UBND TỈNH NINH BÌNH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ

**TÓM TẮT ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU
KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP CƠ SỞ**

SỰ HỘI TỤ CỦA TỔNG CÓ TRỌNG SỐ CÁC PHẦN TỬ NGẪU NHIÊN PHỤ THUỘC TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Chủ nhiệm đề tài: ThS. VŨ THỊ NGỌC ÁNH
Đơn vị công tác: KHOA SƯ PHẠM TRUNG HỌC

NINH BÌNH, 2021

UBND TỈNH NINH BÌNH

TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ

TÓM TẮT ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU
KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP CƠ SỞ

SỰ HỘI TỤ CỦA TỔNG CÓ TRỌNG SỐ CÁC PHẦN TỬ NGẪU NHIÊN PHỤ THUỘC TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Chủ nhiệm đề tài: ThS. VŨ THỊ NGỌC ÁNH

Các thành viên: ThS. PHẠM VĂN CƯỜNG

ThS. ĐẶNG THỊ THU HIỀN

ThS. BÙI THỊ HẢI YẾN

Đơn vị: KHOA SƯ PHẠM TRUNG HỌC

ThS. NGUYỄN THỊ HIỀN

Đơn vị: KHOA SƯ PHẠM TIỂU HỌC - MẦM NON

NINH BÌNH, 2021

MỤC LỤC

BẢNG KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

$\mathcal{H}$	Không gian Hilbert thực, khả ly
B	Tập các chỉ số của hệ cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{H}$
EX	Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên hoặc phần tử ngẫu nhiên X
$X^{(j)}$	Tọa độ thứ j của phần tử ngẫu nhiên X trong $\mathcal{H}$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Tích vô hướng trong $\mathcal{H}$
$\\| \cdot \\|$	Chuẩn sinh bởi tích vô hướng trong $\mathcal{H}$
$\\|X\\|$	Chuẩn của phần tử ngẫu nhiên X
$\log x$	Logarit cơ số 2 của số thực dương x
$I(A)$	Hàm chỉ tiêu của tập hợp A
h.c.c.	Hầu chắc chắn
$\square$	Kết thúc chứng minh
tr. i	Trang thứ i trong tài liệu được trích dẫn
C	Kí hiệu cho một hằng số dương và có thể không giống nhau ở mỗi lần xuất hiện
$[x]$	Số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng x

THÔNG TIN CHUNG VỀ ĐỀ TÀI

1. Tên đề tài: SỰ HỘI TỤ CỦA TỔNG CÓ TRỌNG SỐ CÁC PHẦN TỬ NGẪU NHIÊN PHỤ THUỘC TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

2. Lĩnh vực nghiên cứu: Tự nhiên

3. Thời gian thực hiện: 12 tháng (từ tháng 12/2020 đến tháng 11/2021)

4. Chủ nhiệm đề tài

ThS. Vũ Thị Ngọc Ánh

Đơn vị công tác: Khoa Sư phạm Trung học, Trường Đại học Hoa Lư

5. Các thành viên tham gia

1. ThS. Phạm Văn Cường

Đơn vị công tác: Khoa Sư phạm Trung học, Trường Đại học Hoa Lư

2. ThS. Đặng Thị Thu Hiền

Đơn vị công tác: Khoa Sư phạm Trung học, Trường Đại học Hoa Lư

3. ThS. Nguyễn Thị Hiền

Đơn vị công tác: Khoa Sư phạm Tiểu học - Mầm non, Trường Đại học Hoa Lư

4. ThS. Bùi Thị Hải Yến

Đơn vị công tác: Khoa Sư phạm Trung học, Trường Đại học Hoa Lư

MỞ ĐẦU

1. Tính cấp thiết của đề tài

Sự hội tụ của tổng có trọng số các biến ngẫu nhiên có nhiều ứng dụng trong điều khiển ngẫu nhiên và thống kê toán học, như các mô hình hồi quy phi tham số, phương pháp đánh giá bình phương tối thiểu,... Các kết quả cổ điển về sự hội tụ của tổng có trọng số các biến ngẫu nhiên thường được nghiên cứu trên dãy các biến ngẫu nhiên độc lập. Tuy nhiên, khái niệm độc lập là một tính chất mạnh, rất khó thỏa mãn. Các hiện tượng ngẫu nhiên xảy ra trong thực tiễn thường phụ thuộc lẫn nhau. Do đó, chúng ta phải tìm hiểu, nghiên cứu các kiểu phụ thuộc khác nhau để phù hợp với những bài toán ứng dụng trong thực tế như: phụ thuộc martingales, liên kết âm, phụ thuộc âm, phụ thuộc âm đôi một,... Logic tự nhiên của sự phát triển các định lý giới hạn trong lý thuyết xác suất đã dẫn đến nhiều kết quả tổng quát hơn các kết quả cổ điển. Một trong những hướng tổng quát đó là nghiên cứu các định lý giới hạn của các phần tử ngẫu nhiên trong các không gian trừu tượng khác nhau như: không gian metric, không gian Banach, không gian Hilbert,... Với những lý do trên chúng tôi chọn nghiên cứu đề tài "Sự hội tụ của tổng có trọng số các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc trong không gian Hilbert".

2. Tổng quan tình hình nghiên cứu thuộc lĩnh vực của đề tài

Các kiểu phụ thuộc đối với các phần tử ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert, không gian Banach đã được nghiên cứu từ rất lâu bởi nhiều nhà toán học lớn như Hoffmann-Jorgensen và Pisier (1976), Pisier (1986), Ledoux và Talagrand (1991)... Cho đến nay, các định lý giới hạn trong lý thuyết xác suất luôn được các nhà toán học trên thế giới quan tâm nghiên cứu. Những năm gần đây, hướng nghiên cứu các định lý giới hạn trong lý thuyết xác suất cho các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc nhận giá trị trong các không gian trừu tượng khác nhau như: không gian metric, không gian Banach, không gian Hilbert,... ngày càng phát triển. Hướng nghiên cứu này đã có nhiều ứng dụng trong vật lý lượng tử, khoa học máy tính,... Nhiều nhóm nghiên cứu mạnh đã thu được những kết quả tốt theo hướng này như: Gilles Pisier, Micheal Talagrand, Andrew Rosalsky, Lê Văn Thành, Nguyễn Văn Quảng, Tạ Công Sơn,...

Ánh [2] đã thiết lập luật mạnh số lớn Loève cho dãy các biến ngẫu nhiên m-phụ thuộc âm đôi một. Ánh, Hiền, Thành, Vân [4, Định lý 4.1] đã thiết lập sự hội tụ đầy đủ của tổng có trọng số các biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một với trọng số $R(n)$ trong đó $R(\cdot)$ là hàm biến đổi chính quy. Hiền, Thành, Vân [9] đã giới thiệu khái niệm phụ thuộc âm đôi một theo tọa độ của dãy các phần tử ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert thực, khả ly. Hiền, Thành, Vân đã xây dựng luật mạnh số lớn Rademacher-Menshov cho dãy các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một theo tọa độ và theo khối nhận giá trị trong không gian Hilbert thực, khả ly [9, Định lý 3.1] và xây dựng sự hội tụ đầy đủ của tổng có trọng số các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một theo tọa độ nhận giá trị trong không gian Hilbert thực, khả ly [9, Định lý 3.3]. Vì vậy, việc xây dựng luật mạnh số lớn Loève (mở rộng của luật mạnh số lớn Rademacher-Menshov) cho dãy các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một theo tọa độ và theo khối trong không gian Hilbert và việc xây dựng sự hội tụ đầy đủ của tổng có trọng số các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một theo toạ độ nhận giá trị trong không gian Hilbert với trọng số biểu diễn qua hàm biến đổi chính quy sẽ cho chúng ta kết quả mới, có ý nghĩa khoa học.

3. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

Mục đích nghiên cứu:

Xây dựng một số kết quả về sự hội tụ của tổng có trọng số các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc trong không gian Hilbert.

Nhiệm vụ nghiên cứu:

- Xây dựng luật mạnh số lớn của dãy các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc trong không gian Hilbert.

- Xây dựng sự hội tụ đầy đủ của tổng có trọng số các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc trong không gian Hilbert.

4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu: Luật mạnh số lớn, sự hội tụ đầy đủ, các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc trong không gian Hilbert, hàm biến đổi chậm.

Phạm vi nghiên cứu: Tính phụ thuộc trong lý thuyết xác suất, sự hội tụ của tổng có trọng số các phần tử ngẫu nhiên trong không gian Hilbert.

5. Cách tiếp cận và phương pháp nghiên cứu

Cách tiếp cận: Lý thuyết.

Phương pháp nghiên cứu: Phân tích các kết quả đã đạt được, từ đó vận dụng kỹ thuật xây dựng các kết quả đó vào mô hình tổng quát hơn.

Chương 1

CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1.1. SỰ PHỤ THUỘC CỦA CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN

Năm 1966, Lehmann [12] đã phát biểu khái niệm phụ thuộc âm như sau.

Định nghĩa 1.1.1 ([12]). Hai biến ngẫu nhiên X và Y được gọi là *phụ thuộc âm* nếu

$$P(X \leq x, Y \leq y) \leq P(X \leq x)P(Y \leq y) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Bổ đề 1.1.2 ([12]). *Cho X và Y là các biến ngẫu nhiên. Các mệnh đề sau là tương đương:*

(i) X và Y phụ thuộc âm,

(ii) $P(X \leq x, Y < y) \leq P(X \leq x)\, P(Y < y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$,

(iii) $P(X < x, Y \leq y) \leq P(X < x)\, P(Y \leq y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$,

(iv) $P(X < x, Y < y) \leq P(X < x)\, P(Y < y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Nhận xét 1.1.3. Nếu các biến ngẫu nhiên X và Y độc lập thì X và Y phụ thuộc âm. Tuy nhiên, ví dụ sau đây chứng tỏ rằng tồn tại các biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm nhưng không độc lập.

Xét không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, với $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ và $P(A) = \dfrac{|A|}{4}$ với mọi $A \in \mathcal{F}$. Lấy $B = \{1, 2\}, C = \{2, 3, 4\}$. Khi đó, $I(B)$ và $I(C)$ là các biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm nhưng không độc lập.

Bổ đề 1.1.4 ([12]). *Cho X và Y là các biến ngẫu nhiên. Các mệnh đề sau là tương đương:*

(i) X và Y phụ thuộc âm,

(ii) $P(X \geq x, Y \leq y) \geq P(X \geq x)\, P(Y \leq y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$,

(iii) $P(X \leq x, Y \geq y) \geq P(X \leq x)\, P(Y \geq y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$,

(iv) $P(X \geq x, Y \geq y) \leq P(X \geq x)\, P(Y \geq y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Nhận xét 1.1.5. Hai biến ngẫu nhiên X và Y phụ thuộc âm khi và chỉ khi $-X$ và $-Y$ phụ thuộc âm.

Bổ đề 1.1.6. *Giả sử X và Y là hai biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm, f và g là các hàm tăng trên $\mathbb{R}$. Khi đó $f(X)$ và $g(Y)$ phụ thuộc âm.*

Từ Bổ đề 1.1.6, ta dễ dàng thu được các hệ quả sau đây.

Hệ quả 1.1.7. *Giả sử X và Y là hai biến ngẫu nhiên khả tích, phụ thuộc âm. Khi đó $X - EX$ và $Y - EY$ là hai biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm.*

Hệ quả 1.1.8. *Giả sử X, Y là hai biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm và a, b, c, d là các số thực thỏa mãn $a < b$, $c < d$. Đặt*

$$X_1 = a\mathbb{I}(X < a) + X\mathbb{I}(a \le X \le b) + b\mathbb{I}(X > b),$$

$$Y_1 = c\mathbb{I}(Y < c) + Y\mathbb{I}(c \le Y \le d) + d\mathbb{I}(Y > d).$$

Khi đó X_1 và Y_1 là hai biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm.

Định nghĩa 1.1.9 ([14]). Dãy các biến ngẫu nhiên $\{X_n, n \ge 1\}$ được gọi là *phụ thuộc âm đôi một* nếu với mọi $i \ne j$ ta có X_i và X_j phụ thuộc âm.

Họ các biến ngẫu nhiên $\{X_i,\ 1 \le i \le n\}$ được gọi là *phụ thuộc âm đôi một* nếu với mọi $i \ne j$ ta có X_i và X_j phụ thuộc âm.

Định nghĩa 1.1.10. Dãy các biến ngẫu nhiên $\{X_n, n \ge 1\}$ được gọi là *phụ thuộc âm đôi một theo khối* nếu với mỗi $k \ge 1$, họ các biến ngẫu nhiên $\{X_i,\ 2^{k-1} \le i < 2^k\}$ là phụ thuộc âm đôi một.

Nhận xét 1.1.11. Một tập hợp con của tập các biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một là tập các biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một.

Từ Nhận xét 1.1.5 Bổ đề 1.1.6 ta chứng minh được bổ đề sau đây.

Bổ đề 1.1.12 ([13]). *Nếu $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ là họ các biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một và $f_1, f_2, \ldots, f_n$ là các hàm cùng giảm hoặc cùng tăng thì $\{f_1(X_1), f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)\}$ là họ các biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một.*

Năm 1981, Alam và Saxena [1] đã đưa ra một khái niệm phụ thuộc mạnh hơn tính phụ thuộc âm và phụ thuộc âm đôi một, đó là khái niệm liên kết âm của các biến ngẫu nhiên.

Định nghĩa 1.1.13 ([1]). Họ các biến ngẫu nhiên $\{X_i, 1 \le i \le n\}$ được gọi là *liên kết âm* nếu

$$\mathrm{Cov}\big(f(X_i, i \in A), g(X_j, j \in B)\big) \le 0,$$

với mọi cặp các tập con rời nhau A, B của tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ và với mọi hàm không giảm theo tọa độ $f : \mathbb{R}^{|A|} \to \mathbb{R},\ g : \mathbb{R}^{|B|} \to \mathbb{R}$ sao cho tồn tại $\mathrm{Cov}\big(f(X_i, i \in A), g(X_j, j \in B)\big)$, trong đó $|A|$ là kí hiệu lực lượng của tập A.

Dãy các biến ngẫu nhiên $\{X_n,\, n \geq 1\}$ được gọi là *liên kết âm* nếu với mọi $n \geq 1$, họ hữu hạn các biến ngẫu nhiên $\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$ là liên kết âm.

Nhận xét 1.1.14. i) Tập hợp các biến ngẫu nhiên độc lập là tập các biến ngẫu nhiên liên kết âm.
ii) Một tập hợp con của tập các biến ngẫu nhiên liên kết âm là tập các biến ngẫu nhiên liên kết âm.

Định nghĩa 1.1.15. Dãy các biến ngẫu nhiên $\{X_n,\, n \geq 1\}$ được gọi là *liên kết âm theo khối* nếu với với mỗi $k \geq 1$, họ các biến ngẫu nhiên $\{X_i,\, 2^{k-1} \leq i < 2^k\}$ là liên kết âm.

Mệnh đề 1.1.16 ([7]). *Họ hai biến ngẫu nhiên $\{X, Y\}$ là liên kết âm khi và chỉ khi X và Y là phụ thuộc âm.*

Mệnh đề 1.1.17 ([7]). *Giả sử $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên liên kết âm, A_1, A_2 là các tập con rời nhau của tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ và với mọi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Khi đó, ta có*

$$P(X_i \leq x_i, i = \overline{1, n}) \leq P(X_i \leq x_i, i \in A_1)P(X_i \leq x_i, i \in A_2)$$

và

$$P(X_i > x_i, i = \overline{1, n}) \leq P(X_i > x_i, i \in A_1)P(X_i > x_i, i \in A_2).$$

Nhận xét 1.1.18. Từ Mệnh đề 1.1.17 ta thấy rằng, nếu $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ là các biến ngẫu nhiên liên kết âm thì $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ là các biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một. Tuy nhiên, điều ngược lại nói chung không đúng. Chúng ta có thể tham khảo phản ví dụ trong [7].

1.2. SỰ PHỤ THUỘC CỦA CÁC PHẦN TỬ NGẪU NHIÊN TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Trong toàn bộ đề tài, chúng tôi ký hiệu $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert thực, khả ly với hệ cơ sở trực chuẩn $\{e_j, j \in B\}$, tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và chuẩn $\| \cdot \|$.

Năm 2001, Zhang [17] đã phát biểu khái niệm liên kết âm cho các phần tử ngẫu nhiên nhận giá trị trong $\mathbb{R}^d$ như sau.

Định nghĩa 1.2.1 ([17]). Họ các phần tử ngẫu nhiên $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ nhận giá trị trong $\mathbb{R}^d$ được gọi là *liên kết âm* nếu

$$\operatorname{Cov}\big(f(X_i, i \in A), g(X_j, j \in B)\big) \leq 0,$$

thỏa mãn với mọi cặp các tập con rời nhau A, B của tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ và với mọi hàm thực không giảm theo tọa độ f trên $\mathbb{R}^{|A|d}$ và g trên $\mathbb{R}^{|B|d}$ sao cho tồn tại $\operatorname{Cov}\big(f(X_i, i \in A), g(X_j, j \in B)\big)$.

Dãy các phần tử ngẫu nhiên $\{X_i, i \geq 1\}$ nhận giá trị trong $\mathbb{R}^d$ được gọi là *liên kết âm* nếu với mọi $n \geq 1$, họ hữu hạn các phần tử ngẫu nhiên $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ là liên kết âm.

Ko, Kim và Han [11] tiếp tục mở rộng khái niệm liên kết âm cho dãy các phần tử ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert thực, khả ly.

Định nghĩa 1.2.2 ([11]). Dãy các phần tử ngẫu nhiên $\{X_n, n \geq 1\}$ nhận giá trị trong $\mathcal{H}$ được gọi là *liên kết âm* nếu mỗi $d \geq 1$, dãy các phần tử ngẫu nhiên $\{(\langle X_i, e_1\rangle, \ldots, \langle X_i, e_d\rangle),\ i \geq 1\}$ nhận giá trị trong $\mathbb{R}^d$ là liên kết âm.

Thành [16] đã đưa ra khái niệm liên kết âm theo khối cho dãy các phần tử ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert thực, khả ly.

Định nghĩa 1.2.3 ([16]). Dãy các phần tử ngẫu nhiên $\{X_n, n \geq 1\}$ nhận giá trị trong $\mathcal{H}$ được gọi là *liên kết âm theo khối* nếu mỗi $d \geq 1$, mỗi $k \geq 1$, họ các phần tử ngẫu nhiên $\{(\langle X_i, e_1\rangle, \ldots, \langle X_i, e_d\rangle),\ 2^{k-1} \leq i < 2^k\}$ nhận giá trị trong $\mathbb{R}^d$ là liên kết âm.

Năm 2014, Huấn, Quảng, Thuận [10] đã mở rộng khái niệm của Ko, Kim và Han [11] sang liên kết âm theo tọa độ của dãy các phần tử nhận giá trị trong không gian Hilbert thực, khả ly như sau.

Định nghĩa 1.2.4 ([10]). Dãy các phần tử ngẫu nhiên $\{X_i, i \geq 1\}$ nhận giá trị trong $\mathcal{H}$ được gọi là *liên kết âm theo tọa độ* nếu với mỗi $j \in B$, dãy các biến ngẫu nhiên $\{\langle X_i, e_j\rangle, i \geq 1\}$ là liên kết âm.

Nhận xét 1.2.5. Một dãy các phần tử ngẫu nhiên liên kết âm nhận giá trị trong không gian Hilbert thì liên kết âm theo tọa độ. Tuy nhiên, điều ngược lại nói chung không đúng. Chúng ta có thể tham khảo phản ví dụ trong [10].

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra khái niệm liên kết âm theo tọa độ và theo khối cho dãy các phần tử ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert thực, khả ly.

Định nghĩa 1.2.6. Dãy các phần tử ngẫu nhiên $\{X_n, n \geq 1\}$ nhận giá trị trong $\mathcal{H}$ được gọi là *liên kết âm theo tọa độ và theo khối* nếu với mỗi $j \in B$, dãy các biến ngẫu nhiên $\{\langle X_i, e_j\rangle, i \geq 1\}$ là liên kết âm theo khối.

Dựa vào ý tưởng của Huấn, Quảng, Thuận [10], năm 2019, Hiền, Thành, Vân [9] đã xây dựng khái niệm phụ thuộc âm đôi một theo tọa độ của dãy các phần tử ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert thực, khả ly như sau.

Định nghĩa 1.2.7. Dãy các phần tử ngẫu nhiên $\{X_i, i \geq 1\}$ nhận giá trị trong $\mathcal{H}$ được gọi là *phụ thuộc âm đôi một theo tọa độ* nếu với mỗi $j \in B$, dãy các biến ngẫu nhiên $\{\langle X_i, e_j\rangle, i \geq 1\}$ là phụ thuộc âm đôi một.

Sau đây chúng tôi đưa ra khái niệm phụ thuộc âm đôi một theo tọa độ và theo khối cho dãy các phần tử ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert thực, khả ly.

Định nghĩa 1.2.8. Dãy các phần tử ngẫu nhiên $\{X_i, i \geq 1\}$ nhận giá trị trong $\mathcal{H}$ được gọi là *phụ thuộc âm đôi một theo tọa độ và theo khối* nếu với mỗi $j \in B$, dãy các biến ngẫu nhiên $\{\langle X_i, e_j\rangle, i \geq 1\}$ là phụ thuộc âm đôi một theo khối.

Chú ý 1.2.9. Khi chúng ta nói dãy các phần tử ngẫu nhiên $\{X_i, i \geq 1\}$ là liên kết âm theo tọa độ (phụ thuộc âm đôi một theo tọa độ), chúng ta hiểu rằng dãy các phần tử ngẫu nhiên này là liên kết âm theo tọa độ (phụ thuộc âm đôi một theo tọa độ) tương ứng với hệ cơ sở trực chuẩn $\{e_j, j \in B\}$ của $\mathcal{H}$.

Huấn, Quảng, Thuận [10] đã xây dựng bất đẳng thức cực đại dạng Kolmogorov như sau cho dãy các phần tử ngẫu nhiên liên kết âm theo tọa độ nhận giá trị trong không gian Hilbert thực, khả ly như sau.

Bổ đề 1.2.10 ([10]). *Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy các phần tử ngẫu nhiên liên kết âm theo tọa độ, kỳ vọng 0, nhận giá trị trong $\mathcal{H}$ và $E\|X_n\|^2 < \infty$, $n \geq 1$. Khi đó, với mọi $n \geq 1$, ta có*

$$E\left(\max_{1\leq k\leq n}\Big\|\sum_{i=1}^{k} X_i\Big\|^2\right) \leq 2\sum_{i=1}^{n} E\|X_i\|^2.$$

Bổ đề sau đây được chứng minh bởi Hiền, Thành, Vân [9].

Bổ đề 1.2.11 ([9]). *Cho* $\{X_n, n \geq 1\}$ *là dãy các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một theo tọa độ, kỳ vọng* 0*, nhận giá trị trong* $\mathcal{H}$ *và* $E\|X_n\|^2 < \infty,\ n \geq 1$*. Khi đó, với mọi* $n \geq 1$*, ta có*

$$E\left(\max_{1\leq k\leq n}\Big\|\sum_{i=1}^{k} X_i\Big\|^2\right) \leq 2\log^2(2n)\sum_{i=1}^{n} E\|X_i\|^2.$$

1.3. HÀM BIẾN ĐỔI CHẬM

Sau đây chúng tôi trình bày định nghĩa và một số tính chất của hàm biến đổi chậm.

Định nghĩa 1.3.1 ([15]). Hàm số thực $R(\cdot)$ được gọi là *hàm biến đổi chính quy* với chỉ số biến đổi chính quy ρ (với $\rho \in \mathbb{R}$) nếu nó là hàm đo được, dương trên $[A, \infty)$, với $A > 0$, và với mỗi $\lambda > 0$ ta có

$$\lim_{x\to\infty} \frac{R(\lambda x)}{R(x)} = \lambda^{\rho}. \tag{1.1}$$

Một hàm biến đổi chính quy với chỉ số biến đổi chính quy $\rho = 0$ được gọi là *hàm biến đổi chậm.*

Nhận xét 1.3.2. Nếu $L(x)$ là hàm biến đổi chậm trên $[A, \infty)$ và $\alpha > 0$, thì $L(x^{\alpha})$ là hàm biến đổi chậm trên $[A^{\alpha}, \infty)$.

Chú ý 1.3.3. Trong [15, tr. 2], Seneta đã chứng minh được rằng $R(\cdot)$ là hàm biến đổi chính quy, với chỉ số biến đổi chính quy ρ khi và chỉ khi nó viết dưới dạng

$$R(x) = x^{\rho} L(x) \tag{1.2}$$

trong đó $L(\cdot)$ là hàm biến đổi chậm.

Định lý sau đây là một kết quả cơ bản trong lý thuyết hàm biến đổi chậm và được gọi là *định lý biểu diễn.*

Định lý 1.3.4 ([5]). *Một hàm* $L(\cdot)$ *đo được, dương xác định trên* $[A, \infty)$*, với* $A > 0$*, là hàm biến đổi chậm khi và chỉ khi tồn tại* $B \geq A$ *sao cho*

$$L(x) = c(x)\exp\left(\int_B^x \frac{\varepsilon(u)du}{u}\right)$$

với mọi $x \geq B$*, trong đó* $c(\cdot)$ *là hàm đo được, bị chặn, dương, xác định trên* $[B, \infty)$ *thỏa mãn* $\lim_{x\to\infty} c(x) = c \in (0, \infty)$ *và* $\varepsilon(\cdot)$ *là hàm liên tục, xác định trên* $[B, \infty)$ *thỏa mãn* $\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0.$

Bổ đề tiếp theo chỉ ra rằng, chúng ta có thể xấp xỉ một hàm biến đổi chậm $L(\cdot)$ bởi hàm biến đổi chậm khả vi $L_1(\cdot)$. Chứng minh kết quả này có thể xem Galambos và Seneta [8, tr. 111].

Bổ đề 1.3.5 ([8])**.** *Cho hàm biến đổi chậm $L(\cdot)$ xác định trên $[A, \infty)$, với $A > 0$. Khi đó tồn tại hàm biến đổi chậm khả vi $L_1(\cdot)$ xác định trên $[B, \infty)$, với $B \geq A$, sao cho*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(x)}{L_1(x)} = 1 \text{ và } \lim_{x\to\infty} \frac{xL_1'(x)}{L_1(x)} = 0.$$

Ngược lại, nếu $L(\cdot)$ là hàm khả vi, dương và thỏa mãn

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xL'(x)}{L(x)} = 0 \tag{1.3}$$

thì $L(\cdot)$ là hàm biến đổi chậm.

Bổ đề 1.3.6 ([4])**.** *Cho $p > 0$, $L(\cdot)$ là hàm biến đổi chậm xác định trên $[A, \infty)$, với $A > 0$ và thỏa mãn (1.3). Khi đó,*

i) Tồn tại $B \geq A$ sao cho $x^p L(x)$ là hàm tăng trên $[B, \infty)$, $x^{-p}L(x)$ là hàm giảm trên $[B, \infty)$ và $\lim\limits_{x\to\infty} x^p L(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-p}L(x) = 0$.

ii) Với mọi $\lambda > 0$, ta có

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(x)}{L(x+\lambda)} = 1.$$

Chú ý 1.3.7. Nếu không có giả thiết $L(\cdot)$ thỏa mãn (1.3), thì chúng ta vẫn có $x^p L(x) \to \infty, x^{-p}L(x) \to 0$, khi $x \to \infty$ (xem Seneta [15, tr. 18]), nhưng không có sự đơn điệu như trong Bổ đề 1.3.6 (i).

Bổ đề 1.3.8 ([**4, Bổ đề 2.5**])**.** *Giả sử $p > 1$, $q \in \mathbb{R}$ và $L(x)$ là hàm biến đổi chậm khả vi, xác định trên $[A, \infty)$, với $A > 0$ nào đó. Khi đó*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{L^q(k)}{k^p} \sim \frac{L^q(n)}{(p-1)n^{p-1}}.$$

Tiếp theo, chúng tôi trình bày về hàm liên hợp Bruijn của một hàm biến đổi chậm.

Bổ đề 1.3.9 ([**5, Định lý 1.5.13**])**.** *Giả sử $L(\cdot)$ là hàm biến đổi chậm. Khi đó, tồn tại duy nhất hàm biến đổi chậm $\widetilde{L}(\cdot)$ thỏa mãn*

$$\lim_{x\to\infty} L(x)\widetilde{L}\big(xL(x)\big) = 1 \text{ và } \lim_{x\to\infty} \widetilde{L}(x)L\big(x\widetilde{L}(x)\big) = 1.$$

Định nghĩa 1.3.10 ([5, tr. 29]). Hàm $\widetilde{L}$ trong Bổ đề 1.3.9 được gọi là *hàm liên hợp Bruijn* của L và $\big(L, \widetilde{L}\big)$ được gọi là *cặp liên hợp* hoặc (*cặp liên hợp biến đổi chậm*).

Hàm liên hợp Bruijn của hàm biến đổi chậm L kí hiệu là $\widetilde{L}$.

Chú ý 1.3.11. Trong toàn bộ đề tài, đối với hàm biến đổi chậm $L(\cdot)$ xác định trên $[A, \infty)$ với $A > 0$, chúng tôi ký hiệu liên hợp Bruijn của $L(\cdot)$ là $\widetilde{L}(\cdot)$. Không mất tính tổng quát, chúng ta có thể giả sử $\widetilde{L}(\cdot)$ cũng xác định trên $[A, \infty)$, đồng thời cả $L(x)$ và $\widetilde{L}(x)$ đều bị chặn trên các khoảng đóng hữu hạn.

Bổ đề 1.3.12 ([5, tr. 29]). *Nếu $L(\cdot)$ là hàm biến đổi chậm thỏa mãn*

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{L(\lambda_0 x)}{L(x)} - 1 \right) \log(L(x)) = 0, \tag{1.4}$$

với $\lambda_0 > 1$ nào đó, thì với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, ta có

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L(xL^{\alpha}(x))}{L(x)} = 1, \tag{1.5}$$

và do đó chúng ta có thể chọn $\widetilde{L}(x) = \dfrac{1}{L(x)}$.

Đặc biệt, nếu $L(x) = \log^{\gamma} x$, $x \geq 2$ thì $\widetilde{L}(x) = \log^{-\gamma} x$, $x \geq 2$, trong đó $\gamma \in \mathbb{R}$.

Chương 2

SỰ HỘI TỤ CỦA TỔNG CÓ TRỌNG SỐ CÁC PHẦN TỬ NGẪU NHIÊN PHỤ THUỘC TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

2.1. LUẬT MẠNH SỐ LỚN CHO DÃY CÁC PHẦN TỬ NGẪU NHIÊN PHỤ THUỘC TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Trong mục này chúng tôi xây dựng một số định lý dạng luật mạnh số lớn cho dãy các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một theo toạ độ và theo khối nhận giá trị trong không gian Hilbert và cho dãy các phần tử ngẫu nhiên liên kết âm theo toạ độ và theo khối nhận giá trị trong không gian Hilbert. Các kết quả của chúng tôi mở rộng Định lý 3.1 của Hiền, Thành, Vân [9] và mở rộng Định lý 2.2 của Thành [16].

Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy các phần tử ngẫu nhiên trong $\mathcal{H}$ và $\{b_n, n \geq 1\}$ là dãy số dương không giảm. Với $n \geq 1, j \in B$, đặt

$$\begin{aligned}
&X_n^{(j)} = \langle X_n, e_j \rangle,\\
&Y_n^{(j)} = -b_n I(X_n^{(j)} < -b_n) + X_n^{(j)} I(|X_n^{(j)}| \leq b_n) + b_n I(X_n^{(j)} > b_n),\\
&Y_n = \sum_{j \in B} Y_n^{(j)} e_j.
\end{aligned}$$

Với $k \geq 0$, đặt

$$T_k = \frac{1}{b_{2^{k+1}} - b_{2^k}} \max_{2^k \leq j < 2^{k+1}} \left\| \sum_{i=2^k}^{j} (Y_i - EY_i) \right\|$$

$$\tau_k = \frac{1}{(b_{2^{k+1}} - b_{2^k}) \log 2^{k+1}} \max_{2^k \leq j < 2^{k+1}} \left\| \sum_{i=2^k}^{j} (Y_i - EY_i) \right\|$$

Bổ đề sau đây chúng ta có thể xem chứng minh công thức (2.5) trong [16, tr. 278].

Bổ đề 2.1.1. *Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy các phần tử ngẫu nhiên kỳ vọng 0 trong $\mathcal{H}$ và $\{b_n, n \geq 1\}$ là dãy số dương, $\{r_n, n \geq 1\}$ là dãy số nhận giá trị trong $[1, 2]$. Khi đó với $n \geq 1$ và $j \in B$ ta có*

$$\frac{E|X_n^{(j)}|^2 I(|X_n^{(j)}| \leq b_n)}{b_n^2} + P(|X_n^{(j)}| > b_n) \leq 2\frac{E|X_n^{(j)}|^{r_n}}{b_n^{r_n}}. \tag{2.1}$$

Bổ đề sau đây chúng ta có thể xem chứng minh công thức (2.13) và (2.14) trong [16, tr. 280–281].

Bổ đề 2.1.2. *Giả sử* $\{X_n, n \geq 1\}$ *là dãy các phần tử ngẫu nhiên kỳ vọng 0 trong* $\mathcal{H}$ *và* $\{b_n, n \geq 1\}$ *là dãy số dương không giảm thỏa mãn*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in B} \frac{E|X_n^{(j)}|^{r_n}}{b_n^{r_n}} < \infty$$

trong đó $1 \leq r_n \leq 2$, $n \geq 1$. *Khi đó*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq Y_n) < \infty, \tag{2.2}$$

và

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} EY_i}{b_n} \to 0 \text{ h.c.c. khi } n \to \infty. \tag{2.3}$$

Định lý sau đây thiết lập luật mạnh số lớn dưới điều kiện dạng Loève cho dãy các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một theo tọa độ và theo khối trong không gian Hilbert. Kết quả này mở rộng Định lý 3.1 của Hiền, Thành, Vân [9].

Định lý 2.1.3. *Giả sử* $\{X_n, n \geq 1\}$ *là dãy các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một theo tọa độ và theo khối trong* $\mathcal{H}$, *kỳ vọng 0. Giả sử* $\{b_n, n \geq 1\}$ *là dãy số dương, không giảm thỏa mãn*

$$\inf_{n \geq 0} \frac{b_{2^{n+1}}}{b_{2^n}} > 1 \quad \text{và} \quad \sup_{n \geq 0} \frac{b_{2^{n+1}}}{b_{2^n}} < \infty. \tag{2.4}$$

Nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in B} \frac{E|X_n^{(j)}|^{r_n}}{b_n^{r_n}} \log^2(2n) < \infty \tag{2.5}$$

trong đó $1 \leq r_n \leq 2$, $n \geq 1$, *thì*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{b_n} \to 0 \text{ h.c.c. khi } n \to \infty. \tag{2.6}$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\|Y_n - EY_n\|^2}{b_n^2} \log^2 n &\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^2 n}{b_n^2} \sum_{j\in B} E(Y_n^{(j)})^2 \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j\in B} \left(\frac{E|X_n^{(j)}|^2 I(|X_n^{(j)}| \le b_n)}{b_n^2} + P(|X_n^{(j)}| > b_n) \right) \log^2 n \\
&\le 2\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j\in B} \frac{E|X_n^{(j)}|^{r_n}}{b_n^{r_n}} \log^2 n \quad (\text{do } (2.1)) \\
&< \infty \quad (\text{do } (2.5)).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Ta có $\{Y_n - EY_n, \, n \ge 1\}$ là dãy các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một theo tọa độ và theo khối trong $\mathcal{H}$. Với $k \ge 0$,

$$\begin{aligned}
ET_k^2 &\le CE\left(\frac{1}{b_{2^{k+1}}} \max_{2^k \le j < 2^{k+1}} \left\| \sum_{i=2^k}^{j} (Y_i - EY_i) \right\| \right)^2 \\
&\qquad\qquad (\text{do điều kiện đầu của } (2.4)) \\
&\le \frac{C}{b_{2^{k+1}}^2} (\log 2^{k+1})^2 \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} E\|Y_i - EY_i\|^2 \\
&\qquad\qquad (\text{do Bổ đề } 1.2.11) \\
&\le C \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{E\|Y_i - EY_i\|^2}{b_i^2} \log^2(2i).
\end{aligned}$$

Từ đó và (2.7) ta suy ra $\sum_{k=0}^{\infty} ET_k^2 < \infty$. Do đó

$$\lim_{k\to\infty} T_k = 0 \text{ h.c.c.} \tag{2.8}$$

Với $n \ge 1$, giả sử $k \ge 0$ thỏa mãn $2^k \le n < 2^{k+1}$, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^{n} \|Y_i - EY_i\|}{b_n} &\le \frac{1}{b_{2^k}} \sum_{j=0}^{k} \max_{2^j \le l < 2^{j+1}} \left\| \sum_{i=2^j}^{l} (Y_i - EY_i) \right\| \\
&= \frac{b_{2^{k+1}}}{b_{2^k}} \sum_{j=0}^{k} \frac{b_{2^{j+1}} - b_{2^j}}{b_{2^{k+1}}} T_j \\
&\le C \sum_{j=0}^{k} \frac{b_{2^{j+1}} - b_{2^j}}{b_{2^{k+1}}} T_j \\
&\qquad\qquad (\text{do điều kiện sau của } (2.4)).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Từ Từ (2.8), (2.9) và Bổ đề Toeplitz ta suy ra

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - EY_i)}{b_n} \to 0 \text{ h.c.c. khi } n \to \infty. \tag{2.10}$$

Từ (2.2), (2.3), (2.10) và Bổ đề Borel-Cantelli ta suy ra (2.6). $\square$

Ví dụ sau đây minh hoạ cho Định lý 2.1.3.

Ví dụ 2.1.4. Giả sử $\{V_n, n \geq 1\}$ là dãy các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một theo toạ độ trong $\mathcal{H}$ thoả mãn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^2(2n)}{n^{\alpha p}} \sum_{j \in B} E|V_n^{(j)}|^p < \infty \tag{2.11}$$

trong đó $1 \leq p \leq 2, \alpha > 0$. Giả sử

$$X_n = V_{n-2^m+1},\ 2^m \leq n < 2^{m+1},\ m \geq 0.$$

Khi đó $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một theo toạ độ và theo khối trong $\mathcal{H}$, kỳ vọng 0. Áp dụng (2.11), ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in B} \frac{E|X_n^{(j)}|^p}{n^{\alpha p}} \log^2(2n) < \infty.$$

Do đó, áp dụng Định lý (2.1.3) ta suy ra

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \text{ h.c.c.}$$

Ví dụ tiếp theo chỉ ra rằng trong Định lý 2.1.3, chúng ta không thể thay thế (2.5) bởi điều kiện

$$\sum_{j \in B} \frac{E|X_n^{(j)}|^{r_n}}{b_n^{r_n}} \log^2(2n) = o(1).$$

Ví dụ 2.1.5. Cho $b_n \equiv n^{1/2}$, $r_n \equiv 2$. Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối $N(0,1)$. Khi đó $\{X_n, n \geq 1\}$ thoả mãn điều kiện phụ thuộc âm đôi một theo khối. Ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E|X_n|^{r_n}}{b_n^{r_n}} \log^2(2n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^2(2n)}{n} E|X_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^2(2n)}{n} = \infty,$$

và do đó (2.5) sai. Chú ý rằng,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{b_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n^{1/2}} \sim N(0,1).$$

Vì vậy (2.6) sai. Tuy nhiên, ta có

$$\frac{E|X_n|^{r_n}}{b_n^{r_n}} \log^2(2n) = \frac{\log^2(2n)}{n} E|X_n|^2 = \frac{\log^2(2n)}{n} \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Chú ý 2.1.6. (i) Nếu $r_n \equiv 2$, thì

$$\sum_{j\in B} E|X_n^{(j)}|^{r_n} = \sum_{j\in B} E|X_n^{(j)}|^2 = E\|X_n\|^2.$$

Do đó, Định lý 2.1.3 mở rộng Định lý 3.1 của Hiền, Thành, Vân [9].

(ii) Nếu B gồm hữu hạn phần tử thì (2.5) tương đương với điều kiện

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\|X_n\|^{r_n}}{b_n^{r_n}} \log^2(2n) < \infty.$$

(iii) S. Csörgő, Tandori và Totik [6] đã chứng minh rằng với dãy các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một, kỳ vọng 0, thì điều kiện

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E|X_n|^2}{n^2} < \infty$$

không kéo theo luật mạnh số lớn (2.6) với $b_n = n$.

Định lý tiếp theo là một dạng biến đổi của Định lý 2.1.3.

Định lý 2.1.7. *Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một theo tọa độ và theo khối trong $\mathcal{H}$, kỳ vọng 0. Giả sử $\{b_n, n \geq 1\}$ là dãy số dương, không giảm thỏa mãn (2.4). Nếu*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j\in B} \frac{E|X_n^{(j)}|^{r_n}}{b_n^{r_n}} < \infty \tag{2.12}$$

trong đó $1 \leq r_n \leq 2$, $n \geq 1$, thì

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{b_n \log(2n)} \to 0 \textit{ h.c.c. khi } n \to \infty. \tag{2.13}$$

Chú ý 2.1.8. Nếu B gồm hữu hạn phần tử thì (2.12) tương đương với điều kiện

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\|X_n\|^{r_n}}{b_n^{r_n}} < \infty.$$

Tương tự cách chứng minh Định lý 2.1.3, chúng tôi thiết lập luật mạnh số lớn dưới điều kiện dạng Loève cho dãy các phần tử ngẫu nhiên liên kết âm theo tọa độ và theo khối trong không gian Hilbert. Kết quả này mở rộng Định lý 2.2 của Thành [16].

Định lý 2.1.9. *Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy các phần tử ngẫu nhiên liên kết âm theo tọa độ và theo khối trong $\mathcal{H}$, kỳ vọng 0. Giả sử $\{b_n, n \geq 1\}$ là dãy số dương, không giảm thỏa mãn (2.4). Nếu điều kiện (2.12) thỏa mãn thì ta có luật mạnh số lớn (2.6).*

2.2. SỰ HỘI TỤ ĐẦY ĐỦ CỦA TỔNG CÓ TRỌNG SỐ CÁC PHẦN TỬ NGẪU NHIÊN PHỤ THUỘC TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Trong mục này, chúng tôi xây dựng định lý Baum–Katz cho dãy các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một theo tọa độ, cùng phân phối, nhận giá trị trong không gian Hilbert bằng cách sử dụng thuật toán chứng minh tương tự của Ánh và Hiền [3]. Kết quả của chúng tôi mở rộng Định lý 3.3 của Hiền, Thành, Vân [9].

Định lý 2.2.1. *Giả sử $1 \leq p < 2$, $\alpha p \geq 1$, $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là dãy các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một theo tọa độ, cùng phân phối nhận giá trị trong $\mathcal{H}$ và $L(\cdot)$ là hàm biến đổi chậm xác định trên $[A, \infty)$, với $A > 0$. Trong trường hợp $p = 1$, ta giả sử rằng $L(x)$ và là hàm tăng trên $[A, \infty)$. Đặt*

$$b_n = n^\alpha \widetilde{L}(n^\alpha),\ n \geq A^{1/\alpha}.$$

Giả sử $\{a_{ni}, n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ là mảng các hằng số thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2 \leq Cn \text{ với mọi } n \geq 1. \tag{2.14}$$

Khi đó, nếu phần tử ngẫu nhiên X thỏa mãn

$$E(X) = 0,\ \sum_{j \in B} E\left(|X^{(j)}|^p L^p(|X^{(j)}| + A)\right) < \infty, \tag{2.15}$$

thì với mọi $\varepsilon > 0$ ta có

$$\sum_{n \geq A^{1/\alpha}} n^{\alpha p - 2} P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \left\|\sum_{i=1}^{k} a_{ni} X_i\right\| > \varepsilon b_n \log(2n)\right) < \infty. \tag{2.16}$$

Áp dụng Định lý 2.2.1 với $L(x) \equiv 1$ ta có hệ quả sau đây. Hệ quả này mở rộng Đinh lý 3.3 của Hiền, Thành, Vân [4].

Hệ quả 2.2.2. *Giả sử $1 \leq p < 2$, $\alpha p \geq 1$, $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là dãy các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một theo tọa độ, cùng phân phối nhận giá trị trong $\mathcal{H}$. Giả sử $\{a_{ni}, n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ là mảng các hằng số thỏa mãn (2.14). Khi đó, nếu phần tử ngẫu nhiên X thỏa mãn*

$$E(X) = 0,\ \sum_{j \in B} E\left(|X^{(j)}|^p\right) < \infty,$$

thì với mọi $\varepsilon > 0$ ta có

$$\sum_{n \geq A^{1/\alpha}} n^{\alpha p-2} P\left(\max_{1\leq k\leq n}\left\|\sum_{i=1}^{k} a_{ni}X_i\right\| > \varepsilon n^{\alpha}\log(2n)\right) < \infty.$$

Áp dụng Định lý 2.2.1 với $a_{ni} \equiv 1$ và $\alpha p = 1$, ta suy ra hệ quả sau đây.

Hệ quả 2.2.3. *Giả sử $1 \leq p < 2$ và $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là dãy các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một theo tọa độ, cùng phân phối nhận giá trị trong $\mathcal{H}$ và $L(\cdot)$ là hàm biến đổi chậm xác định trên $[A, \infty)$, với $A > 0$. Khi $p = 1$, ta giả sử rằng $L(x) \geq 1$ và là hàm tăng trên $[A, \infty)$. Đặt*

$$b_n = n^{1/p}\widetilde{L}(n^{1/p}),\ n \geq A^p.$$

Nếu phần tử ngẫu nhiên X thỏa mãn điều kiện (2.15) thì

$$\sum_{n\geq A^p} n^{-1} P\left(\max_{1\leq k\leq n}\left\|\sum_{i=1}^{k} X_i\right\| > \varepsilon b_n \log(2n)\right) < \infty \text{ với mọi } \varepsilon > 0.$$

Hệ quả sau đây là một kết quả về luật mạnh số lớn.

Hệ quả 2.2.4. *Giả sử $1 \leq p < 2$ và $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là dãy các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một theo tọa độ, cùng phân phối nhận giá trị trong $\mathcal{H}$ và $L(\cdot)$ là hàm biến đổi chậm, xác định trên $[A, \infty)$, với $A > 0$. Khi $p = 1$, ta giả sử rằng $L(x) \geq 1$ và là hàm tăng trên $[A, \infty)$. Đặt*

$$b_n = n^{1/p}\widetilde{L}(n^{1/p}),\ n \geq A^p.$$

Nếu phần tử ngẫu nhiên X thỏa mãn điều kiện (2.15) thì ta thu được luật mạnh số lớn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n \log(2n)} \max_{1\leq k\leq n}\left\|\sum_{i=1}^{k} X_i\right\| = 0 \quad h.c.c. \tag{2.17}$$

Xét trường hợp đặc biệt $1 < p < 2$, $\alpha p = 1$, $\gamma > 0$ và $L(x) = (\log x)^{-1/\gamma},\ x \geq 2$. Khi đó

$$b_n = n^{\alpha} L^{-1}(n^{\alpha}) = \left(\frac{1}{p}\right)^{1/\gamma} n^{1/p}(\log n)^{1/\gamma},\ n \geq 2,$$

và chúng ta có hệ quả sau đây.

Hệ quả 2.2.5. *Giả sử $1 < p < 2$, $\gamma > 0$ và $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là dãy các phần tử phụ thuộc âm đôi một theo tọa độ, cùng phân phối nhận giá trị* *trong* $\mathcal{H}$ *và* $\{a_{ni}, n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ *là mảng hằng số thỏa mãn* (2.14)*. Nếu phần tử ngẫu nhiên* X *thỏa mãn*

$$\mathbb{E}(X) = 0, \ \sum_{j \in B} \mathbb{E}\left(|X^{(j)}|^p / \log^{p/\gamma}(|X^{(j)}| + 2)\right) < \infty,$$

thì

$$\sum_{n \geq A^\alpha} n^{-1} P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \left\| \sum_{i=1}^{k} a_{ni} X_i \right\| > \varepsilon n^{1/p} (\log n)^{1/\gamma+1}\right) < \infty \text{ với mọi } \varepsilon > 0.$$

Đặc biệt, ta thu được luật mạnh số lớn

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\max\limits_{1 \leq k \leq n} \left\| \sum_{i=1}^{k} X_i \right\|}{n^{1/p} (\log n)^{1/\gamma+1}} = 0 \quad h.c.c. \tag{2.18}$$

KẾT LUẬN - KIẾN NGHỊ

Kết quả đã đạt được:

- Xây dựng luật mạnh số lớn Loève cho dãy các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một theo toạ độ và theo khối trong không gian Hilbert (Định lý 2.1.3) và chỉ ra 2 ví dụ minh hoạ. Kết quả này mở rộng Định lý 3.1 của Hiền, Thành, Vân [9].

- Xây dựng luật mạnh số lớn Loève cho dãy các phần tử ngẫu nhiên liên kết âm theo toạ độ và theo khối trong không gian Hilbert (Định lý 2.1.9). Kết quả này mở rộng Định lý 2.2 của Thành [16].

- Xây dựng định lý Baum–Katz cho dãy các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một theo tọa độ, cùng phân phối, nhận giá trị trong không gian Hilbert (Định lý 2.2.1). Kết quả này mở rộng Định lý 3.3 của Hiền, Thành, Vân [9].

Hướng phát triển đề tài:

- Xây dựng luật mạnh số lớn Loève cho mảng kép các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một theo toạ độ và theo khối trong không gian Hilbert.

- Xây dựng định lý Baum–Katz cho mảng kép các phần tử ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một theo tọa độ, cùng phân phối, nhận giá trị trong không gian Hilbert

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH CỦA TÁC GIẢ (NHÓM TÁC GIẢ) ĐÃ CÔNG BỐ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN NỘI DUNG ĐỀ TÀI

Vu Thi Ngoc Anh, "On the strong laws of large numbers for sequences of blockwise pairwise and coordinatewise negatively dependent random vectors in Hilbert spaces", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, accepted 2021.

DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] K. Alam and K. M. Lai Saxena (1981), "Positive dependence in multivariate distributions", *Comm. Statist. A. Theory Methods*, 10, 1183–1196.

[2] V. T. N. Anh (2014), "A strong law of large numbers for sequences of pairwise negative quadrant m-dependent random variables", *Journal of science - Vinh university*, 43, no. 3A, 5-10.

[3] V. T. N. Anh and N. T. T. Hien, "On complete convergence for weighted sums of coordinatewise negatively associated random vectors in Hilbert spaces, Bulletin of the Korean Mathematical Society", *accepted 2021.*

[4] V.T.N. Anh, N. T. T. Hien, L. V. Thanh, V. T. H. Van (2021), "The Marcinkiewicz-Zygmund type strong law of large numbers with general normalizing sequences", *Journal of Theoretical Probability*, 34, 331–348.

[5] N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels (1989), *Regular variation*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 27, Cambridge University Press, Cambridge.

[6] S. Csörgő, K. Tandori and V. Totik (1983), "On the strong law of large numbers for pairwise independent random variables", *Acta Math. Hungar.* 42, 319–330.

[7] K. Joag-Dev and K. Proschan (1983), "Negative association of random variables, with applications", *Ann. Statist.*, 11, 286–295.

[8] J. Galambos and E. Seneta (1973), "Regularly varying sequences", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 41, 110–116.

[9] N. T. T. Hien, L. V. Thanh, V. T. H. Van (2019), "On the negative dependence in Hilbert spaces with applications", *Appl. Math.*, 64, 45–59.

[10] N. V. Huan, N. V. Quang and N. T. Thuan (2014), "Baum-Katz type theorems for coordinatewise negatively associated random vectors in Hilbert spaces", *Acta Math. Hungar.*, 144, 132–149.

[11] M. H. Ko, T. S. Kim and K. H. Han (2009), "A note on the almost sure convergence for dependent random variables in a Hilbert space", *J. Theoret. Probab.*, 22, 506–513.

[12] E. L. Lehmann (1966), "Some concepts of dependence", *Ann. Math. Statist.*, 37, 1137–1153.

[13] P. Matula (1992), "A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables", *Statist. Probab. Lett.*, 15, 209-213.

[14] D. Li, A. Rosalsky, and A. Volodin (2006), "On the strong law of large numbers for sequences of pairwise negative quadrant dependent random variables", *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)*, 1, 281-305.

[15] E. Seneta (1976), Regularly varying functions, *Lecture Notes in Mathematics*, **508**, Springer-Verlag, Berlin-New York.

[16] L. V. Thanh (2013),"On the almost sure convergence for dependent random vectors in Hilbert", *Acta Math. Hungar.*, 139, 276–285.

[17] L. X. Zhang (2001), "Strassen's law of the iterated logarithm for negatively associated random vectors", *Stoch. Processes Appl.*, 95, 311-328.