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}. \tag{1.24}$$

Khi đó, điều kiện biên có thể viết được dưới dạng

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi^+(t)} - \Psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{\chi^-(t)} - \Psi^-(t).$$

Tương tự như bài toán thuần nhất, ta thu được kết quả sau:
1. Khi $k \geq 0$, thì

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi^+(t)} - \Psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{\chi^-(t)} - \Psi^-(t) = P_k(z).$$

Ta thu được nghiệm

$$\Phi^\pm(z) = \chi^\pm(z)[\Psi^\pm(z) + P_k(z)], \tag{1.25}$$

trong đó $\chi^{\pm}(z)$, $\Psi^{\pm}(z)$ cho bởi công thức (1.22), (1.24); $P_k(z)$ là đa thức bậc k với hệ số tùy ý.

2. Khi $k < 0$, thì $\dfrac{\Phi^+(t)}{\chi^+(t)}$ triệt tiêu tại vô cùng và

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi^+(t)} - \Psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{\chi^-(t)} - \Psi^-(t) = 0.$$

Vậy nên

$$\Phi^{\pm}(z) = \chi^{\pm}(z)\Psi^{\pm}(z). \tag{1.26}$$

Để hàm $\Phi^-(z)$ giải tích tại vô cùng, điều kiện cần và đủ là hàm $\Psi^-(z)$ có không điểm bậc lớn hơn $-k-1$ tại điểm $z = \infty$. Khai triển hàm $\Psi^-(z)$ thành chuỗi lũy thừa tại điểm $z = \infty$, ta có

$$\Psi^-(z) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^{-j},$$

trong đó

$$c_j = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{g(\tau)}{\chi^+(\tau)}\tau^{j-1}d\tau.$$

Do vậy, để bài toán không thuần nhất giải được trong trường hợp chỉ số âm ($k < -1$), điều kiện cần và đủ là $-k-1$ hệ số trong khai triển của $\Psi^-(z)$ triệt tiêu, tức là

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{g(\tau)}{\chi^+(\tau)}\tau^{j-1}d\tau = 0 \, (j = 1, 2, \ldots, -k-1). \tag{1.27}$$

Nếu $k = -1$ thì bài toán không thuần nhất giải được và có nghiệm duy nhất.

Trong trường hợp đòi hỏi thêm điều kiện $\Phi^-(\infty) = 0$, nghiệm được cho khi $k \geq 0$ có dạng

$$\Phi^{\pm}(z) = \chi^{\pm}(z)[\Psi^{\pm}(z) + P_{k-1}(z)]. \tag{1.28}$$

(Nếu $k = 0$ thì ta đặt $P(z) \equiv 0$).

Nếu $k < 0$ thì nghiệm được cho bởi công thức

$$\Phi^{\pm}(z) = \chi^{\pm}(z)\Psi^{\pm}(z),$$

và điều kiện cần là $-k$ điều kiện sau của nghiệm phải được thỏa mãn

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{g(\tau)}{\chi^+(\tau)}\tau^{j-1}d\tau = 0 \, (j = 1, 2, \ldots, -k). \tag{1.29}$$

Ví dụ 1.3. Giải bài toán biên Riemann sau với chu tuyến Γ là đường tròn đơn vị

$$\Phi^+(t) = t\Phi^-(t) + \frac{-t^2+2t+2}{t(t-2)}.$$

Ta có

$$G(t) = t,\ \operatorname{Ind} G(t) = 1,$$

$$L(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\ln[\tau^{-1}G(\tau)]}{\tau - z} d\tau = 0.$$

Do đó

$$\chi^+(z) = e^{L^+(z)} = 1,\ \chi^-(z) = z^{-1}e^{L^-(z)} = \frac{1}{z}.$$

Xét

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{-\tau^2+2\tau+2}{\tau(\tau-2)}\frac{d\tau}{\tau - z}\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{\tau-2}\frac{d\tau}{\tau-z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\tau+1}{\tau}\frac{d\tau}{\tau-z}.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\Psi^+(z) = \frac{1}{z-2} - 1,\ \Psi^-(z) = -\left(1 - \frac{z+1}{z}\right).$$

Vậy, nghiệm của phương trình với điều kiện $\Phi^-(\infty) = 0$ là

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{z-2} - 1 + c,\ \Phi^-(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{z+1}{z} - 1 + c\right),$$

trong đó c là hằng số bất kì.

1.6 Phân tích hàm ma trận

Cho Γ là chu tuyến trơn, đóng và đơn chia mặt phẳng phức thành miền trong D^+ $(0 \in D^+)$ và miền ngoài D^- $(\infty \in D^-)$, và cho $G(t) = \big(G_{kl}(t)\big)_{k,l=1}^{n}$ là hàm ma trận cỡ $n \times n$ không kì dị với $G_{kl}(t) \in H_\mu(\Gamma)$. Đặt $k = \dfrac{1}{2\pi}\{\arg\det G(t)\}_\Gamma$.

Định nghĩa 1.14. Phân tích thành thừa số của hàm ma trận không kì dị $G(t)$ liên quan đến chu tuyến Γ là phép biểu diễn G dưới dạng

$$G(t) = G^+(t)\Lambda(t)G^-(t), \tag{1.30}$$

trong đó $G^{\pm}(t)$ là giá trị biên của các hàm ma trận $G^{\pm}(z)$, giải tích và không kì dị trong $D^{\pm}$, thỏa mãn $\det G^{\pm}(z) \neq 0$, tương ứng , $\Lambda = \text{diag}\{t^{k_1}, t^{k_2}, \ldots, t^{k_2}\}$, và $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n$ là các số nguyên. Các số $k_1, k_2, \ldots, k_n$ được gọi là chỉ số thành phần của G. Tổng $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ được gọi là chỉ số tổng của G.

Ví dụ 1.4. Cho hàm ma trận $G(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$. Hệ thức

$$G(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

là một phân tích của $G(t)$, với các chỉ số thành phần là $-1, 1$ và chỉ số tổng là $k = 0$.

Định lý 1.2. *Nếu có hai phân tích khác nhau của hàm ma trận không kì dị $G(t)$:*

$$G(t) = G^+(t)\Lambda(t)G^-(t) = \widetilde{G}^+(t)\widetilde{\Lambda}(t)\widetilde{G}^-(t)$$

và $H^+ = (\widetilde{G}^+)^{-1}G^+$, $H^- = \widetilde{G}^-(G^-)^{-1}$, thì $\Lambda = \widetilde{\Lambda} = diag\{t^{k_1}, t^{k_2}, \ldots, t^{k_2}\}$ và $\Lambda H^- = H^+\Lambda$.

Trong trường hợp $G(t)$ là ma trận cỡ 2×2, ta có

$$H^+ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & P_{k_1-k_2} \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, H^- = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t^{k_2-k_1}P_{k_1-k_2} \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

trong đó $P_{k_1-k_2}$ là đa thức bậc không quá $k_1 - k_2$ và λ_1, λ_2 là các hằng số.

1.7 Toán tử tích phân kì dị với dịch chuyển Carleman

Cho $\alpha(t)$ là dịch chuyển bảo toàn hoặc thay đổi hướng của chu tuyến đa hợp Γ ánh xạ mỗi thành phần của Γ vào chính nó, $\alpha'(t) \neq 0$ trên Γ và $\alpha'(t) \in H_\mu(\Gamma)$.

Định nghĩa 1.15. Toán tử W xác định trong $L_p(\Gamma)$ hoặc trong $H_\mu(\Gamma)$ như sau

$$(W\varphi)(t) = \varphi(\alpha(t))$$

được gọi là toán tử dịch chuyển.

Sau đây, ta đưa ra một số tính chất cơ bản của toán tử dịch chuyển W (xem [2]):

1. W là toán tử tuyến tính bị chặn và khả nghịch liên tục trong $L_p(\Gamma)$ và trong

$H_\mu(\Gamma)$. Đặc biệt, toán tử dịch chuyển có trọng $(U\varphi)(t) = |\alpha'(t)|^{1/p}\varphi(\alpha(t))$ là toán tử tuyến tính bị chặn và khả vi liên tục trong $L_p(\Gamma)$ sao cho $||U|| = 1$.
2. $W_\alpha^m = W_{\alpha_m}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
3. Nếu $\alpha_n(t) \equiv t$ ($\alpha(t)$ là một dịch chuyển Carleman) thì $W^n = I$.

Định lý 1.3. *Khi Γ là đường cong Lyapunov đóng đơn, $\alpha(t)$ là đồng phôi của Γ lên chính nó, $\alpha'(t) \neq 0$ và $\alpha'(t) \in H_\mu(\Gamma)$, $\mu \in (0; 1]$, thì toán tử $K = \gamma WSW^{-1} - S$ là compact trong các không gian $L_p(\Gamma)$, $p \in (1, \infty)$ và $H_\lambda(\Gamma)$ với $\lambda < \mu$.*

Cho $\alpha(t) : \Gamma \to \Gamma$ là dịch chuyển Carleman ($\alpha(t) \equiv t$) bảo toàn hoặc thay đổi hướng trên chu tuyến Lyapunov đa hợp Γ sao cho $\alpha'(t) \neq 0$ trên Γ và $\alpha'(t) \in H_\mu(\Gamma)$. Cho W là toán tử dịch chuyển tương ứng ($W^2 = I$).

Ta xét toán tử

$$K = (aI + bW)P_+ + (cI + dW)P_-,\ P_\pm = \frac{1}{2}(I \pm S) \tag{1.31}$$

trong $H_\mu(\Gamma)$ $(a, b, c, d \in H_\mu(\Gamma))$ hoặc trong $L_p(\Gamma)$ $(a, b, c, d \in C(\Gamma))$.

Cùng với toán tử K, ta cũng xét toán tử

$$\widetilde{K} = (aI - bW)P_+ + (cI - dW)P_- \tag{1.32}$$

trong $H_\mu(\Gamma)$ hoặc $L_p(\Gamma)$, $\widetilde{K}$ được gọi là toán tử bạn của K.
Khi đó, ta có hệ thức sau

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & I \\ W & -W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & \widetilde{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & W \\ I & -W \end{pmatrix} = \mathcal{A}P_+ + \mathcal{B}P_- + \mathcal{D}, \tag{1.33}$$

trong đó

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(\alpha(t)) & a(\alpha(t)) \end{pmatrix},\ \mathcal{B}(t) = \begin{pmatrix} c(t) & d(t) \\ d(\alpha(t)) & c(\alpha(t)) \end{pmatrix},$$

nếu $\alpha = \alpha_+(t)$ bảo toàn hướng trên Γ, và

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} a(t) & d(t) \\ b(\alpha(t)) & c(\alpha(t)) \end{pmatrix},\ \mathcal{B}(t) = \begin{pmatrix} c(t) & b(t) \\ d(\alpha(t)) & a(\alpha(t)) \end{pmatrix},$$

nếu $\alpha = \alpha_-(t)$ thay đổi hướng trên Γ. Toán tử $\mathcal{D}$ là toán tử compact.

Toán tử $M = \mathcal{A}P_+ + \mathcal{B}P_- + \mathcal{D}$ được gọi là toán tử tương ứng với K.

Định lý 1.4. *Toán tử*

$$K = (aI + bW)P_+ + (cI + dW)P_- : H_\mu(\Gamma) \to H_\mu(\Gamma)\,(L_p(\Gamma) \to L_p(\Gamma))$$

là toán tử Noether khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}\Delta_1(t) &= c(t)c(\alpha(t)) - d(t)d(\alpha(t)) \neq 0,\\ \Delta_2(t) &= a(t)a(\alpha(t)) - b(t)b(\alpha(t)) \neq 0\end{aligned} \tag{1.34}$$

nếu $\alpha(t)$ là dịch chuyển Carleman bảo toàn hướng trên Γ.

$$\Delta(t) = a(t)c(\alpha(t)) - d(t)b(\alpha(t)) \neq 0 \tag{1.35}$$

nếu $\alpha(t)$ là dịch chuyển Carleman thay đổi hướng trên Γ.

Chỉ số của toán tử Noether K được cho bởi

$$\operatorname{ind} K = \frac{1}{4\pi}\left\{\arg\frac{\Delta_1(t)}{\Delta_2(t)}\right\}_\Gamma \tag{1.36}$$

nếu dịch chuyển Carleman $\alpha = \alpha_+(t)$ bảo toàn hướng trên Γ, và

$$\operatorname{ind} K = -\frac{1}{2\pi}\{\arg\Delta(t)\}_\Gamma \tag{1.37}$$

nếu dịch chuyển Carleman $\alpha = \alpha_-(t)$ thay đổi hướng trên Γ.

Chương 2

Lý thuyết giải được của phương trình tích phân kì dị đặc trưng tổng quát với dịch chuyển phân tuyến tính Carleman trên đường tròn đơn vị

Xét phương trình tích phân kì dị tổng quát

$$(T\varphi)(t) \quad \equiv \quad (a(t)I + b(t)W)(P_+\varphi)(t) + (c(t)I + d(t)W)(P_-\varphi)(t) = f(t)$$

trong đó $\alpha(t)$ là dịch chuyển Carleman $\alpha(\alpha(t)) \equiv t$, W là toán tử dịch chuyển, $(W\varphi)(t) = \varphi(\alpha(t))$.

Để nghiên cứu lý thuyết giải được của phương trình tích phân kì dị đặc trưng tổng quát ở trên ta có thể đưa về bài toán giá trị biên hai thành phần bằng cách đưa ra các hạn chế về các hệ số đã cho, tức là chúng ta xét các trường hợp suy biến. Trong chương này ta sử dụng cách khác mà không hạn chế hệ số của phương trình, ta đưa ra các hạn chế về hàm dịch chuyển α , về toán tử dịch chuyển U và về chu tuyến Γ sao cho $US = \pm SU$ (S là toán tử tích phân kì dị) tương ứng với $\alpha = \alpha_+(t)$ và $\alpha = \alpha_-(t)$. Cụ thể, ta xét phương trình tích phân kì dị với dịch chuyển phân tuyến tính trên đường tròn đơn vị.

Trong cách này, toán tử T được phân tích thành nhân tử nhờ phép phân tích của toán tử ma trận $M = \mathcal{A}P_+ + \mathcal{B}P_-$. Từ đó, ta có thể tính toán được các số $\dim\ker T$ và $\dim\operatorname{coker} T$, và ta có thể xây dựng được cơ sở cho các không gian $\ker T$ và $\operatorname{coker} T$. Do đó, nghiệm của phương trình $T\varphi = f$ có thể tìm được dưới dạng hiện nếu biết phân tích của hàm ma trận $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$.

Phương pháp phân tích thành nhân tử của toán tử tích phân kì dị với dịch chuyển Carleman có sự khác nhau cơ bản trong các trường hợp dịch chuyển bảo toàn hướng và dịch chuyển ngược hướng. Trong phần 2.1, ta xét phương trình tích phân kì dị với dịch chuyển phân tuyến tính Carleman bảo toàn hướng, ma trận $\mathcal{C}$ thỏa mãn hệ thức

$$\mathcal{C} = e\,\mathcal{C}(\alpha(t))e, \qquad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{I}$$

Phép phân tích toán tử $T = P_+ + CP_-$ với toán tử hàm $C = c_0(t)I + c_1(t)U$ được thực hiện qua hai bước. Trong bước thứ nhất, bài toán phân tích toán tử hàm được giải quyết. Ta chỉ ra một đẳng cấu đại số, bài toán phân tích toán tử hàm tương đương với bài toán phân tích hàm ma trận tương ứng $\mathcal{C}$ trong đại số các hàm ma trận thỏa mãn điều kiện (I). Sau đó, dựa trên kết quả được đề cập, ta xây dựng phân tích cần thiết của toán tử T.

Trong phần 2.2, ta xét phương trình với dịch chuyển phân tuyến tính Carleman ngược hướng. Trong trường hợp này, ma trận $\mathcal{C}$ thỏa mãn hệ thức

$$\mathcal{C} = e\,\mathcal{C}^{-1}(\alpha(t))e, \qquad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{II}$$

Đầu tiên, phép phân tích đặc biệt của toán tử ma trận $M = P_+ + \mathcal{C}P_-$ được xây dựng. Phép phân tích này sao cho hệ thức (II) vẫn đúng cho các hệ số trong phép phân tích. Sau đó, ta xây dựng phân tích cần thiết của toán tử T.

2.1 Phương trình tích phân kì dị đặc trưng với dịch chuyển phân tuyến tính Carleman bảo toàn hướng

2.1.1 Phát biểu bài toán phân tích thành nhân tử

Xét toán tử tích phân kì dị với dịch chuyển Carleman bảo toàn hướng

$$T = CP_+ + DP_- : \quad H_\mu(\Gamma) \longrightarrow H_\mu(\Gamma), \tag{2.1}$$

trong đó

$$C = c_2(t)I + d_2(t)W, \quad D = c_1(t)I + d_1(t)W$$

$$c_1, c_2, d_1, d_2 \in\ H_\mu(\Gamma), \qquad (W\varphi)(t) = \varphi(\alpha(t)), \qquad \alpha(\alpha(t)) \equiv\ t.$$

Theo định lí (1.4), toán tử T là toán tử Noether nếu và chỉ nếu:

$$\triangle_1(t) = c_1(t)c_1(\alpha(t)) - d_1(t)d_1(\alpha(t)) \neq\ 0, \quad \triangle_2(t) = c_2(t)c_2(\alpha(t)) - d_2(t)d_2(\alpha(t)) \neq\ 0,$$

và chỉ số của toán tử Noether T được tính bởi công thức

$$\operatorname{ind} T = \frac{1}{4\pi}\left\{\arg\frac{\triangle_1(t)}{\triangle_2(t)}\right\}_\Gamma .$$

Không giảm tổng quát, ta có thể xét toán tử tích phân kì dị với dạng đơn giản hơn

$$T = P_+ + AP_-,$$

trong đó

$$A = a(t)I + b(t)W.$$

Thật vậy, vì toán tử hàm $C = c_2(t)I + d_2(t)W$ khả nghịch nên ta có thể viết

$$T \equiv \ C(P_+ + C^- DP_-).$$

Ta có

$$C^{-1} = \frac{1}{\Lambda(t)}(c_2(\alpha(t))\, I - d_2(t)\, W), \quad \Lambda(t) = c_2(t)\, c_2(\alpha(t)) - d_2(t)\, d_2(\alpha(t)).$$

Do đó

$$\begin{aligned} C^{-1}D &= \frac{1}{\Lambda(t)}(c_2(\alpha(t))\, I - d_2(t)W)(c_1(t)I + d_1(t)\, W) \\ &= \frac{1}{\Lambda(t)}[(c_2(\alpha(t))\, c_1(t) - d_2(t)\, d_1(\alpha(t)))I + (c_2(\alpha(t))\, d_1(t) - d_2(t)\, c_1(\alpha(t)))W]. \end{aligned}$$

Đặt

$$a_1(t) = \frac{1}{\Lambda(t)}(c_2(\alpha(t))\, c_1(t) - d_2(t)\, d_1(\alpha(t))), \quad b_1(t) = \frac{1}{\Lambda(t)}(c_2(\alpha(t))\, d_1(t) - d_2(t)\, c_1(\alpha(t)))$$

và xét toán tử (2.1) với toán tử dịch chuyển phân tuyến tính Carleman có trọng $U = \alpha^+(t)W$, trong đó $\alpha^+(t) = \lambda(\overline{\beta}t - 1)^{-1}$, ta thu được biểu diễn sau cho toán tử ban đầu (2.1)

$$T \equiv (c_2(t)\, I + (\alpha^+(t))^{-1}\, d_2(t)U)(P_+ + (a(t)\, I + b(t)U)P_-),$$

với $a(t) = a_1(t)$, $b(t) = (\alpha^+(t))^{-1}\, b_1(t)$ và trong đó toán tử $C = c_2(t)\, I + (\alpha^+(t))^{-1} d_2(t)U$ khả vi liên tục. Do đó, ta chỉ cần xét toán tử T có dạng sau

$$T(A) = P_+ + AP_-\,, \quad A = aI + bU. \tag{2.2}$$

Theo phần 1.7, bài toán phân tích thành nhân tử của toán tử $T(A)$ được liên kết trực tiếp với phép phân tích thành nhân tử của toán tử tích phân không kì dị tương ứng $M(A)$. Do $SU = US$ nên toán tử compact $\mathcal{D}^0$ triệt tiêu. Vì vậy, toán tử không dịch chuyển tương ứng có dạng

$$M(\mathcal{A}) = P_+ + \mathcal{A}(t)P_-,$$

với

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(\alpha(t)) & a(\alpha(t)) \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Đặc biệt, toán tử $A = aI + bU$ khả nghịch nếu và chỉ nếu $\det \mathcal{A}(t) \neq 0$. Ta cũng biết rằng

$$\operatorname{ind} T(A) = \frac{1}{2}\operatorname{ind} M(\mathcal{A}) = \frac{1}{4\pi}\{\arg \det\mathcal{A}(t)\}_{t\in\Gamma_0} = \frac{k_1 + k_2}{2}, \tag{2.4}$$

trong đó $k_1 \geq k_2$ là các chỉ số thành phần của phép phân tích hàm ma trận $\mathcal{A}(t)$. Từ công thức (2.4) suy ra rằng cả hai chỉ số thành phần của ma trận (2.3) cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Ta thấy rằng hàm ma trận bất kì có dạng (2.3) thỏa mãn hệ thức:

$$\mathcal{A} = e\,\mathcal{A}(\alpha(t))\,e, \qquad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Điều này rất quan trọng trong phép phân tích toán tử $T(A)$. *Để phân tích của toán tử $T(A)$ ta cần phân tích toán tử hàm A, tức là biểu diễn nó dưới dạng*

$$A = A_+\,R\,A_-,$$

trong đó các toán tử hàm A_+ và A_- khả nghịch và cùng với các toán tử nghịch đảo của chúng, A_+^{-1} và A_-^{-1} thỏa mãn điều kiện về kí hiệu Hankel của chúng

$$P_-\,A_+^{\pm 1}P_+ = 0 \text{ và } P_+\,A_-^{\pm 1}P_- = 0,$$

và thừa số R là một toán tử khả nghịch có hệ số đơn giản. Khi đó, ta có một đẳng cấu đại số, bài toán phân tích này tương đương với bài toán phân tích hàm ma trận tương ứng (2.3) *trong đại số các hàm ma trận thỏa mãn điều kiện* (2.5).

Sau đây, ta đưa ra một số kí hiệu cần thiết:
Cho $\Gamma_0 = \{t : |t| = 1\}$ và $\boldsymbol{H} = H_\mu(\Gamma_0)$ là tập các hàm thỏa mãn điều kiện Holder với chỉ số μ. Cho $\boldsymbol{H}_+ = P_+\,\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{H}_-^0 = P_-\,\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{H}_- = \mathbb{C} \oplus P_-\,\boldsymbol{H}$, và cho $\boldsymbol{A}$ là đại số của tất cả các toán tử hàm với hệ số thuộc $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{A}_\pm$ là tập tất cả các toán tử hàm với hệ số thuộc $\boldsymbol{H}_\pm$, $\boldsymbol{A}_-^0$ là tập tất cả các toán tử hàm với hệ số thuộc $\boldsymbol{H}_-^0$. Khi đó

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_+ \oplus \boldsymbol{A}_-^0 \text{ và } P_\mp\,\boldsymbol{A}_\pm\,P_\pm = \{0\}.$$

Bởi vì toán tử dịch chuyển U giao hoán với toán tử tích phân kì dị S nên ta có $P_{\pm}\,U\,P_{\mp} = 0$.

Đại số $\boldsymbol{A}$ được gọi là đại số phân tích.

Ta kí hiệu $\boldsymbol{H}_{\alpha}^{2\times 2}$ là tập tất cả các hàm ma trận dạng (2.3) với các phần tử thuộc $\boldsymbol{H}$. Dễ thấy rằng $\boldsymbol{H}_{\alpha}^{2\times 2}$ là đại số con của đại số $\boldsymbol{H}^{2\times 2}$ và

$$\boldsymbol{H}_{\alpha}^{2\times 2} = \boldsymbol{H}_{+,\alpha}^{2\times 2} \oplus \widetilde{\boldsymbol{H}}_{-,\alpha}^{2\times 2},$$

trong đó

$$\boldsymbol{H}_{+,\alpha}^{2\times 2} = P_{+}\,\boldsymbol{H}_{\alpha}^{2\times 2} \text{ và } \widetilde{\boldsymbol{H}}_{-,\alpha}^{2\times 2} = P_{-}\boldsymbol{H}_{\alpha}^{2\times 2}, \boldsymbol{H}_{-,\alpha}^{2\times 2} := \widetilde{\boldsymbol{H}}_{-,\alpha}^{2\times 2} \oplus \mathbb{C}^{2\times 2}$$

tức là, đại số $\boldsymbol{H}_{\alpha}^{2\times 2}$ cũng là một đại số phân tích.

Xét phép biến đổi

$$\begin{aligned} \pi: \quad \boldsymbol{A} &\longrightarrow \boldsymbol{H}_{\alpha}^{2\times 2} \\ A = aI + b\,U &\longmapsto \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b(\alpha) & a(\alpha) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ta thấy π là một đẳng cấu đại số từ đại số $\boldsymbol{A}$ vào đại số $\boldsymbol{H}_{\alpha}^{2\times 2}$, và với dịch chuyển phân tuyến tính, đẳng cấu π thỏa mãn điều kiện sau:

$$\pi(\boldsymbol{A}_{\pm}) = \boldsymbol{H}_{\pm,\alpha}^{2\times 2}.$$

Do đó, để phân tích toán tử A trong đại số $\boldsymbol{A}$ ta chỉ cần phân tích hàm ma trận $\mathcal{A}$ trong đại số $\boldsymbol{H}_{\alpha}^{2\times 2}$.

2.1.2 Phân tích ma trận hàm trong đại số $\boldsymbol{H}_{\alpha}^{2\times 2}$

Xét toán tử

$$\Pi_{[x,y]}: \quad \boldsymbol{H}^{2\times 2} \longrightarrow \boldsymbol{H}^{2\times 2}$$

được xác định như sau:

$$\Pi_{[x,y]}\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\mathcal{A} - x\,\mathcal{A}(\alpha)y),$$

trong đó $\mathcal{A} \in \boldsymbol{H}^{2\times 2}$, x và y là các phần tử cố định của đại số $\boldsymbol{H}^{2\times 2}$.

Dễ thấy rằng nếu $x\,x(\alpha) = e_0$, $y(\alpha)\,y = e_0$, $e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ thì $\Pi_{[x,y]}$ là một toán tử chiếu trong $\boldsymbol{H}_\alpha^{2\times 2}$. Thật vậy

$$\begin{aligned}\Pi_{[x,y]}^2\mathcal{A} &= \Pi_{[x,y]}\left(\frac{1}{2}(\mathcal{A} - x\mathcal{A}(\alpha)y)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\mathcal{A} - x\mathcal{A}(\alpha)y) - \frac{x}{2}(\mathcal{A}(\alpha) - x(\alpha)\mathcal{A}y(\alpha))y\right]\\ &= \frac{1}{4}[\mathcal{A} - 2x\mathcal{A}(\alpha)y + xx(\alpha)\mathcal{A}y(\alpha))y] = \Pi_{[x,y]}\mathcal{A}\end{aligned}$$

với mọi hàm ma trận $\mathcal{A} \in \boldsymbol{H}^{2\times 2}$.

Ngoài ra, nếu thêm điều kiện $x = y^{-1}$ thì tập $\ker \Pi_{[x,y]}$ là một đại số. Thật vậy, với $\mathcal{A} \in \ker \Pi_{[x,y]}$, $\mathcal{B} \in \ker \Pi_{[x,y]}$, tức là $\mathcal{A} = x\mathcal{A}(\alpha)y$, $\mathcal{B} = x\mathcal{B}(\alpha)y$ thì

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = x\mathcal{A}(\alpha)y.x\mathcal{B}(\alpha)y = x\mathcal{A}(\alpha)y.y^{-1}\mathcal{B}(\alpha)y = x\mathcal{A}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)y,$$

suy ra $\mathcal{A}\mathcal{B} \in \ker \Pi_{[x,y]}$. Từ (2.5) suy ra

$$\boldsymbol{H}_\alpha^{2\times 2} = \ker \Pi_{[e,e]}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do đó, bài toán phân tích thành nhân tử của ma trận $\mathcal{A}$ trong đại số $\boldsymbol{H}_\alpha^{2\times 2}$ có thể được phát biểu như sau:
Tìm một phân tích của $\mathcal{A} \in \ker \Pi_{[e,e]}$ sao cho các thừa số phân tích tương ứng cũng thuộc không gian con $\ker \Pi_{[e,e]}$.

Trong trường hợp các chỉ số thành phần của ma trận $\mathcal{A}$ bằng 0, bài toán phân tích được giải quyết dễ dàng, bởi vì nếu $\mathcal{A} \in \boldsymbol{H}_\alpha^{2\times 2}$ có một phân tích với các chỉ số thành phần bằng 0 trong $\boldsymbol{H}^{2\times 2}$ (gọi là phân tích chính tắc) thì hàm ma trận này cũng có một phân tích chính tắc trong đại số $\boldsymbol{H}_\alpha^{2\times 2}$. Để thấy điều này, ta cần một số thông tin về dịch chuyển α. Hàm biến đổi phân tuyến tính

$$\alpha(z) = \frac{z - \beta}{\overline{\beta}z - 1}, \quad |\beta| < 1$$

có hai điểm cố định ξ_1 và ξ_2. Rõ ràng, chúng không nằm trên Γ_0 bởi vì $\alpha(t) = \dfrac{t-\beta}{\overline{\beta}t - 1}$, $|\beta| < 1$ là dịch chuyển Carleman bảo toàn hướng trên Γ_0. Một trong hai điểm này nằm bên trong Γ_0 và điểm còn lại nằm bên ngoài Γ_0.

Bây giờ, ta tìm các điểm cố định này. Với $\beta = 0$ thì $\alpha(z) = -z$ và các điểm cố định là 0 và ∞. Với $0 < |\beta| < 1$ thì phương trình $\alpha(z) = z$ có dạng

$$\overline{\beta}z^2 - 2z + \beta = 0.$$

Do đó
$$\xi_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{1-|\beta|^2}}{\overline{\beta}},\ |\xi_1 < 1|,\ |\xi_2| > 1\,.$$

Giả sử trong $\boldsymbol{H}^{2\times 2}$, ta có
$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}^+(t)\mathcal{A}^-(t),\ \text{với}\ \mathcal{A}^+(\xi_1) = e_0. \tag{2.6}$$

Khi đó $\mathcal{A}(\alpha(t)) = \mathcal{A}^+(\alpha(t))\mathcal{A}^-(\alpha(t)),$ mà $\mathcal{A} = e\mathcal{A}(\alpha)e$ nên ta có
$$\mathcal{A}(t) = e\,\mathcal{A}^+(\alpha(t))e\,e\,\mathcal{A}^-(\alpha(t))e,\ \text{và}\ e\,\mathcal{A}(\alpha(\xi_1))e = \mathcal{A}^+(\xi_1) = e_0.$$

Từ tính duy nhất của phân tích (2.6), suy ra
$$\mathcal{A}^+(t) = e\,\mathcal{A}^+(\alpha(t))e\ \text{và}\ \mathcal{A}^-(t) = e\,\mathcal{A}^-(\alpha(t))e,\ \text{tức là}\ \mathcal{A}^+(t),\ \mathcal{A}^-(t) \in \boldsymbol{H}^{2\times 2}_\alpha.$$

Bây giờ, ta xét trường hợp tổng quát mà các chỉ số thành phần đều khác không.

Bổ đề 2.1. *Cho*
$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}^+(t)\,\Lambda(t)\,\mathcal{A}^-(t), \tag{2.7}$$
trong đó
$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{k_1} & 0 \\ 0 & t^{k_2} \end{pmatrix},\ k_1 \ge k_2.$$
Khi đó
$$\mathcal{A}^+ \in \ker \Pi_{[e,h_+]}\ \textit{và}\ \mathcal{A}^- \in \ker \Pi_{[h_-,e]},$$
trong đó
$$h_+(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon(\alpha^+(t))^{k_1} & (\alpha^+(t))^{k_1}p(t) \\ 0 & -\varepsilon(\alpha^+(t))^{k_2} \end{pmatrix},$$
$$h_-(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon(\alpha^-(t))^{k_1} & t^{k_2-k_1}(\alpha^-(t))^{k_2}p(t) \\ 0 & -\varepsilon(\alpha^-(t))^{k_2} \end{pmatrix},$$
$\varepsilon \in \{-1, +1\}$, $\alpha^+(t) = \lambda(\overline{\beta}t-1)^{-1}$, $\alpha^-(t) = \lambda^{-1}(t-\beta)t^{-1}$, $\lambda = \sqrt{1-|\beta|^2}$, *và* $p(t)$ *là đa thức bậc* $k_1 - k_2$ *thỏa mãn đẳng thức sau:*
$$p(t) = (\alpha^+(t))^{k_2-k_1}p(\alpha(t)).$$

Chứng minh. Từ điều kiện $\mathcal{A} \in \ker \Pi_{[e,e]}$, ta suy ra hàm ma trận $\mathcal{A}$ cũng có phân tích sau
$$\mathcal{A} = e\,\mathcal{A}(\alpha)e = e\,\mathcal{A}^+(\alpha)\,\Lambda(\alpha)\,\mathcal{A}^-(\alpha)e = e\,\mathcal{A}^+(\alpha)\,\Lambda^+(t)\Lambda(t)\Lambda^-(t)\,\mathcal{A}^-(\alpha)e,$$

trong đó

$$\Lambda^{\pm} = \begin{pmatrix} (\alpha^{\pm}(t))^{k_1} & 0 \\ 0 & (\alpha^{\pm}(t))^{k_2} \end{pmatrix}.$$

Theo định lí (1.2) về quan hệ giữa hai phân tích của cùng một hàm ma trận không kì dị , ta thu được

$$\mathcal{A}^{+} = e\,\mathcal{A}^{+}(\alpha(t))\Lambda^{+}(t)h(t) \text{ và } \mathcal{A}^{-} = \Lambda^{-1}(t)h^{-1}(t)\Lambda(t)\Lambda^{-}\mathcal{A}^{-}(\alpha(t))e, \tag{2.8}$$

trong đó

$$h(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & p(t) \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

λ_1 và λ_2 là các hằng số, và $p(t)$ là một đa thức bậc $k_1 - k_2$.

Ta chứng minh rằng $\lambda_1\lambda_2 = -1$ và $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 1$. Điều này nghĩa là $\lambda_1 = \varepsilon$, $\lambda_2 = -\varepsilon$ trong đó $\varepsilon = 1$ hoặc $\varepsilon = -1$.

Thật vậy, ta có $\alpha^{+}(\xi_1) = \dfrac{\lambda}{\overline{\beta}\xi_1 - 1} = -1$. Vì $k_1 + k_2$ là số chẵn nên $\det \mathcal{A}^{+}(\xi_1) = (\alpha^{+}(\xi_1))^{k_1+k_2} = 1$. Hơn nữa, ta có $\det h(\xi_1) = \lambda_1.\lambda_2$ và $\det \mathcal{A}^{+}(\xi_1) \neq 0$ bởi vì $|\xi_1| < 1$. Từ đẳng thức $\mathcal{A}^{+}(t) = e\,\mathcal{A}^{+}(\alpha(t))\Lambda^{+}(t)h(t)$, suy ra

$$\det \mathcal{A}^{+}(\xi_1) = -\det \mathcal{A}^{+}(\alpha(\xi_1)) \det \Lambda^{+}(\xi_1) \det h(\xi_1), \text{ (vì } \det e = -1). \tag{2.9}$$

Do đó $\lambda_1\lambda_2 = -1$.

Từ đẳng thức thứ nhất trong (2.8) ta cũng có

$$\mathcal{A}^{+}(\alpha(t)) = e\,\mathcal{A}^{+}(t)\Lambda^{+}(\alpha(t))h(\alpha(t)). \tag{2.10}$$

Thay (2.10) vào hệ thức (2.9) ta thu được

$$\mathcal{A}^{+}(t) = e\,e\,\mathcal{A}^{+}(t)\Lambda^{+}(\alpha(t))h(\alpha(t))\Lambda^{+}(t)h(t).$$

Do đó

$$e_0 = \Lambda^{+}(\alpha(t))h(\alpha(t))\Lambda^{+}(t)h(t), \text{ với } e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Đánh giá định thức tại điểm $t = \xi_1$ ta thu được $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 1$. Do đó $\lambda_1 = \varepsilon$, $\lambda_2 = -\varepsilon$ trong đó $\varepsilon \in \{+1, -1\}$.

Sử dụng đẳng thức (2.9) và $\alpha^{+}.\alpha^{+}(\alpha(t)) = 1$ ta thu được

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon(p(t) - (\alpha^{+}(t))^{k_2-k_1}p(\alpha(t)) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Từ hệ thức trên suy ra $p(t) = (\alpha^+(t))^{k_2-k_1}p(\alpha(t))$.

Bằng tính toán trực tiếp, ta thu được

$$h_+(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon(\alpha^+(t))^{k_1} & (\alpha^+(t))^{k_1}p(t) \\ 0 & -\varepsilon(\alpha^+(t))^{k_2} \end{pmatrix} = \Lambda^+(t)h(t),$$

$$h_-(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon(\alpha^-(t))^{k_1} & t^{k_2-k_1}(\alpha^-(t))^{k_2}p(t) \\ 0 & -\varepsilon(\alpha^-(t))^{k_2} \end{pmatrix} = \Lambda^{-1}(t)h^{-1}(t)\Lambda(t)\Lambda^-(t),$$

trong đó $h^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon & p(t) \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}$ là nghịch đảo của $h(t)$. So sánh với (2.8) ta được

$$\mathcal{A}^+(t) = e\,\mathcal{A}^+(\alpha(t))h_+(t), \text{ và } \mathcal{A}^-(t) = h_-(t)\mathcal{A}^-(\alpha(t))e,$$

tức là $\mathcal{A}^+ \in \ker \Pi_{[e,h_+]}$ và $\mathcal{A}^+ \in \ker \Pi_{[h_-,e]}$. □

Hệ quả 2.1.

$$(\Lambda^+(t))^{-1}(\mathcal{A}^+(\alpha(t)))^{-1}e\,\mathcal{A}^+(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon & p(t) \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Hệ thức (2.12) dễ dàng suy ra từ đẳng thức thứ nhất trong (2.8).

Nhận xét 2.1. *Ta có thể thấy $\mathcal{A}^\pm \notin \boldsymbol{H}^{2\times2}_{+,\alpha}$, $\Lambda(t) \notin \boldsymbol{H}^{2\times2}_{\alpha}$. Do đó, ta sẽ cố gắng tác động lên các ma trận $\mathcal{A}^+$ và $\mathcal{A}^-$ nhờ các ma trận $\mathcal{R}_+$ và $\mathcal{R}_+$ không suy biến trên Γ_0 sao cho*

$$(\mathcal{A}^+\mathcal{R}_+)^{\pm1} \in \boldsymbol{H}^{2\times2}_{+,\alpha},\ (\mathcal{R}_-\mathcal{A}^-)^{\pm1} \in \boldsymbol{H}^{2\times2}_{-,\alpha},$$

$\mathcal{R} = \mathcal{R}_+^{-1}\Lambda\mathcal{R}_-^{-1} \in \boldsymbol{H}^{2\times2}_{\alpha}$, và hàm ma trận $\mathcal{R}$ có dạng đơn giản nhất trong $\boldsymbol{H}^{2\times2}_{\alpha}$, bất biến trong $\boldsymbol{H}^{2\times2}_{\alpha}$ với toán tử dịch chuyển cũng như toán tử nhân bởi ma trận hằng e từ bên trái và từ bên phải.

Kí hiệu M^r_X là toán tử nhân từ bên phải bởi ma trận X, tức là $M^r_X\mathcal{A} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{A}X$.

Dễ thấy rằng nếu $X \in \ker \Pi_{[h_+^{-1},e]}$ thì $M^r_X : \ker \Pi_{[e,h_+]} \longrightarrow \ker \Pi_{[e,e]}$. Thật vậy, với $\mathcal{A}^+ \in \ker \Pi_{[e,h_+]}$, tức là $\mathcal{A}^+ = e\,\mathcal{A}^+(\alpha)h_+$ và $X \in \ker \Pi_{[h_+^{-1},e]}$, tức là $X = h_+^{-1}X(\alpha)e$ thì

$$M^r_X\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}^+X = e\,\mathcal{A}^+(\alpha)h_+h_+^{-1}X(\alpha)e = e\,\mathcal{A}^+(\alpha)X(\alpha)e.$$

Do đó $\mathcal{A}^+X \in \ker \Pi_{[e,e]}$. Dễ dàng kiểm tra rằng hàm ma trận h_+ thỏa mãn đẳng thức

$$h_+^{-1}(t) = h_+(\alpha(t)). \tag{2.13}$$

Từ điều trên, suy ra $\Pi_{[e,h_+]}$ và $\Pi_{[h_+^{-1},e]}$ là các toán tử chiếu. Thật vậy, ta đã biết $\Pi_{[x,y]}$ là toán tử chiếu nếu $xx(\alpha) = e_0$ và $y(\alpha)y = e_0$. Trước hết, xét toán tử $\Pi_{[e,h_+]}$. Ta có $e.e = e_0$ và $h_+(\alpha(t)).h_+(t) = e_0$ (do (2.13)). Do đó $\Pi_{[e,h_+]}$ là toán tử chiếu. Tương tự, ta có $h_+^{-1}(t).h_+^{-1}(\alpha(t)) = [h_+(\alpha(t)).h_+(t)]^{-1} = e_0$ và $e.e = e_0$ nên suy ra $\Pi_{[h_+^{-1},e]}$ cũng là toán tử chiếu.

Do $\Pi_{[h_+^{-1},e]}$ là toán tử chiếu nên ta có

$$\ker \Pi_{[h_+^{-1},e]} = \operatorname{im}(I - \Pi_{[h_+^{-1},e]}).$$

Bây giờ, ta tìm hàm ma trận $\mathcal{R}_+(t)$ sao cho

$$\mathcal{A}^+\mathcal{R}_+ \in \boldsymbol{H}^{2\times 2}_{+,\alpha}.$$

Hơn nữa, ta cũng cần

$$(\mathcal{A}^+\mathcal{R}_+)^{-1} \in \boldsymbol{H}^{2\times 2}_{+,\alpha}.$$

Ta cần tìm hàm ma trận với tính chất cần thiết sao cho $\det \mathcal{R}_+(t) \neq 0$ trên Γ_0. Ta kiểm tra rằng hàm ma trận

$$\mathcal{R}_+ = (\alpha^+)^{\frac{-k_2}{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(r_+ + p) & \frac{1}{2}(r_+ - p) \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

trong đó

$$r_+(t) = (\alpha^+(t))^{k_2-k_1} r_+(\alpha(t)) \text{ và } r_+(t) \neq 0 \text{ với } |t| \leq 1 \tag{2.15}$$

thỏa mãn các điều kiện đã đề cập ở trên. Thật vậy, bằng kiểm tra trực tiếp ta được

$$\det \mathcal{R}_+(t) = (\alpha^+(t))^{-k_2} r_+(t) \neq 0 \text{ với } |t| \leq 1 \text{ và } \mathcal{R}_+(t) = h_+^{-1}(t)\mathcal{R}_+(\alpha(t))e.$$

Theo Bổ đề 2.1, ta có $\mathcal{A}^+ \in \ker \Pi_{[e,h_+]}$, tức là $\mathcal{A}^+ = e\,\mathcal{A}^+(\alpha)h_+(t)$. Do đó:

$$\mathcal{A}^+\mathcal{R}_+ = e\,\mathcal{A}^+(\alpha(t))h_+(t)\mathcal{R}_+(t)h_+^{-1}(t)\mathcal{R}_+(\alpha(t))e = e\,\mathcal{A}^+(\alpha(t))\mathcal{R}_+(\alpha(t))e.$$

Suy ra

$$\mathcal{A}^+\mathcal{R}_+ \in \ker \Pi_{[e,e]} \text{ và } \mathcal{A}^+\mathcal{R}_+ \in \boldsymbol{H}^{2\times 2}_{+,\alpha}.$$

Ta lại có

$$(\mathcal{A}^+\mathcal{R}_+)^{-1} = \mathcal{R}_+^{-1}(\mathcal{A}^+)^{-1} = e\,\mathcal{R}_+^{-1}(\alpha(t))h_+(t)h_+^{-1}(t)(\mathcal{A}^+(\alpha(t)))^{-1}e = e\,(\mathcal{A}^+(\alpha(t))\mathcal{R}_+(\alpha(t)))^{-1}e.$$

Do đó
$$(\mathcal{A}^{+}\mathcal{R}_{+})^{-1} \in \ker \Pi_{[e,e]} \text{ và } (\mathcal{A}^{+}\mathcal{R}_{+})^{-1} \in \boldsymbol{H}^{2\times 2}_{+,\alpha}.$$

Hàm ma trận $\mathcal{R}_{-}(t)$ thỏa mãn điều kiện

$$\det \mathcal{R}_{-}(t) \neq 0 \text{ với } |t| \geq 1 \text{ và } (\mathcal{R}_{-}\mathcal{A}^{-})^{\pm 1} \in \boldsymbol{H}^{2\times 2}_{-,\alpha}$$

được xây dựng tương tự.

Kí hiệu M^{l}_{X} là toán tử nhân từ bên trái bởi ma trận X, tức là $M^{l}_{X}\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} X\mathcal{A}$.

Dễ thấy rằng nếu $X \in \ker \Pi_{[e,h_{-}^{-1}]}$ thì $M^{l}_{X} : \ker \Pi_{[h_{-},e]} \longrightarrow \ker \Pi_{[e,e]}$. Thật vậy, với $\mathcal{A}^{-} \in \ker \Pi_{[h_{-},e]}$, tức là $\mathcal{A}^{-} = h_{-}\mathcal{A}^{-}(\alpha)e$ và $X \in \ker \Pi_{[e,h_{-}^{-1}]}$, tức là $X = e\,X(\alpha)h_{-}^{-1}$ thì

$$M^{l}_{X}\mathcal{A}^{-} = X\mathcal{A}^{-} = e\,X(\alpha)h_{-}^{-1}h_{-}\mathcal{A}^{-}(\alpha)e = e\,X(\alpha)\mathcal{A}^{-}(\alpha)e.$$

Do đó $X\mathcal{A}^{-} \in \ker \Pi_{[e,e]}$. Dễ dàng kiểm tra rằng hàm ma trận h_{-} thỏa mãn đẳng thức
$$h_{-}^{-1}(t) = h_{-}(\alpha(t)). \tag{2.16}$$

Từ điều trên, suy ra $\Pi_{[h_{-},e]}$ và $\Pi_{[e,h_{-}^{-1}]}$ là các toán tử chiếu. Do $\Pi_{[e,h_{-}^{-1}]}$ là toán tử chiếu nên ta có
$$\ker \Pi_{[e,h_{-}^{-1}]} = \operatorname{im}(I - \Pi_{[e,h_{-}^{-1}]}).$$

Ta tìm hàm ma trận $\mathcal{R}_{-}(t)$ sao cho

$$\det \mathcal{R}_{-}(t) \neq 0 \text{ và } (\mathcal{R}_{-}\mathcal{A}^{-})^{\pm 1} \in \boldsymbol{H}^{2\times 2}_{-,\alpha}.$$

Cho $r_{-}(t)$ là hàm thỏa mãn

$$r_{-}(t) \neq 0 \text{ với } |t| \geq 1 \text{ và } r_{-}(t) = (\alpha^{+}(t))^{k_2-k_1} r_{-}(\alpha(t)). \tag{2.17}$$

Khi đó, hàm ma trận

$$\mathcal{R}_{-} = (\alpha^{-})^{\frac{-k_1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\varepsilon t^{k_2-k_1}(r_{-} - p) \\ \varepsilon & \frac{1}{2} t^{k_2-k_1}(r_{-} + p) \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

với $\det \mathcal{R}_{-}(t) = t^{k_2-k_1}(\alpha^{-}(t))^{-k_1} r_{-}(t) \neq 0$ với $|t| \geq 1$, thỏa mãn điều kiện $(\mathcal{R}_{-}\mathcal{A}^{-})^{\pm 1} \in \boldsymbol{H}^{2\times 2}_{-,\alpha}$,(vì $\mathcal{R}_{-} = e\mathcal{R}_{-}(\alpha)h_{-}^{-1}$).

Do đó, với các hàm số r_{+} và r_{-} có dạng được xét ở trên, ta thu được phân tích của ma trận $\mathcal{A}$ có dạng

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^{+}\mathcal{R}_{+}\mathcal{R}\mathcal{R}_{-}\mathcal{A}^{-}, \tag{2.19}$$

trong đó

$$(\mathcal{A}^+\mathcal{R}_+)^{\pm 1} \in \boldsymbol{H}^{2\times 2}_{+,\alpha}\,,\ (\mathcal{R}_-\mathcal{A}^-)^{\pm 1} \in \boldsymbol{H}^{2\times 2}_{-,\alpha}, \tag{2.20}$$

và

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_+^{-1}\Lambda\mathcal{R}_-^{-1}. \tag{2.21}$$

Dễ dàng kiểm tra rằng $\mathcal{R} \in \boldsymbol{H}^{2\times 2}_{\alpha}$. Thật vậy, ta có

$$\mathcal{R}_+ = h_+^{-1}\mathcal{R}_+(\alpha)e,\ \mathcal{R}_- = e\,\mathcal{R}_-(\alpha)h_-^{-1}.$$

Suy ra

$$\mathcal{R}_+^{-1} = e\mathcal{R}_+^{-1}h_+,\ \mathcal{R}_-^{-1} = h_-\mathcal{R}_-^{-1}(\alpha)e.$$

Do đó

$$\mathcal{R}_+^{-1}\Lambda\mathcal{R}_-^{-1} = e\,\mathcal{R}_+^{-1}(\alpha)h_+\Lambda h_-\mathcal{R}_-^{-1}(\alpha)e. \tag{2.22}$$

Bằng kiểm tra trực tiếp, ta có

$$h_+\Lambda h_- = \Lambda(\alpha). \tag{2.23}$$

Thay (2.23) vào (2.22), ta được

$$\mathcal{R}_+^{-1}\Lambda\mathcal{R}_-^{-1} = e\,\mathcal{R}_+^{-1}(\alpha)\Lambda(\alpha)\mathcal{R}_-^{-1}(\alpha)e,$$

tức là $\mathcal{R} \in \boldsymbol{H}^{2\times 2}_{\alpha}$

Như vậy, hàm ma trận $\mathcal{A}$ có phân tích trong $\boldsymbol{H}^{2\times 2}_{\alpha}$ xác định bởi các công thức (2.19), (2.20), (2.21), (2.14), (2.18).

Bây giờ, ta tìm chính xác cấu trúc của hàm ma trận $\mathcal{R}(t)$. Lưu ý rằng, hàm ma trận $\mathcal{R}(t)$ không chỉ thuộc đại số $\boldsymbol{H}^{2\times 2}_{\alpha}$ mà nó còn bất biến với toán tử dịch chuyển W. Ta sẽ tính $\mathcal{R}_+^{-1}$ và $\mathcal{R}_-^{-1}$, tương ứng là nghịch đảo của các hàm ma trận $\mathcal{R}_+$ và $\mathcal{R}_+$.

Ta có

$$\mathcal{R}_+^{-1} = (\alpha^+)^{\frac{k_2}{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{r_+} & -\frac{1}{2}\varepsilon\Big(1-\frac{p}{r_+}\Big) \\ \frac{\varepsilon}{r_+} & \frac{1}{2}\Big(1+\frac{p}{r_+}\Big)\end{pmatrix},\ \mathcal{R}_-^{-1} = (\alpha^-)^{\frac{k_1}{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Big(1+\frac{p}{r_-}\Big) & \frac{1}{2}\varepsilon\Big(1-\frac{p}{r_-}\Big) \\ \frac{-\varepsilon t^{k_1-k_2}}{r_-} & \frac{t^{k_1-k_2}}{r_-}\end{pmatrix}$$

với $r_+(t) = ((\alpha)^+(t))^{k_2-k_1}r_+(\alpha(t))$, $r_-(t) = ((\alpha)^+(t))^{k_2-k_1}r_-(\alpha(t))$

Sau khi tính toán đơn giản, ta thu được

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_+^{-1}\Lambda\mathcal{R}_-^{-1} = \frac{1}{2}t^{k_1}(\alpha^+)^{\frac{k_2}{2}}(\alpha^-)^{\frac{k_1}{2}}\begin{pmatrix} \Big(\frac{1}{r_+}+\frac{1}{r_-}\Big) & \varepsilon\Big(\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-}\Big) \\ \varepsilon\Big(\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-}\Big) & \Big(\frac{1}{r_+}+\frac{1}{r_-}\Big)\end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

Dễ dàng kiểm tra được các hàm

$$f^{\pm} = \frac{1}{2} t^{k_1} (\alpha^+)^{\frac{k_2}{2}} (\alpha^-)^{\frac{k_1}{2}} \left(\frac{1}{r_+} \pm \frac{1}{r_-} \right)$$

thỏa mãn các điều kiện

$$f^{\pm}(t) = f^{\pm}(\alpha(t)).$$

Do đó, hàm ma trận $\mathcal{R}$ có thể viết được dưới dạng

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} f^+ & f^- \\ f^- & f^+ \end{pmatrix},$$

và nó thỏa mãn các hệ thức sau:

$$\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}(\alpha(t)), \, \mathcal{R} = e\,\mathcal{R}e,$$

hay

$$\mathcal{R}(t) = (W\mathcal{R})(t), \, \mathcal{R} = M_e^l \, M_e^r(\mathcal{R})$$

Mặt khác, nếu ta lưu ý rằng đại số $\boldsymbol{H}_{\alpha}^{2\times 2}$ được sinh ra bởi các đẳng cấu đại số W, trong đó $(W\mathcal{A})(t) = \mathcal{A}(\alpha(t))$ và $\Im_e = M_e^l \, M_e^r$ thì ta suy ra các phần tử của đại số này có phân tích dưới dạng

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^+ \mathcal{R} \mathcal{A}^-,$$

trong đó $(\mathcal{A}^{\pm})^{\pm 1} \in \boldsymbol{H}_{\pm,\alpha}^{2\times 2}$ và $\mathcal{R}$ là một hàm ma trận bất biến với đẳng cấu W cũng như với đẳng cấu $\Im_e$.

Để đơn giản dạng của hàm ma trận $\mathcal{R}$, ta cần chọn các hàm số $r_{\pm}$ đơn giản nhất thỏa mãn yêu cầu. Bằng kiểm tra trực tiếp ta thấy các đa thức $r_+(t) = (\alpha^+(t))^{\frac{k_2-k_1}{2}}$, $r_-(t) = t^{k_1-k_2}(\alpha^-(t))^{\frac{k_1-k_2}{2}}$ tương ứng thỏa mãn các hệ thức (2.15) và (2.17). Thay chúng vào công thức (2.24) ta thu được

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t^{k_1}(\alpha^+)^{\frac{k_1}{2}}(\alpha^-)^{\frac{k_1}{2}} + t^{k_2}(\alpha^+)^{\frac{k_2}{2}}(\alpha^-)^{\frac{k_2}{2}} & \varepsilon(t^{k_1}(\alpha^+)^{\frac{k_1}{2}}(\alpha^-)^{\frac{k_1}{2}} - t^{k_2}(\alpha^+)^{\frac{k_2}{2}}(\alpha^-)^{\frac{k_2}{2}}) \\ \varepsilon(t^{k_1}(\alpha^+)^{\frac{k_1}{2}}(\alpha^-)^{\frac{k_1}{2}} - t^{k_2}(\alpha^+)^{\frac{k_2}{2}}(\alpha^-)^{\frac{k_2}{2}}) & t^{k_1}(\alpha^+)^{\frac{k_1}{2}}(\alpha^-)^{\frac{k_1}{2}} + t^{k_2}(\alpha^+)^{\frac{k_2}{2}}(\alpha^-)^{\frac{k_2}{2}} \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

Bằng tính toán trực tiếp, ta dễ dàng kiểm tra được rằng hàm ma trận $\mathcal{R}$ có thể được viết dưới dạng đơn giản hơn sau

$$\mathcal{R} = S_{\varepsilon}(\Lambda^+)^{\frac{1}{2}}\Lambda(\Lambda^-)^{\frac{1}{2}}S_{\varepsilon}^{-1}, \tag{2.26}$$

trong đó

$$S_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}, \, S_{\varepsilon}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1.3 Phân tích thành nhân tử của toán tử tích phân kì dị $T(A)$.

Trước tiên, ta viết phân tích của toán tử hàm $A = a(t)I + b(t)U$ phù hợp với phân tích của hàm ma trận $\mathcal{A}$ trong đại số $\boldsymbol{H}_\alpha^{2\times 2}$. Ta có

$$A = A_+ R A_-,$$

trong đó

$$A_+ = \pi^{-1}(\mathcal{A}^+\mathcal{R}_+),\ A_- = \pi^{-1}(\mathcal{R}_-\mathcal{A}^-),$$
$$R = \pi^{-1}(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} u\,I + \varepsilon v\,U,$$

với

$$\pi : \quad \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{H}_\alpha^{2\times 2}$$
$$A = aI + b\,U \longmapsto \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b(\alpha) & a(\alpha) \end{pmatrix} \text{ là đẳng cấu,}$$

$$U = \alpha^+(t)W,$$
$$u = \frac{1}{2}(t^{k_1}(\alpha^+)^{\frac{k_1}{2}}(\alpha^-)^{\frac{k_1}{2}} + t^{k_2}(\alpha^+)^{\frac{k_2}{2}}(\alpha^-)^{\frac{k_2}{2}}),$$
$$v = \frac{1}{2}(t^{k_1}(\alpha^+)^{\frac{k_1}{2}}(\alpha^-)^{\frac{k_1}{2}} - t^{k_2}(\alpha^+)^{\frac{k_2}{2}}(\alpha^-)^{\frac{k_2}{2}}),$$

Lưu ý rằng

$$P_+\,A_+^{\pm 1}\,P_+ = A_+^{\pm 1}\,P_+,\ P_-\,A_-^{\pm 1}\,P_- = A_-^{\pm 1}\,P_-,$$

ta thấy toán tử tích phân kì dị $T(A)$ có thể biểu diễn được dưới dạng

$$T(A) = A_+\,T(R)\,(A_+^{-1}P_+ + A_-P_-), \tag{2.27}$$

trong đó

$$T(R) = P_+ + RP_-. \tag{2.28}$$

Các toán tử A_+ và $D = A_+^{-1}P_+ + A_-P_-$ khả nghịch với $D^{-1} = (A_+^{-1}P_+ + A_-P_-)^{-1} = A_+P_+ + A_-^{-1}P_-$. Thật vậy

$$\begin{aligned} DD^{-1} &= (A_+^{-1}P_+ + A_-P_-)(A_+P_+ + A_-^{-1}P_-) \\ &= A_+^{-1}P_+A_+P_+ + A_+^{-1}P_+A_-^{-1}P_- + A_-P_-A_+P_+ + A_-P_-A_-^{-1}P_- \\ &= A_+^{-1}A_+P_+ + A_-A_-^{-1}P_- \\ &= P_+ + P_- = I. \end{aligned}$$

Tương tự, ta có $D^{-1}D = I$.

Định lý 2.1. *Nếu* $k_1 = k_2 = 0$ *thì toán tử* $T(A)$ *khả nghịch và toán tử nghịch đảo của nó là*

$$T^{-1}(A) = (A_+P_+ + A_-^{-1}P_-)A_+^{-1}.$$

Chứng minh. Nếu $k_1 = k_2 = 0$ thì $u = v = 0$, suy ra $R = 0$, $T(R) = I$.
Do đó $T(A) = A_+D$.
Mặt khác, các toán tử A_+, D khả nghịch nên suy ra toán tử $T(A)$ cũng khả nghịch và

$$T^{-1}(A) = (A_+P_+ + A_-^{-1}P_-)A_+^{-1}.$$

□

Định lý 2.2. *Nếu* $k_1 \geq k_2 > 0$ *thì toán tử* $T(A)$ *khả nghịch phải. Nếu* $k_2 \leq k_1 < 0$ *thì toán tử* $T(A)$ *khả nghịch trái. Trong cả hai trường hợp, toán tử nghịch đảo một phía* $T^{-1}(A)$ *được biểu diễn dưới dạng*

$$T^{-1}(A) = (A_+P_+ + A_-^{-1}P_-)(P_+ + R^{-1}P_-)A_+^{-1}. \tag{2.29}$$

Chứng minh. Ta thấy rằng các hệ số của toán tử R giải tích trong $|z| < 1$ nếu $k_1 \geq k_2 > 0$ và chúng giải tích trong $|z| > 1$ nếu $k_2 \leq k_1 < 0$. Do đó, với các kí hiệu Hankel của toán tử R ta có $P_-RP_+ = 0$ nếu $k_1 \geq k_2 > 0$ và $P_+RP_- = 0$ nếu $k_2 \leq k_1 < 0$. Bây giờ, ta xét toán tử ngược R^{-1}. Bằng tính toán trực tiếp, ta kiểm tra được rằng

$$R^{-1} = L^{-1}(u(\alpha)I - \varepsilon\, v\, U),$$

trong đó

$$U = \alpha^+(t)W,$$

$$L = uu(\alpha) - \varepsilon^2 vv(\alpha) = uu(\alpha) - vv(\alpha) = t^{k_1+k_2}(\alpha^+(t))^{\frac{k_1+k_2}{2}}(\alpha^-(t))^{\frac{k_1+k_2}{2}}.$$

Thật vậy

$$\begin{aligned}
R^{-1}R &= L^{-1}(u(\alpha)I - \varepsilon\, v\, U)(uI + \varepsilon\, v\, U)\\
&= L^{-1}(u(\alpha)uI + \varepsilon u(\alpha)vU - \varepsilon vUuI - \varepsilon^2 vUvU)\\
&= L^{-1}(u(\alpha)uI + \varepsilon u(\alpha)vU - \varepsilon vu(\alpha)U - \varepsilon^2 vv(\alpha)I)\\
&= L^{-1}(u(\alpha)u - \varepsilon^2 vv(\alpha))I = I
\end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có $RR^{-1} = I$.
Do đó, ta thu được

$$\begin{aligned}
R^{-1} = \frac{1}{2}\Big\{&\big(t^{-k_2}(\alpha^+)^{-\frac{k_2}{2}}(\alpha^-)^{-\frac{k_2}{2}} + t^{-k_1}(\alpha^+)^{-\frac{k_1}{2}}(\alpha^-)^{-\frac{k_1}{2}}\big)I\\
&- \varepsilon\big(t^{-k_2}(\alpha^+)^{-\frac{k_2}{2}}(\alpha^-)^{-\frac{k_2}{2}} - t^{-k_1}(\alpha^+)^{-\frac{k_1}{2}}(\alpha^-)^{-\frac{k_1}{2}}\big)U\Big\},
\end{aligned}$$

Nếu $k_1 \geq k_2 > 0$ thì toán tử R^{-1} có các hệ số giải tích trong $|z| > 1$ và do đó $P_+R^{-1}P_- = 0$. Nếu $k_2 \leq k_1 < 0$ thì toán tử R^{-1} có các hệ số giải tích trong $|z| < 1$ và do đó $P_-R^{-1}P_+ = 0$. Dễ dàng kiểm tra rằng $T(R^{-1}) = P_+ + R^{-1}P_-$ là toán tử khả nghịch phải của $T(R)\,(T(R^{-1}) = T_r^{-1}(R))$ nếu $k_1 \geq k_2 > 0$ và nó là toán tử khả nghịch trái của $T(R)\,(T(R^{-1}) = T_l^{-1}(R))$ nếu $k_2 \leq k_1 < 0$.

Toán tử nghịch đảo một phía (phải hoặc trái) của $T(A)$ có thể được viết dưới dạng duy nhất sau

$$T^{-1}(A) = (A_+P_+ + A_-^{-1}P_-)(P_+ + R^{-1}P_-)A_+^{-1}.$$

Thật vậy, trong trường hợp $k_1 \geq k_2 > 0$ ta có

$$\begin{aligned} T(A)T^{-1}(A) &= A_+T(R)(A_+^{-1}P_+ + A_-P_-)(A_+P_+ + A_-^{-1}P_-)(P_+ + R^{-1}P_-)A_+^{-1} \\ &= A_+T(R)T_r^{-1}(R)A_+^{-1} = I. \end{aligned}$$

Trong trường hợp $k_2 \leq k_1 < 0$ ta có

$$\begin{aligned} T^{-1}(A)T(A) &= (A_+P_+ + A_-^{-1}P_-)(P_+ + R^{-1}P_-)A_+^{-1}A_+T(R)(A_+^{-1}P_+ + A_-P_-) \\ &= (A_+P_+ + A_-^{-1}P_-)T_l^{-1}(R)T(R)(A_+^{-1}P_+ + A_-P_-) = I. \end{aligned}$$

□

Nhận xét 2.2. *Vì các toán tử A_+ và $D = A_+^{-1}P_+ + A_-P_-$ khả nghịch và $T(A) = A_+T(R)D$ nên trong trường hợp tổng quát ta có*

$$\dim\ker T(A) = \dim\ker T(R).$$

Do đó, ta sẽ nghiên cứu hạch của toán tử $T(R)$.

Dễ dàng kiểm tra được rằng các hệ số u và v trong biểu diễn của toán tử $R = uI + \varepsilon vU$ thỏa mãn điều kiện $u(\alpha) = u$, $v(\alpha) = v$. Do đó

$$T(R)U = UT(R). \tag{2.30}$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} UT(R) &= U(P_+ + RP_-) = UP_+ + U(uI + \varepsilon vU)P_- \\ &= P_+U + u(\alpha)UP_- + \varepsilon v(\alpha)U^2P_- = P_+U + (u(\alpha)I + \varepsilon v(\alpha)U)P_-U \\ &= (P_+ + u(\alpha)P_- + \varepsilon v(\alpha)UP_-)U = (P_+ + (uI + \varepsilon vU)P_-)U = T(R)U. \end{aligned}$$

Từ (2.30) suy ra rằng nhân của toán tử $T(R)$ bất biến đối với toán tử dịch chuyển U, tức là nếu $f \in \ker T(R)$ thì $Uf \in \ker T(R)$.

Ta xét các toán tử $Q^{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm U)$. Vì $(Q^{\pm})^2 = \frac{1}{4}(I \pm 2U + U^2) = \frac{1}{4}(2I \pm 2U) = Q^{\pm}$ nên $Q^{\pm}$ là các toán tử chiếu. Do ker $T(R)$ bất biến đối với toán tử dịch chuyển U nên suy ra rằng nếu $\varphi \in \ker T(R)$ thì $\psi^{(\pm)} = Q^{\pm}\varphi \in \ker T(R)$.

Ta xét các hàm số

$$\varphi_{\pm} = P_{\pm}\varphi,\ \psi_{\pm}^{(\pm)} = P_{\pm}Q^{\pm}\varphi.$$

Sử dụng hệ thức giao hoán $SU = US$ ta thu được

$$\psi_{\pm}^{(\pm)} = P_{\pm}Q^{\pm}\varphi = Q^{\pm}P_{\pm}\varphi = Q^{\pm}\varphi_{\pm}.$$

Chẳng hạn

$$\begin{aligned} P_+Q^-\varphi &= \frac{1}{2}(I+S)\frac{1}{2}(I-U)\varphi = \frac{1}{4}(I+S-U-US)\varphi \\ &= \frac{1}{2}(I-U)\frac{1}{2}(I+S)\varphi = Q^-P_+\varphi = Q^-\varphi_+. \end{aligned}$$

Hơn nữa, ta có

$$\psi_+^{(\pm)} + R\psi_-^{(\pm)} = 0. \tag{2.31}$$

Thật vậy, $\psi_+^{(\pm)}\varphi + R\psi_-^{(\pm)}\varphi = P_+Q^{\pm}\varphi + RP_-Q^{\pm}\varphi = (P_+ + RP_-)Q^{\pm}\varphi = 0$, vì $(Q^{\pm}\psi \in \ker T(R))$.

Bây giờ, ta chỉ ra rằng

$$R\psi_-^{(+)} = (u+\varepsilon v)\psi_-^{(+)}\ ,\ R\psi_-^{(-)} = (u-\varepsilon v)\psi_-^{(-)}. \tag{2.32}$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} (uI+\varepsilon vU)\psi_-^{(+)} &= (uI+\varepsilon vU)P_-Q^+\varphi = \frac{1}{4}(uI+\varepsilon vU)(I-S)(I+U)\varphi \\ &= \frac{1}{4}(uI - uS + uU - uUS + \varepsilon vU - \varepsilon vUS + \varepsilon vI - \varepsilon vS)\varphi \\ &= \frac{1}{4}[(u+\varepsilon v)I - (u-\varepsilon v)S + (u+\varepsilon v)U - (u+\varepsilon v)US]\varphi \\ &= \frac{1}{4}(u+\varepsilon v)(I-S)(I+U)\varphi = (u+\varepsilon v)P_-Q^+\varphi = (u+\varepsilon v)\psi_-^{(+)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (uI+\varepsilon vU)\psi_-^{(-)} &= (uI+\varepsilon vU)P_-Q^-\varphi = \frac{1}{4}(uI+\varepsilon vU)(I-S)(I-U)\varphi \\ &= \frac{1}{4}(uI - uS - uU + uUS + \varepsilon vU - \varepsilon vUS - \varepsilon vI + \varepsilon vS)\varphi \\ &= \frac{1}{4}[(u-\varepsilon v)I - (u-\varepsilon v)S - (u-\varepsilon v)U + (u-\varepsilon v)US]\varphi \\ &= \frac{1}{4}(u-\varepsilon v)(I-S)(I-U)\varphi = (u-\varepsilon v)P_-Q^-\varphi = (u-\varepsilon v)\psi_-^{(-)}, \end{aligned}$$

Từ các phương trình (2.31) và (2.32), ta suy ra các hàm số

$$\psi^{(\pm)} = \psi_+^{(\pm)} + \psi_-^{(\pm)},$$

trong đó $P_+\psi^{(\pm)} = \psi_+^{(\pm)}$, $P_-\psi^{(\pm)} = \psi_-^{(\pm)}$ là các nghiệm của phương trình tích phân kì dị không dịch chuyển sau:

$$T(u \pm \varepsilon v)\psi^{(\pm)} \stackrel{\text{def}}{=} (P_+ + (u \pm \varepsilon v)P_-)\psi^{(\pm)} = 0. \tag{2.33}$$

Tính toán các hệ số $u \pm \varepsilon v$, ta thu được

$$u + \varepsilon v = \begin{cases} t^{k_1}(\alpha^+)^{\frac{k_1}{2}}(\alpha^-)^{\frac{k_1}{2}} & \text{nếu} \quad \varepsilon = 1, \\ t^{k_2}(\alpha^+)^{\frac{k_2}{2}}(\alpha^-)^{\frac{k_2}{2}} & \text{nếu} \quad \varepsilon = -1, \end{cases} \tag{2.34}$$

$$u - \varepsilon v = u + (-\varepsilon)v = \begin{cases} t^{k_2}(\alpha^+)^{\frac{k_2}{2}}(\alpha^-)^{\frac{k_2}{2}} & \text{nếu} \quad \varepsilon = 1, \\ t^{k_1}(\alpha^+)^{\frac{k_1}{2}}(\alpha^-)^{\frac{k_1}{2}} & \text{nếu} \quad \varepsilon = -1. \end{cases} \tag{2.35}$$

Từ các công thức trên, ta thu được bổ đề sau

Bổ đề 2.2.

$$\ker T(R) = \begin{cases} \ker T(t^{k_1}(\alpha^+)^{\frac{k_1}{2}}(\alpha^-)^{\frac{k_1}{2}}) \cap \ker Q^- \oplus \ker T(t^{k_2}(\alpha^+)^{\frac{k_2}{2}}(\alpha^-)^{\frac{k_2}{2}}) \cap \ker Q^+, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{nếu} \quad \varepsilon = 1, \\ \ker T(t^{k_1}(\alpha^+)^{\frac{k_1}{2}}(\alpha^-)^{\frac{k_1}{2}}) \cap \ker Q^+ \oplus \ker T(t^{k_2}(\alpha^+)^{\frac{k_2}{2}}(\alpha^-)^{\frac{k_2}{2}}) \cap \ker Q^-, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{nếu} \quad \varepsilon = -1. \end{cases} \tag{2.36}$$

Chứng minh. Với mọi $\varphi \in \ker T(R)$, ta có

$$\varphi = I\varphi = (Q^+ + Q^-)\varphi = Q^+\varphi + Q^-\varphi = \psi^+ + \psi^-.$$

Theo (2.33), (2.34), ta có $\psi^+ \in \ker T(u + \varepsilon v), \psi^- \in \ker T(u - \varepsilon v)$.
Mặt khác, do $\psi^+ = Q^+\varphi$, nên

$$Q^+\psi^+ = Q^+(Q^+\varphi) = Q^+\varphi = \psi^+.$$

Suy ra $Q^-\psi^+ = 0$. Do đó $\psi^+ \in \ker Q^-$.
Tương tự, ta có $\psi^- \in \ker Q^+$. Từ đó, suy ra công thức (2.36). □

Tiếp theo, ta phân tích công thức(2.36).

Ta đã biết, toán tử tích phân kì dị không dịch chuyển

$$T(t^n(\alpha^+)^{\frac{n}{2}}(\alpha^-)^{\frac{n}{2}}) \stackrel{\text{def}}{=} P_+ + t^n(\alpha^+)^{\frac{n}{2}}(\alpha^-)^{\frac{n}{2}}P_-$$

có hạch không tầm thường chỉ khi $n > 0$, và khi đó

$$\dim \ker T(t^n(\alpha^+)^{\frac{n}{2}}(\alpha^-)^{\frac{n}{2}}) = n.$$

Giả sử rằng $n > 0$ và $\psi \in \ker T(t^n(\alpha^+)^{\frac{n}{2}}(\alpha^-)^{\frac{n}{2}})$. Khi đó, bài toán bờ Riemann thuần nhất tương ứng với toán tử T được viết dưới dạng

$$\psi_+(t) = -t^n[\alpha^+(t)]^{\frac{n}{2}}[\alpha^-(t)]^{\frac{n}{2}}\psi_-(t).$$

Các hàm chính tắc của bài toán thuần nhất trên là $\chi^+(z) = [\alpha^+(z)]^{\frac{n}{2}}$, $\chi^-(z) = -z^{-n}[\alpha^-(z)]^{-\frac{n}{2}}$. Do đó, nghiệm của bài toán là

$$\psi_+ = (\alpha^+)^{\frac{n}{2}}P_{n-1},\ \psi_- = -t^{-n}(\alpha^-)^{-\frac{n}{2}}P_{n-1} \text{ với } \psi_-(\infty) = 0,$$

trong đó P_{n-1} là đa thức bậc không quá $n-1$.

Từ công thức (2.36), ta chỉ cần những nghiệm của phương trình tích phân kì dị không dịch chuyển đồng thời thuộc hạch của các toán tử chiếu $Q^{(\pm)}$. Ta xét các toán tử

$$Q^{(\pm,n)} = \frac{1}{2}(I \pm (\alpha^+)^{-n}U). \tag{2.37}$$

Ta thấy $Q^{(\pm,n)}$ là các toán tử chiếu. Thật vậy,

$$\begin{aligned}[Q^{(\pm,n)}]^2 &= \frac{1}{4}(I \pm (\alpha^+)^{-n}U)(I \pm (\alpha^+)^{-n}U) = \frac{1}{4}(I \pm 2(\alpha^+)^{-n}U + (\alpha^+)^{-n}U(\alpha^+)^{-n}U)\\ &= \frac{1}{4}(I \pm 2(\alpha^+)^{-n}U + (\alpha^+)^{-n}(\alpha^+)^{n}U^2) = \frac{1}{4}(2I \pm 2(\alpha^+)^{-n}U) = Q^{(\pm,n)}.\end{aligned}$$

Đặc biệt, nếu $n = 0$ thì $Q^{(\pm,0)} = Q^{(\pm)}$.

Dễ thấy rằng $\psi_+ \in \ker Q^{(\pm)}$, khi và chỉ khi $P_{n-1} \in \ker Q^{(\pm,n)}$, hoặc $\psi_- \in \ker Q^{(\pm)}$. Thật vậy

$$\begin{aligned}\psi_+ \in \ker Q^{(\pm)} &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(I \pm U)\psi_+ = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(I \pm U)(\alpha^+)^{\frac{n}{2}}P_{n-1} = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}((\alpha^+)^{\frac{n}{2}} \pm (\alpha^+)^{\frac{-n}{2}}U)P_{n-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(I \pm (\alpha^+)^{-n}U)P_{n-1} = 0,\end{aligned}$$

tức là $P_{n-1} \in \ker Q^{(\pm,n)}$.

Hơn nữa, $\psi_- = -t^{-n}(\alpha^-)^{-\frac{n}{2}}P_{n-1} = -t^{-n}(\alpha^+)^{-\frac{n}{2}}(\alpha^-)^{-\frac{n}{2}}\psi_+$. Do đó $\psi_+ \in \ker Q^{(\pm)}$, khi và chỉ khi $\psi_- \in \ker Q^{(\pm)}$.

Vì vậy, để thu được các nghiệm thuộc hạch của các toán tử chiếu $Q^{(\pm)}$, ta chỉ cần tìm các đa thức bậc $n-1$ thuộc hạch của các toán tử chiếu $Q^{(\pm,n)}$.

Cho P^{n-1} là không gian tất cả các đa thức bậc không quá $n-1$. Dễ thấy rằng $Q^{(\pm,n)}: P^{n-1} \to P^{n-1}$. Thật vậy, cho $P_{n-1}(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k t^k$. Khi đó

$$Q^{(\pm,n)}P_{n-1}(t) = \frac{1}{2}(I \pm (\alpha^+)^{-n}U)(\sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k \pm (\alpha^+)^{-n+1}\sum_{k=0}^{n-1} c_k(\alpha^+)^k t^k(\alpha^-)^k\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k\Big(t^k \pm (\alpha^+)^{-n+1+k}t^k(\alpha^-)^k\Big)\right).$$

Chú ý rằng $\alpha^+(t) = \dfrac{\lambda}{\overline{\beta}t-1}$, $\alpha^-(t) = \dfrac{t-\beta}{\lambda t}$, ta thu được

$$(\alpha^+)^{-n+1+k} = \left[\frac{1}{\lambda}(\overline{\beta}t-1)\right]^{n-k-1}, \; t^k(\alpha^-)^k = \frac{1}{\lambda^k}(t-\beta)^k.$$

Từ đó, suy ra

$$\widetilde{r}(t) = (\alpha^+)^{-n+1+k}t^k(\alpha^-)^k = \frac{1}{\lambda^{n-1}}(t-\beta)^k(\overline{\beta}t-1)^{n-k-1}$$

là đa thức bậc $n-1$.

Bây giờ, ta xét ma trận biểu diễn $\Omega^{(\pm,n)}$ của các toán tử chiếu $Q^{(\pm,n)}: P^{n-1} \to P^{n-1}$ trong cơ sở

$$r_m(t) = t^{n-1}(\alpha^-)^m,\; m = 0,...,n-1 \tag{2.38}$$

Cơ sở được chọn sao cho các ma trận $\Omega^{(\pm,n)}$ có dạng đơn giản nhất. Do đó, ta tính $\operatorname{rank}\Omega^{(\pm,n)} = \dim \operatorname{im} Q^{(\pm,n)}$ dễ dàng. Xét cơ sở (2.38) ta có, với $m = 0, 1, ...n-1$,

$$Q^{(\pm,n)}r_m = \frac{1}{2}(I \pm (\alpha^+)^{-n}U)(t^{n-1}(\alpha^-)^m) = \frac{1}{2}(t^{n-1}(\alpha^-)^m \pm (\alpha^+)^{-n}\alpha^+\alpha^{n-1}(\alpha^-)^{-m})$$

$$= \frac{1}{2}(t^{n-1}(\alpha^-)^m \pm (\alpha^+)^{-n+1}(\alpha^+)^{n-1}t^{n-1}(\alpha^-)^{n-1}(\alpha^-)^{-m})$$

$$= \frac{1}{2}t^{n-1}\frac{(\alpha^-)^m \pm (\alpha^-)^{n-1-m}}{2} = \frac{1}{2}(r_m \pm r_{n-1-m}).$$

Từ công thức trên ta dễ dàng tìm được các ma trận $\Omega^{(\pm,n)}$, và cấu trúc của $\Omega^{(\pm,n)}$ phụ thuộc vào n là số lẻ hay chẵn.

Với ma trận $\Omega^{(+,n)}$, ta có

$$\Omega^{(+,n)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & & & & & & 1 \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & & & 2 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ 1 & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \Omega^{(+,n)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & & & & & 1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ 1 & & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

tương ứng trong trường hợp n lẻ hay chẵn.

Ma trận $\Omega^{(-,n)}$ có dạng

$$\Omega^{(-,n)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & & & & & & -1 \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ & & 1 & & -1 & & \\ & & & 0 & & & \\ & & -1 & & 1 & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ -1 & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \Omega^{(-,n)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & & & & & -1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & 1 & -1 & & \\ & & -1 & 1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ -1 & & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

tương ứng trong trường hợp n lẻ hay chẵn.

Ta thấy, các ma trận $\Omega^{(\pm,n)}$ là ma trận lũy đẳng, đối xứng, và $\operatorname{rank}\Omega^{(\pm,n)} = \operatorname{tr}\Omega^{(\pm,n)}$. Từ các biểu diễn (2.39), (2.40), ta suy ra

$$\operatorname{tr}\Omega^{(+,n)} = \left[\frac{n}{2}\right] + \frac{1-(-1)^n}{2}, \operatorname{tr}\Omega^{(-,n)} = \left[\frac{n}{2}\right],$$

trong đó $\left[\frac{n}{2}\right]$ là phần nguyên của $\frac{n}{2}$. Các toán tử chiếu $Q^{(+,n)}$ và $Q^{(-,n)}$ bù nhau. Do đó

$$\begin{aligned} \dim\ker Q^{(+,n)} &= \dim\ \operatorname{im} Q^{(-,n)} = \operatorname{tr}\Omega^{(-,n)} = \left[\frac{n}{2}\right], \\ \dim\ker Q^{(-,n)} &= \dim\ \operatorname{im} Q^{(+,n)} = \operatorname{tr}\Omega^{(+,n)} = \left[\frac{n}{2}\right] + \frac{1-(-1)^n}{2}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Hơn nữa, ta có một cơ sở của không gian con $\dim\ker Q^{(+,n)}$ và $\dim\ker Q^{(-,n)}$ là

$$\begin{aligned} \dim\ker Q^{(+,n)} &= \left\{ t^{n-1}\frac{(\alpha^-)^m - (\alpha^-)^{n-1-m}}{2},\ m = 0,1,2,\dots,\left[\frac{n}{2}\right] - 1 \right\} \\ \dim\ker Q^{(-,n)} &= \left\{ t^{n-1}\frac{(\alpha^-)^m + (\alpha^-)^{n-1-m}}{2},\ m = 0,1,2,\dots,\left[\frac{n}{2}\right] + \frac{1-(-1)^n}{2} - 1 \right\}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Từ các công thức (2.41), (2.42), và bổ đề (2.2), ta thu được công thức tính $\dim\ker T(A)$

$$\begin{aligned} &\dim\ker T(A) = 0 \quad \text{nếu} \quad k_1 \le 0, \\ &\dim\ker T(A) = \left[\frac{k_1}{2}\right] + \frac{(1+\varepsilon)(1-(-1)^{k_1})}{4} \quad \text{nếu}\, k_1 > 0,\ k_2 \le 0, \\ &\dim\ker T(A) = \frac{k_1+k_2}{2} \quad \text{nếu}\, k_2 > 0. \end{aligned}$$

Do đó, ta có định lí sau

Định lý 2.3. *Nếu hàm ma trận*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(\alpha(t)) & a(\alpha(t)) \end{pmatrix},$$

tương ứng với toán tử hàm

$$A = a(t)I + b(t)U$$

có phân tích

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^+ \begin{pmatrix} t^{k_1} & 0 \\ 0 & t^{k_2} \end{pmatrix} \mathcal{A}^-,$$

thì

$$(\Lambda^+)^{-1}(\mathcal{A}^+(\alpha))^{-1} e\, \mathcal{A}^+ = \begin{pmatrix} \varepsilon & P \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \Lambda^+ = \begin{pmatrix} (\alpha^+)^{k_1} & 0 \\ 0 & (\alpha^+)^{k_2} \end{pmatrix}$$

và

$$\dim\ker T(A) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad k_1 \leq 0\,, \\ \left[\frac{k_1}{2}\right] + \frac{(1+\varepsilon)(1-(-1)^{k_1})}{4} & \text{nếu} \quad k_1 > 0\,,\ k_2 \leq 0, \\ \frac{k_1+k_2}{2} & \text{nếu} \quad k_1 > 0,\ k_2 > 0. \end{cases}$$

2.2 Phương trình tích phân kì dị đặc trưng với dịch chuyển phân tuyến tính Carleman ngược hướng

2.2.1 Phát biểu bài toán phân tích thành nhân tử. Hệ thức $\mathcal{B} = e\,\mathcal{A}(\alpha)e$ và các hệ quả của nó.

Xét toán tử tích phân kì dị tổng quát với dịch chuyển Carleman ngược hướng

$$T = a(t)P_+ + b(t)WP_+ + c(t)P_- + d(t)WP_- : \quad L_p(\Gamma) \longrightarrow L_p(\Gamma), \quad 1 < p < \infty \tag{2.43}$$

trong đó a, b, c, $d \in C(\Gamma)$, $(W\varphi)(t) = \varphi(\alpha(t))$, $\alpha(\alpha(t)) \equiv t$.

Theo định lí (1.4), toán tử T là toán tử Noether nếu và chỉ nếu:

$$\triangle(t) = a(t)c(\alpha(t)) - d(t)b(\alpha(t)) \neq 0, \tag{2.44}$$

và chỉ số của toán tử Noether T được tính bởi công thức:

$$\operatorname{ind} T = -\frac{1}{2\pi}\{\arg\triangle(t)\}_\Gamma.$$

Xét phép biến đổi

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & I \\ W & -W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & \widetilde{T} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & W \\ I & -W \end{pmatrix} = \mathcal{A}P_+ + \mathcal{B}P_- + \mathcal{D} \tag{2.45}$$

nối kết toán tử T và toán tử bạn của nó là

$$\widetilde{T} = a(t)P_+ - b(t)WP_+ + c(t)P_- - d(t)WP_- : \quad L_p(\Gamma) \longrightarrow L_p(\Gamma)$$

với toán tử tương ứng $M = \mathcal{A}P_+ + \mathcal{B}P_- + \mathcal{D}$, trong đó

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a(t) & d(t) \\ b(\alpha(t)) & c(\alpha(t)) \end{pmatrix}, \mathcal{B} = \begin{pmatrix} c(t) & b(t) \\ d(\alpha(t)) & a(\alpha(t)) \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

Cho $\Gamma = \Gamma_0 = \{t : |t| = 1\}$ và $(U\varphi)(t) = \alpha^- t^{-1}(W\varphi)(t)$ là toán tử dịch chuyển phân tuyến tính Carleman với

$$\alpha(t) = \frac{t-\beta}{\overline{\beta}-1}, \; |\beta| > 1,$$

ở đây $\alpha(t) = \alpha^+(t)t^{-1}\alpha^-(t)$ là phân tích của hàm dịch chuyển $\alpha(t)$ với $\alpha^+(t) = (i\lambda)^{-1}(t-\beta)$, $\alpha^-(t) = i\lambda t(\overline{\beta}t-1)^{-1}$, $\lambda = \sqrt{|\beta|^2-1}$. Từ đẳng thức $SU = -US$, ta suy ra toán tử compact $\mathcal{D}$ triệt tiêu và do đó $M = \mathcal{A}P_+ + \mathcal{B}P_-$. Trong trường hợp dịch chuyển phân tuyến tính Carleman bảo toàn hướng, ta phân tích toán tử T. Nhưng trong trường hợp dịch chuyển phân tuyến tính Carleman ngược hướng, ta sử dụng ý tưởng khác. Trước tiên, ta xây dựng phân tích đặc biệt của toán tử $M = \mathcal{A}P_+ + \mathcal{B}P_-$, sau đó áp dụng phép biến đổi ngược với phép biến đổi đã cho trong (2.45), ta thu được phân tích cần thiết của toán tử T. Phần quyết định trong việc thực hiện ý tưởng này nằm trong việc sử dụng hệ thức

$$\mathcal{B}(t) = e\,\mathcal{A}(\alpha(t))e \tag{2.47}$$

liên kết các hệ số ma trận $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ của toán tử M. Vì hàm ma trận $\mathcal{A}$ khả nghịch và điều kiện (2.45), ta xét hàm ma trận $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$. Ta giả thiết rằng hàm ma trận $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$ có phân tích

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+\Lambda\mathcal{C}^-, \tag{2.48}$$

$\Lambda(t) = \mathrm{diag}\,\{t^{k_1}, t^{k_2}\}$, k_1 và k_2 với $k_1 \geq k_2$ là các chỉ số thành phần của $\mathcal{C}$.

Ta chú ý rằng, nếu điều kiện (2.45) được thỏa mãn thì $\mathrm{ind}\,T = \dfrac{k_1+k_2}{2}$, tức là các chỉ số thành phần k_1 và k_2 của $\mathcal{C}$ cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Từ điều kiện $\mathcal{B}(t) = e\,\mathcal{A}(\alpha(t))e$, ta suy ra ma trận $\mathcal{C}$ thỏa mãn điều kiện

$$\mathcal{C} = e\,C^{-1}(\alpha)e. \tag{2.49}$$

Thật vậy, nếu $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$ thì $\mathcal{C}^{-1}(\alpha) = \mathcal{B}^{-1}(\alpha)\mathcal{A}(\alpha)$, kết hợp với hệ thức (2.47), ta suy ra đẳng thức (2.49) tương đương với đồng nhất thức $(\mathcal{A})^{-1}e\mathcal{A}(\alpha)e =$

$(\mathcal{A})^{-1}e\mathcal{A}(\alpha)e$.

Cùng với phân tích (2.48), sử dụng hệ thức (2.49), ta thu được đúng một phân tích nữa của ma trận $\mathcal{C}$ dưới dạng

$$\mathcal{C} = e\,[\mathcal{C}^-(\alpha)]^{-1}(\Lambda^+)^{-1}\Lambda(\Lambda^-)^{-1}[\mathcal{C}^+(\alpha)]^{-1}e,\ \Lambda^\pm = \Lambda(\alpha^\pm), \tag{2.50}$$

trong đó

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{k_1} & 0 \\ 0 & t^{k_2} \end{pmatrix},\ \Lambda^\pm(t) = \begin{pmatrix} (\alpha^\pm(t))^{k_1} & 0 \\ 0 & (\alpha^\pm(t))^{k_2} \end{pmatrix}.$$

Ta đặt

$$\mathcal{G}_\pm^{(1)} = \mathcal{C}^\pm,\ \mathcal{G}_+^{(2)} = e[\mathcal{C}^-(\alpha)]^{-1}(\Lambda^+)^{-1},\ \mathcal{G}_-^{(2)} = (\Lambda^-)^{-1}[\mathcal{C}^+(\alpha)]^{-1}e,$$

$$\mathcal{H}_+ = [\mathcal{G}_+^{(2)}]^{-1}\mathcal{G}_+^{(1)},\ \mathcal{H}_- = \mathcal{G}_-^{(2)}[\mathcal{G}_-^{(1)}]^{-1}.$$

Theo định lí (1.2) về quan hệ giữa hai phân tích (2.49) và (2.50) của ma trận $\mathcal{C}$, ta suy ra

$$\mathcal{H}_+\Lambda = \Lambda\mathcal{H}_-,$$

trong đó

$$\mathcal{H}_+ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & P(t) \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},\ \mathcal{H}_- = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t^{k_2-k_1}P(t) \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \tag{2.51}$$

λ_1 và λ_2 là các hằng số, $P(t)$ là đa thức bậc không quá $k_1 - k_2$. Ta thấy rằng

$$\mathcal{H}_+(\alpha) = \Lambda^-\mathcal{H}_-^{-1}(\Lambda^-)^{-1}. \tag{2.52}$$

Thật vậy, ta có

$$\mathcal{H}_+ = [\mathcal{G}_+^{(2)}]^{-1}\mathcal{G}_+^{(1)} = \Lambda^+\mathcal{C}^-(\alpha)e\,\mathcal{C}^+,\ \mathcal{H}_- = \mathcal{G}_-^{(2)}[\mathcal{G}_-^{(1)}]^{-1} = (\Lambda^-)^{-1}[\mathcal{C}^+(\alpha)]^{-1}e\,(\mathcal{C}^-)^{-1}. \tag{2.53}$$

Từ đó, suy ra

$$\mathcal{H}_+(\alpha) = \Lambda^+(\alpha)\mathcal{C}^-e\,\mathcal{C}^+(\alpha), \tag{2.54}$$

$$\mathcal{H}_-^{-1} = \mathcal{C}^-e\,\mathcal{C}^+(\alpha)\Lambda^-. \tag{2.55}$$

Từ hệ thức $\alpha^\pm(\alpha(t)) = \alpha^\mp(t)$, ta suy ra $\Lambda^- = \Lambda^+(\alpha)$. Nhân đẳng thức (2.55) từ bên trái với hàm $\Lambda^- = \Lambda^+(\alpha)$ và từ bên phải với hàm $(\Lambda^-)^{-1}$, kết hợp với đẳng thức (2.54), ta thu được

$$\Lambda^-\mathcal{H}_-^{-1}(\Lambda^-)^{-1} = \Lambda^+(\alpha)\mathcal{C}^-e\,\mathcal{C}^+(\alpha) = \mathcal{H}_+(\alpha).$$

Bây giờ, ta sử dụng hệ thức (2.52) để tìm chính xác cấu trúc của các ma trận $\mathcal{H}_+$ và $\mathcal{H}_-$. Từ các công thức (2.51) và (2.52), ta suy ra

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\lambda_1 & P(\alpha(t))\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} &= \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\begin{pmatrix}(\alpha^-)^{k_1} & 0\\ 0 & (\alpha^-)^{k_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_2 & -t^{k_2-k_1}P(t)\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\alpha^-)^{-k_1} & 0\\ 0 & (\alpha^-)^{-k_2}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\lambda_1^{-1} & -\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}t^{k_2-k_1}(\alpha^-)^{k_1-k_2}P(t)\\ \\ 0 & \lambda_2^{-1}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Từ đó, suy ra rằng $\lambda_1 = \lambda_1^{-1}$, $\lambda_2 = \lambda_2^{-1}$. Do đó, $\lambda_j^2 = 1$, $j = 1,2$ và $P(\alpha(t)) = -\lambda_1\lambda_2 t^{k_2-k_1}(\alpha^-(t))^{k_1-k_2}P(t)$.

Ta có thể biết thêm thông tin về ma trận $\mathcal{H}_+$ bằng cách sử dụng sự kiện hàm dịch chuyển $\alpha(t)$ có hai điểm cố định, kí hiệu là τ_1 và τ_2. Bây giờ, ta đi tìm các điểm cố định này. Cho $\alpha(\tau) = \tau$. Khi đó, $\overline{\beta}\tau^2 - 2\tau + \beta = 0$. Do đó, $\tau_{1,2} = \dfrac{1 \mp \sqrt{1-|\beta|^2}}{\overline{\beta}}$. Tính toán $\alpha^{\pm}(\tau_1)$ và $\alpha^{\pm}(\tau_2)$, ta thu được $\alpha^{\pm}(\tau_1) = -\tau_1$, $\alpha^{\pm}(\tau_2) = -\tau_2$. Chẳng hạn,

$$\begin{aligned}\alpha^+(\tau_1) &= \frac{1 - i\sqrt{|\beta|^2-1} - |\beta|^2}{i\overline{\beta}\sqrt{|\beta|^2-1}} = \frac{i(|\beta|^2-1) - \sqrt{|\beta|^2-1}}{\overline{\beta}\sqrt{|\beta|^2-1}}\\ &= \frac{i\sqrt{|\beta|^2-1}-1}{\overline{\beta}} = -\tau_1.\end{aligned}$$

Mặt khác, $k_1 + k_2 = k$ là số chẵn nên suy ra $[\alpha^+(\tau_i)]^{k_1+k_2} = \tau_i^k$.

Từ công thức (2.51), ta có

$$\det \mathcal{H}_+ = \lambda_1\lambda_2. \tag{2.56}$$

Bây giờ, ta sử dụng đẳng thức (2.52) để tính $\det \mathcal{H}_+(\tau_i)$ và sau đó so sánh kết quả với (2.56). Từ (2.52), kết hợp với công thức (2.55) và hệ thức $\Lambda^-(\alpha) = \Lambda^+$, ta thu được

$$\mathcal{H}_+ = \Lambda^-(\alpha)\mathcal{H}_-^{-1}(\alpha)[\Lambda^-(\alpha)]^{-1} = \Lambda^+\mathcal{C}^-(\alpha)e\,\mathcal{C}^+\Lambda^-(\alpha)[\Lambda^-(\alpha)]^{-1} = \Lambda^+\mathcal{C}^-(\alpha)e\,\mathcal{C}^+.$$

Do đó

$$\det \mathcal{H}_+ = -\det \Lambda^+ \det \mathcal{C}^-(\alpha)\, \det \mathcal{C}^+.$$

Tại các điểm $\tau = \tau_i$, $i = 1,2$, ta có

$$\det \mathcal{H}_+(\tau_i) = -\tau_i^k \det \mathcal{C}^-(\tau_i)\, \det \mathcal{C}^+(\tau_i) = -\det \mathcal{C}(\tau_i).$$

Lại có, $\mathcal{C}(\tau_i) = \mathcal{A}^{-1}(\tau_i)\mathcal{B}(\tau_i) = \mathcal{A}^{-1}(\tau_i)e\,\mathcal{A}(\tau_i)e$, nên $\det \mathcal{C}(\tau_i) = 1$. Do vậy, $\det \mathcal{H}_+(\tau_i) = -1$ và so sánh với công thức (5.12), ta suy ra $\lambda_1\lambda_2 = -1$.

Như vậy, ta có $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 1$ và $\lambda_1\lambda_2 = -1$, nên suy ra $\lambda_1 = -\lambda_2 = \varepsilon(=\pm 1)$. Do đó

$$\mathcal{H}_+ = \begin{pmatrix} \varepsilon & P(t) \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}, \tag{2.57}$$

và ta có thể kiểm tra được rằng

$$\mathcal{H}_+^{-1} = \mathcal{H}_+. \tag{2.58}$$

Hơn nữa, ta có

$$P(\alpha(t)) = t^{k_2-k_1}(\alpha^-(t))^{k_1-k_2}P(t). \tag{2.59}$$

Từ các đẳng thức (2.53) và (2.58), ta có $\mathcal{H}_+^{-1} = \Lambda^+\mathcal{C}^-(\alpha)e\,\mathcal{C}^+$, suy ra $\mathcal{H}_+^{-1}(\mathcal{C}^+)^{-1} = \Lambda^+\mathcal{C}^-(\alpha)e$. Do đó

$$\mathcal{C}^+\mathcal{H}_+ = e[\mathcal{C}^-(\alpha)]^{-1}(\Lambda^+)^{-1}. \tag{2.60}$$

Kết hợp với công thức (2.50), ta thu được công thức

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+\mathcal{H}_+\Lambda(\Lambda^-)^{-1}[\mathcal{C}^+(\alpha)]^{-1}e. \tag{2.61}$$

2.2.2 Phép phân tích toán tử tích phân kì dị với dịch chuyển T

Trong phần này, ta sẽ phân tích toán tử tích phân kì dị (2.43) với dịch chuyển Carleman ngược hướng. Mục đích của chúng ta là thu được một phân tích đặc biệt $M = M_0M_1M_2$ của toán tử tích phân kì dị không dịch chuyển $M = \mathcal{A}P_+ + \mathcal{B}P_-$, sao cho các thừa số M_0, M_1, M_2 là các toán tử tích phân kì dị với các hệ số ma trận được liên hệ bởi đẳng thức dạng $\mathcal{B}(t) = e\,\mathcal{A}(\alpha(t))e$. Sau đó, tác động lên toán tử $M = M_0M_1M_2$ phép biến đổi ngược với phép biến đổi (2.45), ta thu được các ma trận toán tử chéo tương ứng với mỗi toán tử M_0, M_1, M_2 và các phần tử của các ma trận toán tử này là các toán tử tích phân kì dị với dịch chuyển dạng T và $\widetilde{T}$.

Sử dụng công thức (2.61), ta tìm được phân tích M_0, M_1, M_2 dưới dạng sau

$$\begin{aligned} M &= \mathcal{A}P_+ + \mathcal{B}P_- = \mathcal{A}(P_+ + \mathcal{C}P_-) \\ &= \mathcal{A}(\mathcal{C}^+(\mathcal{C}^+)^{-1}P_+ + \mathcal{C}^+\mathcal{H}_+\Lambda(\Lambda^-)^{-1}[\mathcal{C}^+(\alpha)]^{-1}eP_-) \\ &= \mathcal{A}\mathcal{C}^+X(X^{-1}P_+ + X^{-1}\mathcal{H}_+\Lambda(\Lambda^-)^{-1}eP_-)((\mathcal{C}^+)^{-1}P_+ + e[\mathcal{C}^+(\alpha)]^{-1}eP_-), \end{aligned}$$

trong đó ma trận X được chọn sao cho

$$e\,\mathcal{A}(\alpha)\mathcal{C}^+(\alpha)X(\alpha)\,e = \mathcal{A}\mathcal{C}^+X,\ \det X \neq 0 \,\text{trên}\, \Gamma_0. \tag{2.62}$$

Khi đó, $M = M_0 M_1 M_2$, với M_i là các toán tử tích phân kì dị được xác định như sau

$$\begin{aligned}
M_0 &= \mathcal{A}\mathcal{C}^+ X I = \mathcal{A}\mathcal{C}^+ X P_+ + \mathcal{A}\mathcal{C}^+ X P_-,\\
M_1 &= X^{-1}P_+ + X^{-1}\mathcal{H}_+\Lambda(\Lambda^-)^{-1} e P_-,\\
M_2 &= (\mathcal{C}^+)^{-1}P_+ + e[\mathcal{C}^+(\alpha)]^{-1} e P_-.
\end{aligned}$$

Trước tiên, ta xét toán tử M_2. Ta thấy toán tử M_2 khả nghịch liên tục và toán tử nghịch đảo của nó là $M_2^{-1} = \mathcal{C}^+ P_+ + e\,\mathcal{C}^+(\alpha) e P_-$. Mặt khác, các hệ số của M_2 có cấu trúc cần thiết. Chính xác hơn, nếu ta đặt $\mathcal{A}_0 = (\mathcal{C}^+)^{-1}$, $\mathcal{B}_0 = e[\mathcal{C}^+(\alpha)]^{-1} e$ thì $\mathcal{B}_0 = e\,\mathcal{A}_0(\alpha) e$.
Đặt

$$(\mathcal{C}^+)^{-1} = \begin{pmatrix} c_{11}^+ & c_{12}^+ \\ c_{21}^+ & c_{22}^+ \end{pmatrix}.$$

Khi đó

$$e\,[\mathcal{C}^+(\alpha)]^{-1}\,e = \begin{pmatrix} c_{22}^+(\alpha) & c_{21}^+(\alpha) \\ c_{12}^+(\alpha) & c_{11}^+(\alpha) \end{pmatrix}$$

và phép biến đổi ngược với phép biến đổi (2.45) tác động lên toán tử M_2 (so sánh với công thức (2.45) với $a = c_{11}^+$, $d = c_{12}^+$, $b = c_{21}^+(\alpha)$, $c = c_{22}^+(\alpha)$), được ma trận toán tử chéo

$$\begin{pmatrix} T_+ & 0 \\ 0 & \widetilde{T}_+ \end{pmatrix}, \tag{2.63}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
T_+ &= c_{11}^+ P_+ + c_{21}^+(\alpha) U P_+ + c_{22}^+(\alpha) P_- + c_{12}^+ U P_-,\\
\widetilde{T}_+ &= c_{11}^+ P_+ - c_{21}^+(\alpha) U P_+ + c_{22}^+(\alpha) P_- - c_{12}^+ U P_-,
\end{aligned}$$

và $\widetilde{T}_+$ là toán tử bạn của T_+. Do đó, toán tử với dịch chuyển T_+ có cấu trúc cần thiết và nó khả nghịch liên tục.

Tiếp theo, ta xét các toán tử M_0 và M_1. Ta xây dựng toán tử hàm khả nghịch liên tục G và toán tử tích phân kì dị N với dịch chuyển và hệ số hợp lí tương ứng với các toán tử M_0 và M_1 sao cho các hệ số ma trận của các toán tử G và N có cấu trúc cần thiết. Khi đó ta sẽ thu được phân tích của toán tử T dưới dạng sau

$$T = G\,N\,T_+. \tag{2.64}$$

Do các toán tử G và T_+ khả nghịch liên tục nên từ đẳng thức (2.64) ta suy ra

$$\dim\ker T = \dim\ker N.$$

Do đó, toán tử N chứa tất cả các thông tin cần thiết về số chiều và cấu trúc của không gian con khuyết của toán tử T. Bây giờ, ta xây dựng toán tử G. Rõ ràng, ta phải chọn ma trận không suy biến X sao cho hệ thức (2.62) được thỏa mãn. Từ hệ thức (2.62), ta suy ra

$$X = \mathcal{H}_+\Lambda(\Lambda^-)^{-1}X(\alpha)e. \tag{2.65}$$

Thật vậy, do $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$, $\mathcal{B} = e\,\mathcal{A}(\alpha)e$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}^+\Lambda\mathcal{C}^-$, và từ (2.62), ta suy ra

$$\mathcal{C}^+X = \mathcal{A}^{-1}e\,\mathcal{A}(\alpha)e\,e\,\mathcal{C}^+(\alpha)X(\alpha)\,e = \mathcal{C}^+\Lambda\mathcal{C}^-e\,\mathcal{C}^+(\alpha)X(\alpha)\,e.$$

Kết hợp với công thức (2.55), ta có

$$X = \Lambda\mathcal{H}_-^{-1}(\Lambda^-)^{-1}X(\alpha)e.$$

Áp dụng các công thức $\mathcal{H}_+\Lambda = \Lambda\mathcal{H}_-$ và (2.58), ta thu được đẳng thức (2.65)

$$X = \mathcal{H}_+^{-1}\Lambda(\Lambda^-)^{-1}X(\alpha)e = \mathcal{H}_+\Lambda(\Lambda^-)^{-1}X(\alpha)e.$$

Giả sử $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. Sử dụng (2.64), ta có

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & P(t) \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^{k_1} & 0 \\ 0 & t^{k_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\alpha^-)^{-k_1} & 0 \\ 0 & (\alpha^-)^{-k_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(\alpha) & x_2(\alpha) \\ x_3(\alpha) & x_4(\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \varepsilon(\alpha^-)^{-k_1}t^{k_1}x_2(\alpha) + P(t)(\alpha^-)^{-k_2}t^{k_2}x_4(\alpha) & \varepsilon t^{k_1}(\alpha^-)^{-k_1}x_1(\alpha) + P(t)t^{k_2}(\alpha^-)^{-k_2}x_3(\alpha) \\ -\varepsilon t^{k_2}(\alpha^-)^{-k_2}x_4(\alpha) & -\varepsilon t^{k_2}(\alpha^-)^{-k_2}x_3(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Do đó

$$x_1 = \varepsilon(\alpha^-)^{-k_1}t^{k_1}x_2(\alpha) + P(t)(\alpha^-)^{-k_2}t^{k_2}x_4(\alpha), \tag{2.66}$$
$$x_2 = \varepsilon t^{k_1}(\alpha^-)^{-k_1}x_1(\alpha) + P(t)t^{k_2}(\alpha^-)^{-k_2}x_3(\alpha), \tag{2.67}$$
$$x_3 = -\varepsilon t^{k_2}(\alpha^-)^{-k_2}x_4(\alpha), \tag{2.68}$$
$$x_4 = -\varepsilon t^{k_2}(\alpha^-)^{-k_2}x_3(\alpha). \tag{2.69}$$

Ta thấy rằng các hệ thức (2.66) – (2.69) không độc lập. Thật vậy, từ hệ thức (2.68), ta có

$$x_3(\alpha) = -\varepsilon(\alpha(t))^{k_2}(\alpha^-(\alpha))^{-k_2}x_4 = -\varepsilon(\alpha^+)^{k_2}t^{-k_2}(\alpha^-)^{k_2}(\alpha^+)^{-k_2}x_4 = -\varepsilon t^{-k_2}(\alpha^-)^{k_2}x_4,$$

suy ra, $x_4 = -\varepsilon t^{k_2}(\alpha^-)^{-k_2}x_3(\alpha)$, tức là ta có (2.69).

Ta biến đổi hệ thức (2.66) và sử dụng (2.68,) ta được

$$x_1 = \varepsilon(\alpha^-)^{-k_1}t^{k_1}x_2(\alpha) - \varepsilon P(t)x_3 \quad \text{và } \varepsilon(\alpha^-)^{k_1}t^{-k_1}x_1 = x_2(\alpha) - P(t)(\alpha^-)^{k_1}t^{-k_1}x_3.$$

Từ đó, ta thu được hệ thức

$$x_2 = \varepsilon[\alpha^-(\alpha)]^{k_1}[\alpha(t)]^{-k_1}x_1(\alpha) + P(\alpha)[\alpha^-(\alpha)]^{k_1}[\alpha(t)]^{-k_1}x_3(\alpha).$$

Kết hợp với hệ thức (2.59), phân tích $\alpha = \alpha^+ t^{-1}\alpha^-$ và đẳng thức $\alpha^-(\alpha) = \alpha^+$, ta suy ra

$$x_2 = \varepsilon t^{k_1}(\alpha^-)^{-k_1}x_1(\alpha) + P(t)t^{k_2}(\alpha^-)^{-k_2}x_3(\alpha),$$

tức là từ các hệ thức (2.66) và (2.68) suy ra (2.67).
Do vậy, ma trận X có cấu trúc đặc biệt chỉ phụ thuộc vào x_1 và x_3:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & \varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_1}x_1(\alpha) + [(\alpha^-)^{-1}t]^{k_2}P(t)x_3(\alpha) \\ x_3 & -\varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_2}x_3(\alpha) \end{pmatrix}. \tag{2.70}$$

Để cho ma trận X không suy biến, ta đặt

$$x_1(t) = (\alpha^-)^{\frac{k_2-k_1}{2}}t^{\frac{k_1-k_2}{2}}\gamma, \text{ trong đó } \gamma > \frac{1}{2}||(\alpha^-)^{\frac{k_1-k_2}{2}}P(t)||_{C(\Gamma)},\ x_3(t) \equiv 1.$$

Khi đó

$$X = \begin{pmatrix} [(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{k_1-k_2}{2}}\gamma & \varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{k_1+k_2}{2}}\gamma + [(\alpha^-)^{-1}t]^{k_2}P(t) \\ 1 & -\varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_2} \end{pmatrix}, \tag{2.71}$$

và dễ thấy rằng

$$\det X = -2\varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{k_1+k_2}{2}}\gamma - [(\alpha^-)^{-1}t]^{k_2}P(t) \neq 0$$

nếu

$$\gamma > \left|\left|\frac{(\alpha^-)^{-k_2}t^{k_2}P(t)}{2\varepsilon(\alpha^-)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}t^{\frac{k_1+k_2}{2}}}\right|\right|_{C(\Gamma)} = \frac{1}{2}||(\alpha^-)^{\frac{k_1-k_2}{2}}P(t)||_{C(\Gamma)}.$$

Bây giờ, ta xét toán tử $M_0 = F\,I$, $F = \mathcal{AC}^+X$. Điều kiện (2.71) thỏa mãn hệ thức $F = e\,F(\alpha)\,e$. Giả sử $F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$. Khi đó, ta có

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11}(\alpha) & f_{12}(\alpha) \\ f_{21}(\alpha) & f_{22}(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{22}(\alpha) & f_{21}(\alpha) \\ f_{12}(\alpha) & f_{11}(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Do đó

$$f_{11}(t) = f_{22}(\alpha(t)),\ f_{12}(t) = f_{21}(\alpha(t)). \tag{2.72}$$

Như vậy, các hệ số của toán tử $M_0 = FP_+ + FP_-$ có cấu trúc cần thiết. Phép biến đổi ngược với phép biến đổi (2.45) tác động lên toán tử M_0 cho ta ma trận toán tử chéo

$$\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & \widetilde{G} \end{pmatrix}, \tag{2.73}$$

trong đó

$$G = f_{11}(t)P_+ + f_{21}(\alpha(t))UP_+ + f_{22}(\alpha(t))P_- + f_{12}(\alpha(t))UP_-, \tag{2.74}$$
$$\widetilde{G} = f_{11}(t)P_+ - f_{21}(\alpha(t))UP_+ + f_{22}(\alpha(t))P_- - f_{12}(\alpha(t))UP_-. \tag{2.75}$$

Kết hợp với các điều kiện (2.72), ta thu được các toán tử khả nghịch liên tục

$$G = f_{11}I + f_{12}U\,,\ \widetilde{G} = f_{11}I - f_{12}U,$$

với $\widetilde{G}$ là toán tử bạn của toán tử G.

Bây giờ, ta xét toán tử

$$M_1 \equiv X^{-1}P_+ + X^{-1}\mathcal{H}_+\Lambda(\Lambda^-)^{-1}eP_-. \tag{2.76}$$

Ta có thể kiểm tra được rằng nếu $\mathcal{A}_1 = X^{-1}$, $\mathcal{B}_1 = X^{-1}\mathcal{H}_+\Lambda(\Lambda^-)^{-1}e$ thì $\mathcal{B}_1 = e\,\mathcal{A}_1(\alpha)\,e$, tức là

$$X^{-1}\mathcal{H}_+\Lambda(\Lambda^-)^{-1}e = e\,X^{-1}(\alpha)\,e. \tag{2.77}$$

Thật vậy, từ (2.65) ta thu được

$$X^{-1} = e\,X^{-1}(\alpha)e\,e\,\Lambda^-\Lambda^{-1}\mathcal{H}_+^{-1}.$$

Do đó

$$X^{-1}(e\,\Lambda^-\Lambda^{-1}\mathcal{H}_+^{-1})^{-1} = e\,X^{-1}(\alpha)\,e.$$

Từ đó, ta suy ra hệ thức (2.77).

Áp dụng phép biến đổi ngược với phép biến đổi (2.45), ta thu được ma trận toán tử chéo

$$\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & \widetilde{N} \end{pmatrix}$$

và phần còn lại chỉ là việc tính toán các hệ số của nó. Trước tiên, ta tính ma trận X^{-1}

$$X^{-1} = \frac{1}{\det X}\begin{pmatrix} -\varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_2} & \varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{k_1+k_2}{2}}\gamma - [(\alpha^-)^{-1}t]^{k_2}P(t) \\ -1 & [(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{k_1-k_2}{2}}\gamma \end{pmatrix}.$$

Hơn nữa

$$\begin{aligned} \det X(\alpha) &= -2\varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{-\frac{k_1+k_2}{2}}\gamma - [(\alpha^-)^{-1}t]^{-k_2}P(\alpha(t)) \\ &= -2\varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{-\frac{k_1+k_2}{2}}\gamma - [(\alpha^-)^{-1}t]^{-k_2}[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_2-k_1}P(t) \\ &= [(\alpha^-)^{-1}t]^{-(k_2+k_1)}\det X. \end{aligned} \tag{2.78}$$

Đặt

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 & \widehat{x}_2 \\ \widehat{x}_3 & \widehat{x}_4 \end{pmatrix}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
N &= \widehat{x}_1 P_+ + \widehat{x}_3(\alpha) U P_+ + \widehat{x}_4(\alpha) P_- + \widehat{x}_2 U P_- \\
&= -\frac{\varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_2}}{\det X(t)} P_+ - \frac{1}{\det X(\alpha(t))} U P_+ + \frac{[(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{k_2-k_1}{2}}\gamma}{\det X(\alpha(t))} P_- \\
&- \frac{\varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{k_1+k_2}{2}}\gamma + [(\alpha^-)^{-1}t]^{k_2} P(t)}{\det X(t)} U P_- \\
&= -\ \frac{1}{\det X(t)} \Bigg[\varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_2} P_+ + [(\alpha^-)^{-1}t]^{k_1+k_2} U P_+ - [(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{k_1+3k_2}{2}} \gamma P_- \\
&+ \Big(\varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{k_1+k_2}{2}} \gamma + [(\alpha^-)^{-1}t]^{k_2} P(t) \Big) U P_- \Bigg] \\
&= -\ \frac{[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_2}}{\det X(t)} \Bigg[\varepsilon P_+ + [(\alpha^-)^{-1}t]^{k_1} U P_+ - [(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{k_1+k_2}{2}} \gamma P_- \\
&+ \Big(\varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{k_1-k_2}{2}} \gamma + P(t) \Big) U P_- \Bigg] = -\ \frac{[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_2}}{\det X(t)} (P_+ + [(\alpha^-)^{-1}t]^{k_1} P_-) \\
&\times \Bigg[\varepsilon P_+ + U P_+ - [(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{k_2-k_1}{2}} \gamma P_- + \Big(\varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{k_1-k_2}{2}} \gamma + P(t) \Big) U P_- \Bigg].
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Đẳng thức sau cùng có thể kiểm tra được nếu ta lưu ý rằng $SU = -US$ nên ta có $P_\pm U P_\pm = 0$ và $P_\pm U P_\mp = \frac{1}{4}(I \pm S)U(I \mp S) = \frac{1}{4}(U \mp 2US + US^2) = UP_\mp$.

Do vậy, ta thu được phân tích của toán tử T dưới dạng

$$T = G\,N\,T_+,$$

trong đó G là toán tử hàm khả nghịch liên tục, và T_+ là toán tử tích phân kì dị với dịch chuyển khả nghịch liên tục. Từ đó, suy ra

$$\dim\ker T = \dim\ker N.$$

Do đó, ta đi xây dựng lí thuyết giải được của toán tử N với các hệ số hợp lí. Ta thấy hàm số

$$(\alpha^-)^{-1}t = \frac{\overline{\beta}t - 1}{i\lambda}$$

có không điểm duy nhất là $t = \dfrac{1}{\overline{\beta}}$. Do đó (nhắc lại rằng $|\beta| > 1$)

$$\mathrm{Ind}_\Gamma \big[(\alpha^-)^{-1}t\big] = 1.$$

Đặt

$$N_1 = P_+ + [(\alpha^-)^{-1}t]^{k_1} P_-,$$
$$N_2 = \varepsilon P_+ + UP_+ - [(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{k_2-k_1}{2}}\gamma P_- + \left(\varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{k_1-k_2}{2}}\gamma + P(t)\right)UP_-.$$

Từ (2.79), suy ra $N = N_1 \times N_2$. Do đó

$$\ker N = \ker N_1 \cap \ker N_2.$$

Vì vậy, nếu toán tử tích phân kì dị N_1 có hạch không tầm thường, cấu trúc của toán tử N phụ thuộc vào toán tử N_2.

Nếu $k_1 \leq 0$ thì hạch của toán tử N_1 và do đó hạch của toán tử N là tầm thường, tức là $\dim\ker T = \dim\ker N = 0$.

Nếu $k_1 > 0$ thì $\ker N_1$ không tầm thường. Ta có

$$\ker N_1 = \left\{\varphi : \varphi = r_j - [(\alpha^-)^{-1}t]^{-k_1} r_j\right\}, \tag{2.80}$$

trong đó, r_j là đa thức bậc $j\,(j = 0, 1, 2, ..., k_1 - 1)$. Điều này được suy ra ngay từ công thức nghiệm tổng quát của bài toán bờ Riemann

$$\Phi^+(t) = [(\alpha^-)^{-1}t]^{k_1}\, \Phi^-(t). \tag{2.81}$$

Như đã đề cập ở trên, cấu trúc của $\ker N_1$ không tùy ý bởi vì r_j phải thuộc hạch của toán tử với dịch chuyển N_2. Chính xác hơn, $\psi \in \ker N$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} &\varepsilon\Psi_+ + \left(\varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{k_1-k_2}{2}}\gamma + P(t)\right)U\Psi_- = r_j \\ &\Psi_+ - [(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{k_1-k_2}{2}}\gamma U\Psi_- = -[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_1} U r_j, \end{aligned} \tag{2.82}$$

trong đó $\Psi_\pm = P_\pm\psi$.

Bây giờ, ta phân tích hệ (2.82). Trước tiên, ta tính định thức $\Delta(t)$ của nó

$$\Delta(t) = -2\varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{k_1-k_2}{2}}\gamma - P(t) = [(\alpha^-)^{-1}t]^{-k_2}\,\det X(t) \neq 0 \tag{2.83}$$

vì $\det X(t) \neq 0$. Nhân phương trình thứ hai của hệ (2.82) với $-\varepsilon$ rồi cộng với phương trình thứ nhất, ta thu được

$$\left(2\varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{k_1-k_2}{2}}\gamma + P(t)\right)U\Psi_- = r_j + \varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_1} U r_j, \tag{2.84}$$

hay

$$-\Delta(t)U\Psi_- = r_j + \varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_1} U r_j. \tag{2.85}$$

Nếu ta tác động toán tử dịch chuyển U vào hai vế của đẳng thức (2.84) từ bên trái, ta được

$$\Big[2\varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{\frac{k_2-k_1}{2}}\gamma + P(\alpha(t))\Big]\Psi_- = Ur_j + \varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{-k_1}r_j. \tag{2.86}$$

Từ các công thức (2.83) , (2.78), và lưu ý rằng $\alpha_-(\alpha) = \alpha^+$, ta suy ra

$$\Delta(\alpha(t)) = [(\alpha^-)^{-1}t]^{k_2-k_1}\Delta(t). \tag{2.87}$$

Thật vậy

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha(t)) &= [(\alpha^-)^{-1}t]^{k_2}\det X(\alpha(t)) = [(\alpha^-)^{-1}t]^{k_2}[(\alpha^-)^{-1}t]^{-(k_1+k_2)}\det X(t)\\ &= [(\alpha^-)^{-1}t]^{-k_1}\det X(t) = [(\alpha^-)^{-1}t]^{k_2-k_1}\Delta(t).\end{aligned}$$

Tác động toán tử U vào hai vế của (2.85), ta được

$$-\Delta(\alpha(t))\Psi_- = Ur_j + \varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{-k_1}r_j \tag{2.88}$$

Thay (2.87) vào (2.88), ta thu được hệ thức

$$-[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_2-k_1}\Delta(t)\Psi_- = Ur_j + \varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{-k_1}r_j \tag{2.89}$$

Nhân (2.89) với $-\varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_1}$ và cộng đẳng thức thu được với đẳng thức (2.85,) ta được

$$U\Psi_- = \varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_2}\Psi_- \tag{2.90}$$

Ta có $k_1 \geq k_2$ và $k_1 > 0$. Do đó, hoặc $k_2 \leq 0$ hoặc $k_2 > 0$. Trước tiên, ta xét trường hợp $k_2 \leq 0$. Với giả thiết này, vế trái và vế phải của đẳng thức (2.90) tương ứng thuộc $L_p^+(\Gamma_0) = P_+L_p(\Gamma_0)$ và $L_p^-(\Gamma_0) = P_-L_p(\Gamma_0)$, suy ra $U\,\Psi_- = 0$. Do đó, kết hợp với (2.85) ta có

$$\big[I + \varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_1}U\big]r_j = 0. \tag{2.91}$$

Rõ ràng, phương trình (2.91) và hệ (2.82) có số nghiệm bằng nhau.Tiếp theo, ta tính số nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình (2.91) và tìm chúng. Ta xét toán tử

$$P = \frac{1}{2}\big(I + \varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_1}U\big)$$

là toán tử chiếu trong không gian các đa thức biến $\widehat{t} = (\alpha^-)^{-1}t$ với bậc không quá $k_1 - 1$. Thật vậy

$$\begin{aligned}P^2 &= \frac{1}{4}\big(I + \varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_1}U\big)\,\big(I + \varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_1}U\big)\\ &= \frac{1}{4}\big(I + 2\varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_1}U + \varepsilon^2U^2\big) = \frac{1}{2}\big(I + \varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_1}U\big) = P.\end{aligned}$$

Khi đó, $Q = I - P$ là toán tử chiếu bù với P và $\ker P = \operatorname{im} Q$. Do đó, bài toán đặc trưng $\ker P$ được đưa về việc nghiên cứu không gian con $\operatorname{im} Q$. Để tính $\dim \operatorname{im} Q$, ta viết ma trận biểu diễn Ω của toán tử Q trong cơ sở

$$\chi_k = \{(\alpha^-)^{-1}\}^k,\ k = 0,\ 1, ..., k_1 - 1. \tag{2.92}$$

Trong cơ sở này, ta có

$$U\big((\alpha^-)^{-1}t\big)^k = \alpha^-(t)t^{-1}\Big(\alpha^-(\alpha(t))^{-k}[\alpha(t)]^k\Big) = \Big[(\alpha^-)^{-1}t\Big]^{-k-1} \tag{2.93}$$

và

$$Q\chi_k = \frac{1}{2}\big(I - \varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_1}U\big)\left([(\alpha^-)^{-1}t]^k\right) = \frac{1}{2}\big([(\alpha^-)^{-1}t]^k - \varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_1-k-1}\big). \tag{2.94}$$

Từ các công thức (2.93) và (2.94), suy ra cấu trúc của ma trận Ω cấp k_1 phụ thuộc vào k_1 là chẵn hay lẻ và ta kí hiệu tương ứng là Ω_e và Ω_0.
Nếu k_1 là số lẻ thì

$$\Omega_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & & & & & & -\varepsilon \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ & & 1 & & -\varepsilon & & \\ & & & 1-\varepsilon & & & \\ & & -\varepsilon & & 1 & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ -\varepsilon & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \varepsilon \in \{1, -1\}. \tag{2.95}$$

Nếu k_1 là số chẵn thì

$$\Omega_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & & & & & -\varepsilon \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & 1 & -\varepsilon & & \\ & & -\varepsilon & 1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ -\varepsilon & & & & & 1 \end{pmatrix}, \varepsilon \in \{1, -1\}. \tag{2.96}$$

Các ma trận (2.95) và (2.96) là lũy đẳng và đối xứng. Do đó

$$\begin{aligned} \dim\ker P &= \dim\ \operatorname{im} Q = \operatorname{rank}\Omega_0 = \operatorname{tr}\Omega_0 = \frac{k_1-\varepsilon}{2}, \\ \dim\ker P &= \dim\ \operatorname{im} Q = \operatorname{rank}\Omega_e = \operatorname{tr}\Omega_e = \frac{k_1}{2}. \end{aligned} \tag{2.97}$$

Ta dễ dàng xác định một cơ sở của $\dim\ \ker P$. Thật vậy, dễ thấy nghiệm của hệ (2.82) có dạng

$$\Psi_+^{(j)} = \varepsilon r_j,\ \Psi_-^{(j)} \equiv 0,\ r_j = [(\alpha^-)^{-1}t]^j - \varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_1-j-1},\ j = 0,\ 1,\ \ldots, \dim\ker P - 1. \tag{2.98}$$

Bây giờ, ta xét trường hợp $k_2 > 0$. Rõ ràng, trong trường hợp này các hàm (2.98) cũng là nghiệm của hệ (2.82) Phương trình (2.90) là bài toán bờ Riemann thuần nhất với hệ số có chỉ số dương. Do đó, bài toán (2.90) có nghiệm không tầm thường. Ta có $\frac{1}{2}(k_2+\varepsilon)$ nghiệm độc lập nếu k_2 lẻ và $\frac{k_2}{2}$ nghiệm độc lập nếu k_2 chẵn. Các nghiệm này có dạng

$$\Psi_-^{(j)} = [(\alpha^-)^{-1}t]^j + \varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_2-j-1},$$

trong đó $j = 0, 1, ..., \frac{k_2+\varepsilon}{2} - 1$ nếu k_2 lẻ và $j = 0, 1, ..., \frac{k_2}{2} - 1$ nếu k_2 chẵn.

Kết quả này có thể thu được bằng cách giống như trường hợp $k_2 \le 0$. Thật vậy, phương trình (2.90) có thể viết lại dưới dạng

$$\frac{1}{2}\big(I - \varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_2}U\big)\Psi_- = 0.$$

Toán tử

$$P_1 = \frac{1}{2}\big(I - \varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_2}U\big)$$

là toán tử chiếu trong không gian các đa thức biến $\widehat{t} = (\alpha^-)^{-1}t$ với bậc không quá $k_2 - 1$. Toán tử chiếu bù với P_1 là

$$Q_1 = I - P_1 = \frac{1}{2}\big(I + \varepsilon[(\alpha^-)^{-1}t]^{k_2}U\big).$$

Tương tự như trường hợp $k_2 \le 0$, ta chỉ cần lưu ý rằng trong ma trận biểu diễn tương ứng Ω^1, số $-\varepsilon$ được thay bởi ε. Do vậy, nếu $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ thì số nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình tích phân kì dị $T\varphi = 0$ với dịch chuyển $\alpha = \alpha_-(t)$ là $\dfrac{k_1-\varepsilon}{2} + \dfrac{k_2+\varepsilon}{2} = \dfrac{k_1+k_2}{2}$ nếu k_1 và k_2 là các số lẻ, và bằng $\dfrac{k_1}{2} + \dfrac{k_2}{2} = \dfrac{k_1+k_2}{2}$ nếu k_1 và k_2 là các số chẵn. Ta thấy không còn trường hợp nào khác bởi vì số $k_1 + k_2 = 2\,\mathrm{ind}\,T$ là số chẵn. Vậy, ta đã chứng minh được định lí sau

Định lý 2.4. *Cho toán tử*

$$T = a(t)P_+ + b(t)UP_+ + c(t)P_- + d(t)UP_- : \quad L_p(\Gamma_0) \longrightarrow L_p(\Gamma_0), \quad 1 < p < \infty$$

là toán tử Noether và toán tử tương ứng

$$M = P_+ + \mathcal{C}P_-, \mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$$

có phân tích với các chỉ số thành phần k_1 và k_2 là

$$\mathcal{H}_+ = \Lambda^+\mathcal{C}^-(\alpha)e\,\mathcal{C}^+ = \begin{pmatrix} \varepsilon & P_{k_1-k_2}(t) \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}, \varepsilon \in \{1, -1\}.$$

Khi đó
1) Nếu $k_1 \leq 0$, $k_2 \leq 0$ *thì* $\ker T = \{0\}$;
2) Nếu $k_1 > 0$, $k_2 \leq 0$ *thì*

$$\dim \ker T = \begin{cases} \frac{k_1}{2} & \textit{nếu} \quad k_1 \textit{ là số chẵn}, \\ \frac{k_1 - \varepsilon}{2} & \textit{nếu} \quad k_1 \textit{ là số lẻ}; \end{cases}$$

3) Nếu $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ *thì* $\dim \ker T = \operatorname{ind} T = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$.

Kết luận

Luận văn trình bày các vấn đề sau:
1) Công thức Sokhotski - Plemeli và bài toán bờ Riemann trong miền đơn liên.
2) Toán tử Noether, hàm dịch chuyển, toán tử dịch chuyển, toán tử tích phân kì dị với dịch chuyển Carleman.
3) Lý thuyết giải được của phương trình tích phân kì dị với dịch chuyển phân tuyến tính Carleman trên đường tròn đơn vị.

Một số hướng nghiên cứu có thể phát triển từ đề tài này là:
1) Lý thuyết giải được của phương trình tích phân kì dị với dịch chuyển Carleman và giá trị biên liên hợp phức trong trường hợp ổn định và suy biến.
2) Lý thuyết giải được của phương trình tích phân kì dị với dịch chuyển không Carleman ...

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Khuê, Lê Mậu Hải (2009), *Hàm biến phức*, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội.

[2] Nguyễn Văn Mậu (2007), *Lý thuyết toán tử và tích phân kì dị*, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội.

[3] Nguyễn Thủy Thanh (2002), *Hướng dẫn giải bài tập hàm biến phức*, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội.

[4] Lê Huy Chuẩn, Nguyễn Minh Tuấn (2003), *On singular intergral equations with the Carleman shifts in the case of the vanishing coefficient,* Acta Mathematica Vietnamica, Vol 28, No 3, 319-333.

[5] Georgii S. Litvinchuk (2000), *Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Intergral Equations with Shift,* Kluwer Academic Publishers.

[6] Victor G.Kravchenko, Georgii S. Litvinchuk (1994), *Introduction to the Theory of Singular Intergral Operators with Shift,* Kluwer Academic Publishers, Ukraine.