UBND TỈNH NINH BÌNH

TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ

BÁO CÁO ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP TRƯỜNG

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA HÀM ĐA ĐIỀU HÒA DƯỚI CỰC ĐẠI

Chủ nhiệm đề tài: ThS. NGUYỄN THỊ NHÀN

Đơn vị công tác: KHOA TỰ NHIÊN

NINH BÌNH, 2020

UBND TỈNH NINH BÌNH

TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ

BÁO CÁO ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU
KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP TRƯỜNG

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA HÀM ĐA ĐIỀU HÒA DƯỚI CỰC ĐẠI

Chủ nhiệm đề tài: ThS. NGUYỄN THỊ NHÀN
Đơn vị: KHOA TỰ NHIÊN
Các thành viên: ThS. DƯƠNG THU HƯƠNG
Đơn vị: KHOA TIỂU HỌC - MẦM NON

NINH BÌNH, 2020

MỤC LỤC

BẢNG KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

$\mathbb{C}$	Tập hợp các số phức
$\mathbb{C}^n$	Không gian vectơ phức n chiều
$B(a, r)$	Hình cầu mở tâm a bán kính r trong không gian vectơ thực hoặc không gian vectơ phức
$\overline{B}(a, r)$	Hình cầu đóng tâm a bán kính r trong không gian vectơ thực hoặc không gian vectơ phức
Ω	Một miền trong không gian vectơ thực hoặc không gian vectơ phức
$K \Subset \Omega$	K là 1 tập compact tương đối trong Ω
$C^2(\Omega)$	Tập các hàm khả vi liên tục cấp 2 trên Ω
$C^\infty(\Omega)$	Tập các hàm khả vi vô hạn (các hàm trơn) trên Ω
$C_0^\infty(\Omega)$	Tập các hàm khả vi vô hạn với giá compact trên Ω
$L^\infty(\Omega)$	Tập các hàm bị chặn trên Ω
$L^\infty_{loc}(\Omega)$	Tập các hàm bị chặn địa phương trên Ω
$L^p_{loc}(\Omega)$	Tập các hàm khả tích địa phương cấp p trên Ω
$\square$	Kết thúc chứng minh
tr. i	Trang thứ i trong tài liệu được trích dẫn

THÔNG TIN CHUNG VỀ ĐỀ TÀI

1. Tên đề tài

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA HÀM ĐA ĐIỀU HÒA DƯỚI CỰC ĐẠI

2. Lĩnh vực nghiên cứu

Khoa học Tự nhiên

3. Thời gian thực hiện

Từ tháng 1/2020 đến tháng 12/2020

4. Chủ nhiệm đề tài

Nguyễn Thị Nhàn – Khoa Tự nhiên, Trường Đại học Hoa Lư

5. Thành viên tham gia

Th.S. Dương Thu Hương – Khoa Tiểu học - Mầm non, Trường Đại học Hoa Lư

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Lớp hàm đa điều hòa dưới cực đại là một lớp con của lớp hàm đa điều hòa dưới mang nhiều tích chất đặc sắc và có ý nghĩa quan trọng trong việc nghiên cứu về hàm đa điều hòa dưới, ví dụ như việc giải bài toán Dirichlet thuần nhất trên các tập mở trong $\mathbb{C}^n$, trên cơ sở đó ứng dụng vào việc nghiên cứu sự tồn tại cũng như tính chất nghiệm của bài toán Dirichlet đối với toán tử Monge-Ampère của hàm đa điều hòa dưới. Hơn nữa, việc sử dụng hàm đa điều hòa dưới cực đại là một kỹ thuật quan trọng được các tác giả sử dụng để làm bước trung gian trong việc đánh giá và nghiên cứu hàm đa điều hòa dưới nói chung. Tuy nhiên, trong sách giáo trình và tài liệu chuyên khảo về lý thuyết đa thế vị đề cập không nhiều về hàm đa điều hòa dưới cực đại. Do vậy, để đóng góp những tri thức quan trọng cho giảng viên và học viên cao học muốn nghiên cứu sâu hơn về lý thuyết đa thế vị, chúng tôi chọn đề tài "Một số tính chất của hàm đa điều hòa dưới cực đại".

2. Tổng quan tình hình nghiên cứu thuộc lĩnh vực của đề tài

Lý thuyết đa thế vị là một trong những hướng nghiên cứu mới của giải tích phức, được phát triển mạnh mẽ trong vòng ba thập niên trở lại đây bởi các nhà toán học như: P. Ahag, E. Bedford, Z. B locki, U. Cegrell, R. Czyz, J.P. Demailly, V. Guedj, S. Kolodziej, B.A. Taylor, Y. Xing, A. Zeriahi, GS.TSKH. Lê Mậu Hải, GS.TSKH. Phạm Hoàng Hiệp, GS.TSKH. Nguyễn Văn Khuê, TS. Nguyễn Xuân Hồng...Trong đó, các thành tựu nổi bật mà các tác giả đã đạt được xoay quanh việc nghiên cứu tính chất của hàm đa điều hòa dưới. Một trong những đối tượng quan trọng được các tác giả đặc biệt quan tâm để nghiên cứu hàm đa điều hòa dưới đó là toán tử Monge-Ampère phức. Việc nghiên cứu sâu về toán tử Monge-Ampère phức đã làm sáng tỏ rất nhiều tính chất thú vị và hữu ích về hàm đa điều hòa dưới như là nguyên lý so sánh đối với toán tử Monge-Ampère phức trong những lớp hàm đa điều hòa dưới cụ thể, độ đo Monge-Ampère phức, dung lượng của một Borel, tính chất của các tập đa cực, tính chất của các lớp hàm Cegrell, ...

Lớp hàm đa điều hòa dưới cực đại là một lớp con của lớp hàm đa điều hòa dưới mang nhiều tích chất đặc sắc và có ý nghĩa quan trọng trong việc nghiên cứu về hàm đa điều hòa dưới. Ở nước ngoài, nghiên cứu về hàm đa điều hòa dưới cực đại phải kể đến các nhà toán học như: U. Cegrell, Ulf Backlund, Hong Oh Kim,. . . .Ở trong nước nhóm nghiên cứu của GS.TSKH. Lê Mậu Hải, GS.TSKH. Phạm Hoàng Hiệp, GS.TSKH. Nguyễn Văn Khuê, TS. Nguyễn Xuân Hồng... Chúng tôi sẽ trình bày một số tính chất cơ bản cũng như một số tính chất mở rộng của hàm đa điều hòa dưới cực đại và mở rộng kết quả của nó qua các bài báo [3], [4].

3. Mục tiêu và nhiệm vụ nghiên cứu

Trình bày một số tính chất của hàm đa điều hòa dưới cực đại.

4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu: Hàm đa điều hòa dưới cực đại.

Phạm vi nghiên cứu: Nghiên cứu một số tính chất của hàm đa điều hòa dưới cực đại.

5. Cách tiếp cận và phương pháp nghiên cứu

Cách tiếp cận: Nghiên cứu lý thuyết.

Phương pháp nghiên cứu: Phân tích, so sánh.

Chương 1

CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1.1. HÀM ĐIỀU HÒA DƯỚI

Chúng ta sẽ bắt đầu bằng việc trình bày các định nghĩa cùng với một số kết quả về hàm điều hòa dưới trên $\mathbb{C}$.

Định nghĩa 1.1.1 ([1]). Giả sử X là không gian tôpô. Hàm $u : X \to [-\infty, +\infty)$ gọi là nửa liên tục trên trên X nếu với mỗi $\alpha \in \mathbb{R}$ tập

$$X_\alpha = \{x \in X : u(x) < \alpha\}$$

là mở trong X. Hàm $v : X \to (-\infty, +\infty]$ gọi là nửa liên tục dưới trên X nếu $-v$ là nửa liên tục trên trên X.

Định nghĩa trên tương đương với định nghĩa mang tính địa phương sau

Định nghĩa 1.1.2 ([1]). Giả sử $u : X \to [-\infty, +\infty)$. Ta nói hàm u là nửa liên tục trên tại $x_0 \in X$ nếu $\forall \varepsilon > 0$ tồn tại lân cận U_{x_0} của x_0 trong X sao cho $\forall x \in U_{x_0}$ ta có

$$u(x) < u(x_0) + \varepsilon \quad \text{nếu} \quad u(x_0) \neq -\infty$$

$$u(x) < -\frac{1}{\varepsilon} \quad \text{nếu} \quad u(x_0) = -\infty$$

Hàm u gọi là nửa liên tục trên trên X nếu u nửa liên tục trên tại mọi $x_0 \in X$.

Mặt khác, nếu ta cho định nghĩa sau: Giả sử $E \subset X$ và $u : E \to [-\infty, +\infty)$ là hàm trên E. Giả sử $x_0 \in \overline{E}$. Ta định nghĩa

$$\limsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} u(x) = \inf \{\sup \{u(y) : y \in V\}\}$$

ở đây inf lấy trên các V chạy qua các lân cận của x_0.
Khi đó, ta có định nghĩa

Định nghĩa 1.1.3 ([1]). Hàm $u : X \to [-\infty, +\infty)$ là nửa liên tục trên tại $x_0 \in X$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \sup\limits_{x \in E} u(x) \leq u(x_0)$.

Định lý 1.1.4 ([1]). Giả sử u là hàm nửa liên tục trên trên không gian tôpô X và $K \Subset X$ là tập compact. Khi đó u đạt cực đại trên K.

Định lý 1.1.5 ([1]). Giả sử u là hàm nửa liên tục trên và bị chặn trên trên không gian metric (X, d). Khi đó tồn tại dãy giảm các hàm liên tục $\Phi_n : X \to \mathbb{R}$ với

$$\lim_{n \to \infty} \Phi_n(x) = u(x), \quad \forall x \in X.$$

Định nghĩa 1.1.6 ([1]). Giả sử Ω là tập mở trong $\mathbb{C}$. Hàm $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ gọi là điều hòa dưới trên Ω nếu nó nửa liên tục trên trên Ω và thỏa mãn bất đẳng thức dưới trung bình trên Ω , nghĩa là với mọi $w \in \Omega$ tồn tại $\varrho > 0$ sao cho với mọi $0 \leq r < \varrho$ ta có

$$u(w) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w + re^{it}) dt. \tag{1.1}$$

Ví dụ 1.1.7. Cho hàm chỉnh hình f trên $\Omega \subset \mathbb{C}$. Khi đó, hàm $u(z) = |f(z)|; v(z) = \log |f(z)|$ là hàm điều hòa dưới trên Ω.
Thật vậy, $u(z)$ là hàm điều hòa dưới vì

$$\begin{aligned} u(z) = |f(z)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + re^{it})| dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{it}) dt. \end{aligned}$$

Đối với hàm $v(z)$
• Nếu $f(z) \equiv 0$, hiển nhiên.
• Nếu $f(z) \not\equiv 0$ trên Ω. Khi đó, $\log |f|$ là hàm nửa liên tục trên trên Ω. Giả sử $\omega \in \Omega$. Nếu $f(\omega) \neq 0$ thì chọn $\delta > 0$ sao cho $f \neq 0$ trên $B(\omega, \delta) = \{z \in \Omega : |z - \omega| < \delta\}$. Khi đó $\log |f|$ là hàm điều hòa trên $B(\omega, \delta) = \{z \in \Omega : |z - \omega| < \delta\}$ nên (1.1) được thỏa mãn với dấu đẳng thức. Trường hợp $f(\omega) = 0$. Khi đó $\log |f(\omega)| = -\infty$ và do đó (1.1) luôn đúng.

Nhận xét 1.1.8. Hàm đồng nhất $-\infty$ trên Ω là hàm điều hòa dưới trên Ω.

Ta kí hiệu tập các hàm điều hòa dưới trên Ω là $SH(\Omega)$.

Mệnh đề 1.1.9 ([1]). Giả sử u, v là các hàm điều hòa dưới trên tập mở Ω trong $\mathbb{C}$. Khi đó

(i) $\max(u, v)$ là hàm điều hòa dưới trên Ω.

(ii) Tập các hàm điều hòa dưới trên Ω là một nón, nghĩa là nếu $u, v \in SH(\Omega)$ và $\alpha, \beta > 0$ thì $\alpha u + \beta v$ cũng thuộc $SH(\Omega)$.

Định lý 1.1.10 ([1]). Giả sử u là hàm điều hòa dưới trên miền bị chặn Ω trên $\mathbb{C}$. Khi đó

(i) Nếu u đạt cực đại toàn thể tại một điểm trên Ω thì u là hằng số trên Ω.

(ii) Nếu $\lim\limits_{z\to\zeta} sup\, u(z) \leq 0$ đối với mọi $\zeta \in \partial\Omega$ thì $u \leq 0$ trên Ω.

Định lý 1.1.11 ([1]). Giả sử Ω là tập mở trong $\mathbb{C}$ và u là hàm nửa liên tục trên trên Ω. Khi đó, các phát biểu sau là tương đương

(i) u là hàm điều hòa dưới trên Ω.

(ii) Với mọi $w \in \Omega$, tồn tại $\varrho > 0$ sao cho $\overline{\Delta}(w, \varrho > 0) \subset \Omega$ và với mọi $0 \leq r < \varrho, 0 \leq t < 2\pi$ ta có
$$u(w + re^{it}) \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\varrho^2 - r^2}{\varrho^2 - 2\varrho r \cos(\theta - t) + r^2} u(w + re^{it}) d\theta.$$
ở đó $\overline{\Delta}(w, \varrho > 0) = \{z \in \Omega : |z - w| \leq \varrho\}$ là đĩa đóng tâm w bán kính ϱ.

(iii) Với mọi miền $D \Subset \Omega$ và h là hàm điều hòa trên D, liên tục trên $\overline{D}$ thỏa mãn
$$\limsup_{z\to\zeta}(u - h)(z) \leq 0 \quad (\zeta \in \partial D)$$
ta có $u \leq h$ trên D.

Hệ quả 1.1.12 ([1]). Nếu u là hàm điều hòa dưới trên tập mở Ω và nếu $\overline{\Delta}(w, \varrho) \subset \Omega$ thì
$$u(w) \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(w + \varrho e^{i\theta}) d\theta.$$

Định lý 1.1.13 ([1])**.** Giả sử $u \in C^2(\Omega)$. Khi đó u là hàm điều hòa dưới trên Ω khi và chỉ khi $\Delta u \geq 0$ trên Ω, ở đó $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ là Laplace của u.

Định lý 1.1.14 ([1])**.** Giả sử u là hàm điều hòa dưới trên tập mở Ω_1 và v là hàm điều hòa dưới trên tập mở $\Omega_2 \subset \Omega_1$. Giả thiết

$$\limsup_{z \to \zeta} v(z) \leq u(\zeta), \quad \text{đối với mọi} \quad \zeta \in \Omega_1 \cap \partial\Omega_2.$$

Khi đó hàm $\widetilde{u}$ xác định trên Ω_1

$$\widetilde{u} = \begin{cases} \max(u, v) & \text{trên} \quad \Omega_2 \\ u & \text{trên} \quad \Omega_1 \backslash \Omega_2 \end{cases}$$

là hàm điều hòa dưới trên Ω_1.

Định lý 1.1.15 ([1])**.** Giả sử $\{u_n\}$ là dãy giảm các hàm điều hòa dưới trên tập mở Ω trên $\mathbb{C}$ và $u = \lim\limits_{n \to \infty} u_n$. Khi đó u là điều hòa dưới trên Ω.

Định lý 1.1.16 ([1])**.** Giả sử u là hàm điều hòa dưới trên miền Ω với $u \not\equiv -\infty$ trên Ω. Khi đó u khả tích địa phương trên Ω, nghĩa là với mọi $K \Subset \Omega$ ta có

$$\int\limits_K |u| \, dV < +\infty.$$

Định lý 1.1.17 ([1])**. (Bất đẳng thức Jensen)** Giả sử $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ và $\psi : (a, b) \to \mathbb{R}$ là hàm lồi. Nếu (Ω, μ) là không gian đo với $\mu(\Omega) = 1$ và $f : \Omega \to (a, b)$ là hàm khả tích thì ta có bất đẳng thức

$$\psi\Big(\int\limits_\Omega f d\mu\Big) \leq \int\limits_\Omega \psi \circ f d\mu.$$

Hệ quả 1.1.18 ([1])**.** Nếu u là hàm điều hòa dưới trên tập mở $\Omega \subset \mathbb{C}$ thì e^u cũng là hàm điều hòa dưới trên Ω.

Định lý 1.1.19 ([1])**.** Giả sử $v : \Delta(0, \varrho) \to [-\infty, +\infty)$ là hàm bán kính, nghĩa là $v(z) = v(|z|)$ với mọi $z \in \Delta(0, \varrho)$ và giả sử $v \not\equiv -\infty$. Khi đó v là điều hòa dưới trên $\Delta(0, \varrho)$ nếu và chỉ nếu $v(r)$ là hàm lồi tăng của $\log r, (0 < r < \varrho)$ với $\lim\limits_{r \to 0} v(r) = v(0)$. Ta hiểu $v(r)$ là hàm lồi tăng theo $\log r$ nếu hàm $v(e^t)$ là hàm lồi tăng theo t.

Định nghĩa 1.1.20 ([1]). Giả sử Ω là tập mở của $\mathbb{C}$. Với mỗi $r > 0$ đặt

$$\Omega_r = \{z \in \Omega : d(z, \partial\Omega) > r\}$$

Giả sử $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ là hàm khả tích địa phương trên Ω và giả sử $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ là hàm khả tích địa phương với supp$\phi \subset \Delta(0, r)$. Khi đó tích chập $u * \phi : \Omega_r \to \mathbb{R}$ theo công thức

$$u * \phi(z) = \int\limits_{\mathbb{C}} u(z - w)\phi(w)dV(w) = \int\limits_{\mathbb{C}} u(w)\phi(z - w)dV(w)$$

Định lý 1.1.21 ([1]). Giả sử u là hàm điều hòa dưới trên tập mở $\Omega \subset \mathbb{C}$ với $u \not\equiv -\infty$. Giả sử $\chi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\chi(x) = \begin{cases} ke^{-\frac{1}{1-||x||^2}} & \text{nếu} \quad ||x|| < 1 \\ 0 & \text{nếu} \quad ||x|| \geq 1 \end{cases}$$

Với mỗi $r > 0$ đặt

$$\chi_r(z) = \frac{1}{r^2}\chi(\frac{z}{r}) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Khi đó $u * \chi_r$ là hàm điều hòa dưới trơn trên Ω_r và $u * \chi_r \searrow u$ trên Ω khi $r \searrow 0$.

Hệ quả 1.1.22 ([1]). Giả sử u là hàm điều hòa dưới trên tập mở $\Omega \subset \mathbb{C}$ và D là miền con compact tương đối trong Ω. Khi đó tồn tại dãy hàm điều hòa dưới $\{u_n\}$ trơn trên D giảm tới u trên D.

Định lý 1.1.23 ([1]). Giả sử $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ là ánh xạ chỉnh hình giữa hai tập mở trong $\mathbb{C}$. Nếu u là hàm điều hòa dưới trên ω_2 thì $u \circ f$ là hàm điều hòa dưới trên Ω_1.

Định lý 1.1.24 ([1]). Giả sử u, v là các hàm điều hòa dưới trên tập mở $\Omega \subset \mathbb{C}$ sao cho $u = v$ (tương ứng $u \geq v$) hầu khắp nơi trên Ω. Khi đó $u = v$ (tương ứng $u \geq v$) trên Ω

1.2. HÀM ĐA ĐIỀU HÒA DƯỚI VÀ HÀM ĐA ĐIỀU HÒA DƯỚI CỰC ĐẠI

Định nghĩa 1.2.1 ([1]). Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là tập mở, $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ là hàm nửa liên tục trên, không đồng nhất bằng $-\infty$ trên mọi thành phần liên thông của Ω. Hàm u gọi là đa điều hòa dưới trên Ω (viết $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$) nếu với mọi $a \in \Omega$ và $b \in \mathbb{C}^n$, hàm $\lambda \mapsto u(a + \lambda b)$ là điều hòa dưới hoặc bằng $-\infty$ trên mọi thành phần liên thông của tập $\{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda b \in \Omega\}$.

Ví dụ 1.2.2. Cho hàm chỉnh hình f trên $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Khi đó, hàm $u = \log|f|$ là hàm đa điều hòa dưới trên Ω.

Định lý 1.2.3. Giả sử $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ là hàm nửa liên tục trên, không đồng nhất bằng $-\infty$ trên mọi thành phần liên thông của $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Khi đó $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ khi và chỉ khi với mọi $a \in \Omega, b \in \mathbb{C}^n$ sao cho

$$\{a + \lambda b : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \le 1\} \subset \Omega$$

ta có

$$u(a) \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + e^{i\theta} b) d\theta := l(u, a, b) \tag{1.2}$$

Chứng minh. Điều kiện cần suy ra từ định nghĩa (1.2.1).
Điều kiện đủ. Giả sử $a \in \Omega, b \in \mathbb{C}^n$ và xét

$$U = \{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda b \in \Omega\}$$

Khi đó U là tập mở trên $\mathbb{C}$. Đặt $v(\lambda) = u(a + \lambda b), \lambda \in U$. Cần chứng minh $v(\lambda)$ là điều hòa dưới trên U. Muốn vậy chỉ cần chứng tỏ nếu $\lambda_0 \in U$ tồn tại $\rho > 0$ sao cho với $0 \le r < \rho$ thì

$$v(\lambda_0) \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\lambda_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

Từ $a + \lambda_0 b \in \Omega$ nên nếu có $\rho > 0$ sao cho khi $|\lambda| < \rho$ thì $a + \lambda_0 b + \lambda b \in \Omega$. Với $0 \le r < \rho$ ta có $\{a + \lambda_0 b + \lambda r b : |\lambda| \le 1\} \subset \Omega$. Do đó từ giả thiết

$$u(a + \lambda_0 b) \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + \lambda_0 b + rbe^{i\theta}) d\theta$$

Vậy $v(\lambda_0) \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\lambda_0 + re^{i\theta}) d\theta$ □

Sau đây là định lý xấp xỉ cho các hàm đa điều hòa dưới.

Định lý 1.2.4. Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là tập mở và $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$. Nếu $\varepsilon > 0$ sao cho $\Omega_\varepsilon := \{z \in \Omega : d(z, \partial\Omega) > \varepsilon\} \neq \varnothing$ thì $u * \chi_\epsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon) \cap \mathrm{PSH}(\Omega_\varepsilon)$. Họ $\{u * \chi_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ là đơn điệu giảm khi $\varepsilon \downarrow 0$ và

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u * \chi_\varepsilon(z) = u(z)$$

xảy ra cho mọi $z \in \Omega$.

Chứng minh. Để chứng minh định lí trên ta cần bổ đề sau.

Bổ đề 1.2.5. Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là tập mở và $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Khi đó với mọi $z \in \Omega, b \in \mathbb{C}^n$ sao cho $\{z + \lambda b : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\} \subset \Omega$ ta có

$$(l(u, ., b) * \chi_\varepsilon)(z) = l(u * \chi_\varepsilon, z, b) \tag{1.3}$$

ở đó $l(u, z, b)$ xác định như trong (1.2)

Chứng minh. Từ định lí Fubini ta có

$$\begin{aligned}
(l(u, ., b) * \chi_\varepsilon)(z) &= \int_{\mathbb{C}^n} (\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + e^{i\theta} b - w) d\theta) \chi_\varepsilon(w) d\lambda(w) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\int_{\mathbb{C}^n} u(z + e^{i\theta} b - w) \chi_\varepsilon(w) d\lambda(w)) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u * \chi_\varepsilon)(z + e^{i\theta} b) d\theta \\
&= l(u * \chi_\varepsilon, z, b)
\end{aligned}$$

□

Chứng minh định lí (1.2.4). Từ cách xác định tích chập, rõ ràng $u * \chi_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Giả sử $a \in \Omega, b \in \mathbb{C}^n$ sao cho $\{a + \lambda b : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\} \subset \Omega_\varepsilon$. Khi đó với $w \in \mathbb{C}^n, |w| < \varepsilon, a - w \in \Omega$ và $\{a - w\lambda b : |\lambda| \leq 1, \lambda \in \mathbb{C}\} \subset \Omega$. Theo bổ đề (1.2.5) ta có

$$\begin{aligned}
(l(u * \chi_\varepsilon; a, b)(z) &= (l(u, ., b) * \chi_\varepsilon)(a) \\
&= \int_{\mathbb{C}^n} (\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + e^{i\theta} b - w) d\theta) \chi_\varepsilon(w) d\lambda(w) \\
&\geq \int_{\mathbb{C}^n} u(a - w) \chi_\varepsilon(w) d\lambda_\varepsilon \\
&= (u * \chi_\varepsilon)(a)
\end{aligned}$$

Định lí (1.2.3) cho ta $u * \chi_\varepsilon \in \mathrm{PSH}(\Omega_\varepsilon)$. Do đó $u * \chi_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon) \cap \mathrm{PSH}(\Omega_\varepsilon)$. Ta chứng minh họ $\{u * \chi_\varepsilon\}$ giảm khi $\varepsilon \downarrow 0$ và với mọi $z \in \Omega, \lim\limits_{\varepsilon \to 0} (u * \chi_\varepsilon)(z) = u(z)$.

Giả sử $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Khi đó $\Omega_{\varepsilon_1} \subset \Omega_{\varepsilon_2}$ và $u * \chi_{\varepsilon_1}, u * \chi_{\varepsilon_2} \in C^\infty(\Omega_{\varepsilon_1})$. Ta chứng minh với $z \in \Omega_{\varepsilon_1}$ thì

$$u * \chi_{\varepsilon_1}(z) \geq u * \chi_{\varepsilon_2}(z) \tag{1.4}$$

Bất đẳng thức (1.4) được chứng minh bằng quy nạo theo n.
Với $n = 1$ thì (1.4) được chứng minh ở định lí (1.1.21). Khi đó có thể viết (1.4) dưới dạng

$$\int_{\mathbb{C}} u(z + \varepsilon_1 w)\chi(w)d\lambda(w) \geq \int_{\mathbb{C}} u(z + \varepsilon_2 w)\chi(w)d\lambda(w) \tag{1.5}$$

với $z \in \Omega_{\varepsilon_1} \subset \mathbb{C}, w \in \mathbb{C}$.
Với $n = 2$. Nếu $(z_1, z_2) \in \Omega_{\varepsilon_1}, (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$ thì

$$\begin{aligned}
u * \chi_{\varepsilon_1}(z_1, z_2) &= \int_{\mathbb{C}} (\int_{\mathbb{C}} u(z_1 + \varepsilon_1 w_1, z_2 + \varepsilon_2 w_2)\chi(w_1, w_2)d\lambda(w_1))d\lambda(w_2) \\
&\geq \int_{\mathbb{C}} (\int_{\mathbb{C}} u(z_1 + \varepsilon_2 w_1, z_2 + \varepsilon_1 w_2)\chi(w_1, w_2)d\lambda(w_1))d\lambda(w_2) \\
&\geq \int_{\mathbb{C}} (\int_{\mathbb{C}} u(z_1 + \varepsilon_2 w_1, z_2 + \varepsilon_1 w_2)\chi(w_1, w_2)d\lambda(w_2))d\lambda(w_1) \\
&\geq \int_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}} u(z_1 + \varepsilon_2 w_1, z_2 + \varepsilon_1 w_2)\chi(w_1, w_2)d\lambda(w_1))d\lambda(w_2) \\
&= u * \chi_{\varepsilon_2}(z_1, z_2) \geq u(z_1; z_2)
\end{aligned}$$

Tiếp theo ta chứng minh $\lim_{\varepsilon \to 0} u * \chi_\varepsilon(z) = u(z), z \in \Omega$. Giả sử $z \in \Omega$. Bởi tính nửa liên tục trên tại z nên với $\eta > 0$ có $\varepsilon_1 > 0$ sao cho $z \in \Omega_{\varepsilon_1}$ và $u(x) < u(z) + \eta, x \in B(z, \varepsilon_1)$. Từ đó nếu $\varepsilon < \varepsilon_1$ ta có

$$\begin{aligned}
u(z) \leq u * \chi_\varepsilon(z) &= \int_{B(0,\varepsilon)} u(z - y)\chi_\varepsilon(y)d\lambda(y) \\
&< (u(z) + \eta)\int_{B(0,\varepsilon)} \chi_\varepsilon(y)d\lambda(y) = u(z) + \eta
\end{aligned}$$

□

Định lý 1.2.6. Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là tập mở và $u \in C^2(\Omega)$. Khi đó $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ khi và chỉ khi Hessian $H_u(z) = (\dfrac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k})$ của u tại z xác định dương, nghĩa là với mọi $w = (w_1, w_2, ..., w_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$H_u(z)(w, w) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} w_j \overline{w}_k \geq 0.$$

Chứng minh. Định lí được suy ra từ đẳng thức: với mọi $z \in \Omega, w \in \mathbb{C}^n$ và $\xi \in \mathbb{C}$ ta có

$$\frac{1}{4}\Delta_\xi u(z+\xi w)|_{\xi=0} = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} w_j \overline{w}_k$$

và định nghĩa (1.2.1) cùng định lí (1.1.13). □

Định lý 1.2.7. Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là tập mở và $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$. Khi đó với mọi $b = (b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{C}^n$ ta có

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} b_j \bar{b}_k \geq 0.$$

tại mọi $z \in \Omega$ theo nghĩa suy rộng, nghĩa là với mọi $\varphi \in C_0^\infty(\Omega), \varphi \geq 0$

$$\int_\Omega u(z) < \mathcal{L}\varphi(z)b, b > d\lambda(z) \geq 0$$

ở đó $< \mathcal{L}\varphi(z)b, b >= \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} b_j \bar{b}_k$ là dạng Levi của φ tại z. Ngược lại, nếu $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ sao cho với mọi $z \in \Omega$, mọi $b = (b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{C}^n$

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} b_j \bar{b}_k \geq 0$$

theo nghĩa phân bố thì hàm $u = \lim_{\varepsilon \to 0}(v * \chi_\varepsilon)$ là hàm đa điều hòa dưới trên Ω và bằng v hầu khắp nơi trên Ω.

Chứng minh. Giả sử $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ và đặt $u_\varepsilon = u * \chi_\varepsilon$. Khi đó $u_\varepsilon \in \mathrm{PSH}(\Omega_\varepsilon) \cap C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Lấy $\varphi \in C_0^\infty(\Omega), \varphi \geq 0$ và $b = (b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{C}^n$. Từ định lí hội tụ bị chặn Lebesgue cùng với tích phân từng phần và định lí (1.2.4), định lí (1.2.6) cho ta

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(z) < \mathcal{L}\varphi(z)b, b > d\lambda(z) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(z) < \mathcal{L}\varphi(z)b, b > d\lambda(z) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \varphi(z) < \mathcal{L}\varphi(z)b, b > d\lambda(z) \geq 0\end{aligned}$$

Ngược lại, giả sử $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ và thỏa mãn (1.2.6). Đặt $v_\varepsilon = v * \chi_\varepsilon, \varepsilon > 0$. Từ định lí Fubini, $H_{v_\varepsilon}(z)(w, w) \geq 0$ và với mọi $z \in \Omega_\varepsilon$ và $w \in \mathbb{C}^n$. Định lí (1.2.6) kéo theo $v_\varepsilon \in \mathrm{PSH}(\Omega_\varepsilon)$ với mọi $\varepsilon > 0$
Mặt khác, bởi định lí Fubini và định lí (1.2.4), với $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ và $z \in \Omega_{\varepsilon_2}$ ta có

$$v_{\varepsilon_2} = \lim_{\delta \to 0}(v * \chi_{\varepsilon_2}) * \chi_\delta(z) = \lim_{\delta \to 0}(v * \chi_\delta) * \chi_{\varepsilon_2}(z)$$

$$\geq \lim_{\delta\to 0}(v*\chi_\delta)*\chi_{\varepsilon_1}(z) = \lim_{\delta\to 0}(v*\chi_{\varepsilon_1})*\chi_\delta(z) = v_{\varepsilon_1}(z)$$

Vậy họ $\{v_\varepsilon(z)\}_{\varepsilon>0}$ là dãy giảm. Đặt $u(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} v_\varepsilon(z)$. Khi đó u nửa liên tục trên trên ω và bởi định lí hội tụ đơn điệu và tính đa điều hòa dưới của v_ε trên Ω_ε kéo theo $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$. Mặt khác, từ định nghĩa tích chập và đẳng thức $\int_{\mathbb{C}^n} \chi_\varepsilon(w)d\lambda(w) = 1$ suy ra họ v_ε hội tụ tới v trong $L^1_{loc}(\Omega)$. Vậy v_ε hội tụ hầu khắp nơi tới v trên Ω. Do đó, $u = v$ hầu khắp nơi trên Ω. □

Dưới đây là một số kết quả liên quan tới tính đa điều hòa dưới khi qua giới hạn và tính lồi của họ các hàm đa điều hòa dưới.

Định lý 1.2.8. Giả sử Ω là tập mở trong $\mathbb{C}^n$.

(i) Nếu $u, v \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ thì $\max\{u, v\} \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ và nếu $\alpha, \beta \geq 0$ thì $\alpha u + \beta v \in \mathrm{PSH}(\Omega)$. Nghĩa là $\mathrm{PSH}(U)$ là nón lồi.

(ii) Nếu $\{u_j\}_{j\geq 1} \subset \mathrm{PSH}(\Omega)$ là dãy giảm thì $u = \lim u_j$ hoặc là hàm đa điều hòa dưới trên Ω hoặc $\equiv -\infty$.

(iii) Nếu dãy $\{u_j\} \subset \mathrm{PSH}(\Omega)$ là dãy hội tụ đều trên mọi tập compact của Ω tới hàm $u : \Omega \to \mathbb{R}$ thì $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$.

(iv) Giả sử $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \mathrm{PSH}(\Omega)$ sao cho $u = \sup\{u_\alpha : \alpha \in I\}$ là bị chặn trên địa phương. Khi đó chính quy hóa nửa liên tục trên $u^* \in \mathrm{PSH}(\Omega)$, với $u^*(\xi) := \lim_{\Omega\ni z\to\xi} \sup u(z)$ với mọi $\xi \in \overline{\Omega}$.

Chứng minh. Các khẳng định (i), (ii, iii) suy từ định nghĩa (1.2.1) và định lí hội tụ đơn điệu hay định lí qua giới hạn dưới dấu tích phân trong trường hợp dãy hội tụ đều.

Ta chứng minh (iv).

Chỉ cần chứng tỏ $a \in \Omega, b \in \mathbb{C}^n$ sao cho $\{a + \lambda b : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\} \subset \Omega$ thì

$$u^*(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^*(a + e^{i\theta}b)d\theta$$

Dễ thấy với mọi $z \in \Omega, b \in \mathbb{C}^n$ sao cho $\{z + \lambda b, |\lambda| \leq 1\} \subset \Omega$ ta có

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^*(z + e^{i\theta}b)d\theta$$

Với $a \in \Omega$, chọn dãy $\{z_n\} \subset \Omega$ sao cho $z_n \to a$ và $u(z_n) \to u^*(a)$. Từ $\{z + \lambda b, |\lambda| \leq 1\} \subset \Omega$ nên với n đủ lớn $\{z_n + \lambda b, |\lambda| \leq 1\} \subset \Omega$. Khi đó

$$u(z_n) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^*(z_n + e^{i\theta} b) d\theta$$

Bổ đề Fatou cho ta

$$u^*(a) = \limsup_n u(z_n) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \limsup_n u^*(z_n + e^{i\theta} b) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^*(a + e^{i\theta} b) d\theta$$

□

Sau đây là kết quả dán hai hàm đa điều hòa dưới tương tự như hàm điều hòa dưới.

Mệnh đề 1.2.9. Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là tập mở, $\omega \subset \Omega$ là tập con mở thực sự, khác rỗng của Ω. Giả sử $u \in \mathrm{PSH}(\Omega), v \in \mathrm{PSH}(\omega)$ và $\limsup_{x \to y} v(x) \leq u(y)$ với mọi $y \in \partial\omega \cap \Omega$. Khi đó hàm

$$w = \begin{cases} \max(u,\, v) & \text{trong } \omega, \\ u & \text{trong } \Omega \backslash \omega. \end{cases}$$

là hàm đa điều hòa dưới trên Ω.

Chứng minh. Rõ ràng w là nửa liên tục trên trên Ω. Chỉ cần chứng tỏ nếu $a \in \Omega, b \in \mathbb{C}^n$ sao cho $\{a + \lambda b, |\lambda| \leq r\} \subset \Omega$ thì

$$w(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(a + re^{i\theta} b) d\theta$$

Với $a \in \omega, b \in \mathbb{C}^n$, chọn $r > 0$ đủ bé để

$$\{a + \lambda b, |\lambda| \leq r\} \subset \omega$$

Khi đó

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta} b) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(a + re^{i\theta} b) d\theta$$

$$v(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(a + re^{i\theta} b) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(a + re^{i\theta} b) d\theta$$

Từ đó $w(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} w(a + re^{i\theta}b)d\theta$.

Chứng minh tương tự cho trường hợp $a \in \Omega \backslash \overline{\omega}_\Omega$, ở đó $\overline{\omega}_\Omega$ là bao đóng của ω lấy trong Ω. Chỉ cần xét trường hợp $a \in \overline{\omega}_\Omega \cap \Omega$. Khi đó $w(a) = u(a)$. Vậy

$$w(a) = u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}b)d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} w(a + re^{i\theta}b)d\theta$$

và mệnh đề được chứng minh. $\square$

Mệnh đề 1.2.10. Nếu $u, v \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ và $u = v$ (tương ứng $u \geq v$) hầu khắp nơi trên Ω thì $u = v$ (tương ứng $u \geq v$) trên Ω.

Định nghĩa 1.2.11. Tập $E \subset \mathbb{C}^n$ được gọi là tập đa cực nếu trên đó có hàm đa điều hòa dưới, không đồng nhất $-\infty$, nhận giá trị bằng $-\infty$ trên đó.

Hệ quả 1.2.12. Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là tập mở. Khi đó $\mathrm{PSH}(\Omega) \subset \mathrm{SH}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$. Từ đó tập

$$E = \{z \in \Omega : u(z) = -\infty\}$$

có độ đo Lebesgue bằng 0.

Chứng minh. Giả sử $u \in C^2(\Omega)$. Với $z \in \Omega$ và $w \in \mathbb{C}^n$ và giả sử $\{z + \lambda w, |\lambda| \leq r\} \subset \Omega$ với $r \geq 0$ đủ bé. Khi đó

$$\Delta u(z) = \Delta_\lambda(u(z + \lambda w))|_{\lambda=0} = 4 \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z) w_j \overline{w}_k \geq 0$$

Vậy $u \in \mathrm{SH}(\Omega)$. Trường hợp $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ tùy ý. Khi đó với mọi $z \in \Omega, u(z) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(z)$. Định lí (1.2.4) cho ta $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon) \cap \mathrm{PSH}(\Omega_\varepsilon)$ với mọi $\varepsilon > 0$. Do đó $u_\varepsilon \in \mathrm{SH}(\Omega_\varepsilon)$ và khi đó $u \in \mathrm{SH}(\Omega)$. $\square$

Mệnh đề 1.2.13. Giả sử $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^n$ và $\Omega_2 \subset \mathbb{C}^m$ là các tập mở và $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ là ánh xạ chỉnh hình. Giả sử $u \in \mathrm{PSH}(\Omega_2)$. Khi đó $u \circ f \in \mathrm{PSH}(\Omega_1)$.

Chứng minh. Chỉ cần xét trường hợp $u \in C^2(\Omega_2)$. Trường hợp tổng quát suy từ trường hợp này và định lí xấp xỉ (1.2.4). Với $z \in \Omega_1$ và $w \in \mathbb{C}^n$ dạng Levi của u tại z với vectơ w là

$$< (\mathcal{L}u)(z, w) >= \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z) w_j \overline{w}_k$$

Khi đó

$$< (\mathcal{L}(u \circ f))(z, w) >=< \mathcal{L}(u(f(z), f^{'}(z)(w))) \geq 0$$

do $u \in \mathrm{PSH}(\Omega_2) \cap C^2(\Omega_2)$. Vậy $u \circ f \in \mathrm{PSH}(\Omega_1)$. □

Tiếp theo ta đưa ra nguyên lí cực đại cho các hàm đa điều hòa dưới.

Mệnh đề 1.2.14. *(Nguyên lí cực đại)* Gả sử D là một miền trong $\mathbb{C}^n$ và $u \in \mathrm{PSH}(D), u \not\equiv const$. Khi đó u không đạt cực đại toàn thể trên D. Hơn nữa nếu D là bị chặn thì với mọi $z \in D$ ta có

$$u(z) < \sup_{w \in \partial D} \left\{ \lim_{D \ni z \to w} \sup u(z) \right\}.$$

Chứng minh. Giả sử $z_0 \in D$ sao cho $u(z_0) = \max\{u(z) : z \in D\}$. Đặt $D_0 = u^{-1}(u(z_0))$. Kho đó $\varnothing \neq D_0 \subset D$. Giả sử $a \in \overline{D_0} \cap D$. Khi đó

$$u(z_0) = \limsup_{D_0 \ni z \to a} u(z) \leq \limsup_{D \ni z \to a} u(z) = u(a) \leq u(z_0)$$

Vậy $a \in D_0$ và D_0 đóng trong D. Nếu $a \in D_0$, với mọi $b \in \mathbb{C}^n$, chọn $r > 0$ sao cho $\{a + \lambda b, |\lambda| \leq r\} \subset D$. Khi đó

$$u(z_0) = u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta} b) d\theta \leq u(z_0)$$

Từ đó, do tính nửa liên tục trên của u suy ra $u = u(z_0)$ trên một lân cận của a. Vậy D_0 là mở và do đó $D_0 = D$. Điều này kéo theo $u = u(z_0)$ trên D và mâu thuẫn với giả thiết. □

Hệ quả 1.2.15. Nếu u_1, u_2 là các hàm không âm trên tập mở $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ và $\log u_1, \log u_2 \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ thì $u_1 u_2 \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ và $\log(u_1 + u_2) \in \mathrm{PSH}(\Omega)$.

Chứng minh. Tính đa điều hòa dưới của $u_1.u_2$ suy ra từ $\log u_1 + \log u_2 \in \mathrm{PSH}(\Omega)$. Để chứng minh tính đa điều hòa dưới của $\log(u_1 + u_2)$, theo định nghĩa (1.2.1), ta có thể coi $\Omega \subset \mathbb{C}$. Giả sử $D \Subset \Omega$ và h là hàm điều hòa trên D, liên tục trên $\overline{D}$ sao cho

$$\log(u_1 + u_2)|_{\partial D} \leq h|_{\partial D}$$

Khi đó $e^{-h}(u_1 + u_2) \leq 1$ trên ∂D.
Từ $\log u_1, \log u_2$ là các hàm điều hòa dưới trên D nên $e^{-h} u_1$ và $e^{-h} u_2$ là điều hòa dưới trên D. Vậy $e^{-h}(u_1 + u_2)$ là điều hòa dưới trên D. Từ $e^{-h}(u_1 + u_2) \leq 1$ trên ∂D, do nguyên lí cực đại nên $e^{-h}(u_1 + u_2) \leq 1$ trên D và ta có điều phải chứng minh. □

Định lý 1.2.16. Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là miền bị chặn và $u, v \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ sao cho $\liminf\limits_{z \to \partial\Omega}(u(z) - v(z)) \geq 0$. Khi đó

$$\int\limits_{\{u<v\}} (dd^c v)^n \leq \int\limits_{\{u<v\}} (dd^c u)^n. \tag{1.6}$$

Chứng minh. Trước hết ta giải thích điều kiện

$$\liminf_{z \to \partial\Omega}(u(z) - v(z)) \geq 0$$

Nghĩa là, với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $K \Subset \Omega$ sao cho $\forall z \in \Omega \backslash K$ thì $u(z) - v(z) \geq -\varepsilon$. Hơn nữa khi thay u bởi $u + \delta, \delta > 0$, thì $\{u + \delta < v\} \uparrow \{u < v\}$ khi $\delta \downarrow 0$. Nếu bất đẳng thức (1.6) đúng trên $\{u + \delta < v\}$ thì cho $\delta \downarrow 0$ suy ra (1.6) đúng trên $\{u < v\}$. Vì vậy có thể giả sử $\liminf_{z \to \partial\Omega}(u(z) - v(z)) \geq \delta > 0$. Vậy $\{u < v\}$ compact tương đối trong Ω.

Ta đi chứng minh định lí.

Bước 1. Giả sử u, v là các hàm liên tục. Khi đó $\Omega' = \{u < v\}$ là tập mở, u, v liên tục trên $\partial\Omega'$ và $u = v$ trên $\partial\Omega'$. Với $\varepsilon > 0$, đặt $u_\varepsilon = \max\{u + \varepsilon, v\}$. Từ giả thiết $\liminf\limits_{z \to \partial\Omega}(u(z) - v(z)) \geq 0$ nên $u(z) - v(z) > \delta - \varepsilon$ hay $u(z) + \varepsilon \geq v(z) + \delta > v(z)$ với z gần biên $\partial\Omega$. Vậy $u_\varepsilon = u(z) + \varepsilon$ gần biên $\partial\Omega$ và $u_\varepsilon \downarrow v$ trên Ω'. Theo công thức Stokes

$$\int\limits_{\Omega'} (dd^c u_\varepsilon)^n = \int\limits_{\Omega'} (dd^c u)^n$$

hay

$$\int\limits_{\{u<v\}} (dd^c u_\varepsilon)^n = \int\limits_{\{u<v\}} (dd^c u)^n$$

do $u_\varepsilon \downarrow v$ nên $(dd^c u_\varepsilon)^n \to (dd^c v)^n$. Vậy

$$\int\limits_{\{u<v\}} (dd^c v)^n \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\{u<v\}} (dd^c u_\varepsilon)^n = \int\limits_{\{u<v\}} (dd^c u)^n.$$

Bước 2. Giả sử u, v tùy ý và ω là miền sao cho $\left\{u \leq v + \frac{\delta}{2}\right\} \Subset \omega \Subset \Omega$. Tồn tại hai dãy u_j, v_k các hàm đa điều hòa dưới trơn trên lân cận của $\overline{\omega}$ giảm tới u và v sao cho $u_j \geq v_k$ trên $\partial\omega$ với mọi j, k. Có thể coi $-1 \leq u_j, v_k \leq 0$. Lấy $\varepsilon > 0$ và giả sử $G \subset \Omega$ là tập mở sao cho $C_n(G, \Omega) < \varepsilon, u, v$ là các hàm liên tục trên $\Omega \backslash G$. Bởi định lí Tietze tồn tại hàm φ liên tục trên Ω

sao cho $v = \varphi$ trên $F = \Omega \backslash G$. Ta có

$$\int\limits_{\{u<v\}} (dd^c v)^n = \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\{u_j<v\}} (dd^c v)^n.$$

Nhưng $\{u_j < v\} \subset \{u_j < \varphi\} \cap G$ và vì $\{u_j < \varphi\}$ là tập mở nên

$$\int\limits_{\{u_j<v\}} (dd^c v)^n \leq \int\limits_{\{u_j<\varphi\}} (dd^c v)^n + \int\limits_{G} (dd^c v)^n \leq \liminf_{k\to\infty} \int\limits_{\{u_j<v\}} (dd^c v_k)^n + \varepsilon,$$

bởi $C_n(G, \Omega) < \varepsilon$ và $(dd^c v_k)^n$ hội tụ yếu tới $(dd^c v)^n$. Từ $\{u_j < \varphi\} \subset \{u_j < v\} \cup G$ và $\{u_j < v\} \subset \{u_j < v_k\}$ suy ra

$$\int\limits_{\{u_j<\varphi\}} (dd^c v_k)^n \leq \int\limits_{\{u_j<v\}} (dd^c v_k)^n + \int\limits_{G} (dd^c v_k)^n \leq \int\limits_{\{u_j<v_k\}} (dd^c v_k)^n + \varepsilon.$$

Ta áp dụng bước 1 vào các hàm liên tục u_j và v_k và thu được

$$\int\limits_{\{u_j<v_k\}} (dd^c v_k)^n \leq \int\limits_{\{u_j<v_k\}} (dd^c u_j)^n.$$

Do đó

$$\int\limits_{\{u<v\}} (dd^c v)^n \leq \liminf_{j\to\infty} \liminf_{k\to\infty} \int\limits_{\{u_j<v_j\}} (dd^c u_j)^n + 2\varepsilon$$

$$\leq \limsup_{j\to\infty} \int\limits_{\{u_j\leq v\}} (dd^c u_j)^n + 2\varepsilon.$$

Hơn nữa

$$\int\limits_{\{u_j\leq v\}} (dd^c u_j)^n \leq \int\limits_{\{u_j\leq v\}\cap F} (dd^c u_j)^n + \varepsilon.$$

và từ $\{u \leq v\} \cap F$ là tập compact và $\{u_j \leq v\} \subset \{u \leq v\}$ nên

$$\limsup_{j\to\infty} \int\limits_{\{u_j\leq v\}\cap F} (dd^c u_j)^n \leq \int\limits_{\{u\leq v\}\cap F} (dd^c u)^n \leq \int\limits_{\{u\leq v\}} (dd^c u)^n.$$

Do $\varepsilon > 0$ tùy ý nên ta đi đến

$$\int\limits_{\{u<v\}} (dd^c v)^n \leq \int\limits_{\{u\leq v\}} (dd^c u)^n$$

Từ đó với mọi $\eta > 0$ ta có

$$\int\limits_{\{u+\eta<v\}} (dd^c v)^n \leq \int\limits_{\{u+\eta\leq v\}} (dd^c (u+\eta))^n = \int\limits_{\{u+\eta\leq v\}} (dd^c u)^n.$$

Nhưng $\{u+\eta<v\}\uparrow\{u<v\}$ và $\{u+\eta\le v\}\uparrow\{u<v\}$ khi $\eta\uparrow 0$. Do đó

$$\int\limits_{\{u<v\}}(dd^cv)^n\le\int\limits_{\{u<v\}}(dd^cu)^n.$$

□

Hệ quả 1.2.17. (Nguyên lí so sánh) Giả sử $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ là miền bị chặn và $u,v\in\mathrm{PSH}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ sao cho $\liminf_{z\to\partial\Omega}(u(z)-v(z))\ge 0$. Hơn nữa giả sử $(dd^cu)^n\le(dd^cv)^n$ trên Ω. Khi đó, $v\le u$ trên Ω.

Chứng minh. Đặt $\psi(z)=||z||^2-M$, với M được chọn đủ lớn sao cho $\psi<0$ trên Ω. Giả sử $\{u<v\}$ khác rỗng. Khi đó có $\varepsilon>0$ sao cho $\{u<v+\varepsilon\psi\}$ khác rỗng và do đó nó có độ đo Lebesgue dương. Do Định lí (1.2.16) ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_{\{u<v+\varepsilon\psi\}}(dd^cu)^n&\ge\int\limits_{\{u<v+\varepsilon\psi\}}(dd^c(v+\varepsilon\psi))^n\\&\ge\int\limits_{\{u<v+\varepsilon\psi\}}(dd^cv)^n+\varepsilon^n\int\limits_{\{u<v+\varepsilon\psi\}}(dd^c\psi)^n\\&\ge\int\limits_{\{u<v+\varepsilon\psi\}}(dd^cv)^n+\varepsilon^n4^nn!\lambda_n(\{u<v+\varepsilon\psi\})\\&\ge\int\limits_{\{u<v+\varepsilon\psi\}}(dd^cv)^n\ge\int\limits_{\{u<v+\varepsilon\psi\}}(dd^cu)^n\end{aligned}$$

và ta gặp mâu thuẫn. □

Tiếp theo, chúng ta đề cập đến định nghĩa hàm đa điều hòa dưới cực đại.

Định nghĩa 1.2.18 ([1]). Giả $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ là tập mở và $u\in\mathrm{PSH}(\Omega)$. Ta nói u là hàm đa điều hòa dưới cực đại trên Ω và viết $u\in\mathrm{MPSH}(\Omega)$ nếu với mọi tập mở, compact tương đối $G\Subset\Omega$ và với mọi hàm v nửa liên tục trên trên $\overline{G}, v\in\mathrm{PSH}(G)$ và $v\le u$ trên ∂G thì $v\le u$ trên G.

Trường hợp $n=1$ thì tập $\mathrm{MPSH}(\Omega)$ trùng với tập các hàm điều hòa trên Ω.

Ví dụ 1.2.19. Hàm $u(z_1,z_2)=\log|z_1|$ là hàm đa điều hòa dưới cực đại trên $\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$.

Thật vậy, rõ ràng u là hàm đa điều hòa dưới trên $\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$. Ta chứng minh

u là cực đại trên $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$.

Giả sử $v \in \mathrm{PSH}(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}), G$ compact tương đối trong $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ và $v \leq u$ trên ∂G. Với mỗi $z \in G$, xét tập mở $A = \{t \in \mathbb{C} : tz \in G\}$ trên $\mathbb{C}$. Khi đó, hàm $v(tz)$ và $u(tz) = \log|t| + \log|z_1|$ là hàm đa điều hòa dưới và điều hòa trên A với mọi $z = (z_1; z_2)$. Từ định nghĩa hàm đa điều hòa dưới cực đại trong trường hợp $n = 1$ ta được u là hàm đa điều hòa dưới cực đại trên A. Hơn nữa $\partial A \subset \partial G$ nên $v(tz)|_{\partial A} \leq u(tz)|_{\partial A}$. Do tính cực đại của u trên A nên $v(tz)|_A \leq u(tz)|_A$. Vậy $v(z)|_G \leq u(z)|_G$, tức là u là hàm đa điều hòa dưới cực đại trên $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$.

Chương 2

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA HÀM ĐA ĐIỀU HÒA DƯỚI CỰC ĐẠI

2.1. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CƠ BẢN

Mệnh đề sau nói về cách nhận biết một hàm là đa điều hòa dưới cực đại.

Mệnh đề 2.1.1. Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là tập mở và $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương.

(i) Với mọi tập mở, compact tương đối $G \Subset \Omega$ và mọi hàm $v \in \mathrm{PSH}(G)$, nếu $\limsup\limits_{z\to\xi}(u(z) - v(z)) \geq 0$ với mọi $\xi \in \partial G$ thì $u \geq v$ trên G.

(ii) Nếu $v \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ và với $\varepsilon > 0$ tồn tại tập compact $K \subset \Omega$ sao cho $u - v \geq \varepsilon$ trên $\Omega \backslash K$ thì $u \geq v$ trên Ω.

(iii) Nếu $v \in \mathrm{PSH}(\Omega), G$ là tập mở, compact tương đối trong Ω và $u \geq v$ trên ∂G thì $u \geq v$ trên G.

(iv) Nếu $v \in \mathrm{PSH}(\Omega), G$ là tập mở, compact tương đối của Ω và với mỗi $\xi \in \partial G, \liminf\limits_{z\to\xi}(u(z) - v(z)) \geq 0$ thì $u \geq v$ trên G.

Chứng minh. $(i) \to (ii)$. Giả sử $v \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ thỏa mãn giả thiết của (ii) và giả sử $a \in \Omega$ sao cho $u(a) - v(a) = \eta < 0$. Đặt

$$E = \left\{z \in \Omega : u(z) < v(z) + \frac{\eta}{2}\right\}$$

Theo giả thiết có tập compact $K \subset \Omega$ sao cho với mọi $z \in \Omega\backslash K$ thì $u(z) \geq v(z) + \dfrac{\eta}{2}$. Vậy $E \subset K$ và do đó $\overline{E}$ là tập compact trong Ω. Tồn tại tập mở, compact tương đối $G \subset \Omega$ chứa $\overline{E}$. Trên ∂G

$$\liminf_{z\to\partial G}(u - (v + \frac{\eta}{2})) \geq 0$$

Bởi giả thiết (i), $u \geq v + \dfrac{\eta}{2}$ trên G và ta gặp mâu thuẫn vì $a \in E \subset G$ mà $u(a) = v(a) + \eta < v(a) + \dfrac{\eta}{2}$.

$(ii) \to (iii)$. Giả sử $v \in \mathrm{PSH}(\Omega), G$ là tập mở, compact tương đối trong Ω và $u \geq v$ trên ∂G. Đặt

$$\tilde{u}(z) = \begin{cases} \max(u(z),\, v(z)) & \text{nếu} \quad z \in G \\ u(z) & \text{nếu} \quad z \in \Omega \backslash G. \end{cases}$$

Mệnh đề (1.2.9) cho ta $\tilde{u} \in \mathrm{PSH}(\Omega)$. Với $\varepsilon > 0$, lấy $K = \overline{G}$ là tập compact trong Ω và với $z \in \Omega \backslash K, u(z) - \tilde{u}(z) = 0 > -\varepsilon$. Do đó từ giả thiết $u(z) \geq \tilde{u}(z)$ trên G.
$(iii) \to (iv)$. Giả sử $v \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ và $G \Subset \Omega$ sao cho

$$\liminf_{G \ni z \to \xi} (u(z) - v(z)) \geq 0$$

đúng cho mọi $\xi \in \partial G$. Khi đó $\limsup_{G \ni z \to \xi} v(z) \leq u(\xi)$. Đặt

$$\tilde{u}(z) = \begin{cases} \max(u(z),\, v(z)) & \text{nếu} \quad z \in G \\ u(z) & \text{nếu} \quad z \in \Omega \backslash G. \end{cases}$$

Khi đó từ mệnh đề (1.2.9), $\tilde{u} \in \mathrm{PSH}(\Omega)$. Dễ thấy trên ∂G thì $u = \tilde{u}$. Vậy $u \geq \tilde{u}$ trên Ω và do đó $u \geq v$ trên G.
$(iv) \to (v)$. Giả sử $G \subset \Omega$ là tập mở, compact tương đối và v là hàm nửa liên tục trên trên $\overline{G}$ và $v \leq u$ trên ∂G.
Bởi tính compact tương đối của G trong Ω, ta có thể coi u là liên tục trên $\overline{G}$ và $v \leq u$ trên ∂G. Thật vậy, nếu trái lại ta xét họ $u_\varepsilon = u * \chi_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon) \cap \mathrm{PSH}(\Omega_\varepsilon)$ với $\Omega_\varepsilon \supset \overline{G}$. Nếu ta chứng tỏ trên $G, v \leq u_\varepsilon$ thì $v \leq u$ trên G vì trên G ta có $\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon = u$. Từ giả thiết $v \leq u$ trên ∂G nên $\limsup_{G \ni x \to y} v(x) \leq u(y)$ với $y \in \partial G$. Do đó hàm

$$\tilde{u} = \begin{cases} \max(u,\, v) & \text{trên} \quad G \\ u & \text{trên} \quad \Omega \backslash G. \end{cases}$$

là đa điều hòa dưới trên Ω. Ta thấy $\liminf_{G \ni z \to \xi} (u - \tilde{u}) \geq 0$ với mọi $\xi \in \partial G$. Thật vậy nếu không có $\eta < 0$ và dãy $\{z_n\} \subset G, z_n \to \xi$ mà $u(z_n) - \tilde{u}(z_n) \leq \eta < 0$ với mọi n. Từ đó

$$u(z_n) \leq \tilde{u}(z_n) + \eta$$

Cho $n \to \infty$ ta có $u(\xi) \leq \max(u(\xi), v(\xi)) + \eta = u(\xi) + \eta < u(\xi)$ (mâu thuẫn). Vậy từ giả thiết $u \geq \tilde{u}$ trên G và chứng minh $(iv) \to (v)$ hoàn thành.

$(v) \to (i)$. Giả sử $G \Subset \Omega, v \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ và $\liminf\limits_{G \ni z \to \xi}(u-v)(z) \geq 0$ với mọi $\xi \in G$. Lại có thể coi u liên tục trên Ω. Khi đó xét

$$\tilde{v}(z) = \begin{cases} v(z) & \text{nếu} \quad z \in G \\ \limsup\limits_{G \ni t \to z} v(t) & \text{nếu} \quad z \in \partial G. \end{cases}$$

Khi đó $\tilde{v} \in \mathrm{PSH}(G)$ và nửa liên tục trên trên $\overline{G}$. Mặt khác từ $\liminf\limits_{G \ni z \to \xi}(u(z) - v(z)) \geq 0$ kéo theo $u(\xi) \geq \tilde{v}(\xi)$ tại mọi $\xi \in \partial G$. Từ đó suy ra $u \geq \tilde{u}$ trên G và vậy thì $u \geq v$ trên G. □

Để tiếp tục trình bày thêm những kết quả sâu hơn về hàm đa điều hòa dưới cực đại, ta đưa ra khái niệm sau.

Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là miền bị chặn và $f \in L^\infty(\partial\Omega)$. Ta kí hiệu $\mathcal{U}(\Omega, f)$ là lớp các hàm đa điều hòa dưới $v \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ sao cho $v^*|_{\partial\Omega} \leq f$, ở đó

$$v^*(z) = \limsup_{\Omega \ni w \to z} v(w)$$

với mọi $z \in \overline{\Omega}$. Với $z \in \Omega$, ta xác định

$$u(z) = u_{\Omega,f}(z) = \sup\left\{v(z) : v \in \mathcal{U}(\Omega, f)\right\}.$$

Hàm $u_{\Omega,f}$ gọi là bao Peron-Bremermann của f trong Ω.

Định lý 2.1.2. Giả sử Ω là miền bị chặn và $f \in C(\partial\Omega)$ sao cho $u^* = u_* = f$ trên $\partial\Omega$, ở đó $u = u_{\Omega,f}$. Khi đó $u = u_{\Omega,f}$ là hàm liên tục trong Ω.

Chứng minh. Từ $u^* = f$ trên $\partial\Omega$ nên $u^*_{\Omega,f} \in \mathcal{U}(\Omega, f)$. Vậy $u_{\Omega,f} = u^*_{\Omega,f}$ và do đó $u_{\Omega,f}$ là nửa liên tục trên trên Ω. Vậy chỉ cần chứng minh $u = u_{\Omega,f}$ là nửa liên tục dưới trên Ω. Cố định $z_0 \in \Omega$ và $\varepsilon > 0$. Do với mọi $w \in \partial\Omega$, $\liminf\limits_{z \to w} u(z) = \limsup\limits_{z \to w} u(z) = f(w)$ nên $\lim\limits_{z \to w} u(z) = f(w)$. Từ đó do $\partial\Omega$ là compact suy ra có $\delta > 0$ sao cho

$$\forall z \in \Omega, \forall w \in \partial\Omega, |z.w| \leq \delta \Rightarrow |u(z) - f(w)| < \varepsilon \tag{2.1}$$

Lấy $\overline{z} \in \Omega$ với $|\overline{z} - z_0| < \dfrac{\delta}{2}$ và đặt $\overline{\Omega} = \Omega - (z_0 - \overline{z})$. Xác định hàm

$$v(z) = \begin{cases} \max\left\{u(z),\, u(z + z_0 - \overline{z}) - 2\varepsilon\right\} & \text{nếu} \quad z \in \Omega \cap \overline{\Omega} \\ u(z) & \text{nếu} \quad z \in \Omega \backslash \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Dùng (2.1) ta chứng tỏ $v = u$ trên một lân cận của $\Omega \cap \partial\overline{\Omega}$ trong Ω và do đó hàm $v \in \mathrm{PSH}(\Omega)$. Nếu $z \in \Omega \backslash \overline{\Omega}$ thì rõ ràng $v(z) = u(z)$. Lấy $y \in \Omega \cap \partial\overline{\Omega}$ và xét $z \in \Omega \cap \partial\overline{\Omega}$ với $|z - y| < \dfrac{\delta}{2}$. Khi đó $|z - (y + z_0 - \overline{z})| < \delta$ và $y + z_0 - \overline{z} \in \partial\Omega$. Vậy theo (2.1)

$$|u(z) - f(y + z_0 - \overline{z})| < \varepsilon$$

hay $u(z) > f(y + z_0 - \overline{z}) - \varepsilon$. Mặt khác do $z + z_0 - \overline{z} \in \Omega$ và

$$|z + z_0 - \overline{z} - (y + z_0 - \overline{z})| = |z - y| < \frac{\delta}{2}$$

nên

$$u(z + z_0 - \overline{z}) < f(y + z_0 - \overline{z}) + \varepsilon$$

Từ đó

$$u(z) > u(z + z_0 - \overline{z}) - 2\varepsilon$$

Như vậy cho y thay đổi trên $\Omega \cap \overline{\Omega}$ ta được một lân cận của $\Omega \cap \overline{\Omega}$ trong Ω sao cho $u(z) > u(z + z_0 - \overline{z}) - 2\varepsilon$. Vậy $v = u$ trên lân cận đó. Hơn nữa nếu $z \in \Omega \cap \overline{\Omega}$ và $w \in \partial\Omega$ sao cho $|z - w| < \dfrac{\delta}{2}$ thì $|z + z_0 - \overline{z} - w| < \delta$ và lại từ (2.1) ta có

$$u(z + z_0 - \overline{z}) - 2\varepsilon \leq f(w) - \varepsilon \leq u(z).$$

Do đó $v(z) \leq u(z)$ nếu $d(z, \partial\Omega) \leq \dfrac{\delta}{2}$ thì $|z + z_0 - \overline{z} - w| < \delta$ và lại từ (2.1) ta có

$$u(z + z_0 - \overline{z}) - 2\varepsilon < f(w) - \varepsilon \leq u(z.)$$

Do đó $v(z) \leq u(z)$ nếu $d(z, \partial\Omega)) \leq \dfrac{\delta}{2}$ và như vậy $v \leq u$ trên Ω. Ta có

$$u(\overline{z}) \geq v(\overline{z}) \geq u(z_0) - 2\varepsilon.$$

Như vậy u nửa liên tục dưới trên Ω và định lí được chứng minh. □

Tiếp theo ta có một số kết quả sau

Mệnh đề 2.1.3. Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$.

(i) Giới hạn của dãy giảm các hàm đa điều hòa dưới cực đại trong Ω hoặc bằng $-\infty$ hoặc là hàm đa điều hòa dưới cực đại trong Ω.

(ii) Nếu $u \in \mathrm{MPSH}(\Omega)$ thì với mọi $G \Subset \Omega$ tồn tại một dãy các hàm đa điều hòa dưới cực đại trong G hội tụ giảm tới u trên G.

Chứng minh. (i) Giả sử $\{u_j\} \subset \mathrm{MPSH}(\Omega)$ và $u_j \downarrow u$ trên Ω. Giả sử $u \not\equiv -\infty$ trên Ω. Lấy $G \Subset \Omega$ là tập mở, compact tương đối trong Ω. Giả sử v là hàm nửa liên tục trên $\overline{G}$ và $v \in \mathrm{PSH}(G), v \leq u$ trên $\partial\Omega$. Khi đó $v \leq u_j$ trên ∂G và do đó $v \leq u$ trên G.
(ii) Do $G \Subset \Omega$ nên có thể chọn dãy hàm đa điều hòa dưới liên tục v_j trên một lân cận của $\overline{G}$ giảm tới u. Đặt $u_j = u_{G.v_j|\partial G}$. Khi đó bởi Định lí (2.1.2), $\{u_j\}$ là dãy giảm các hàm đa điều hòa dưới liên tục trên $\overline{G}$ và sử dụng định lí dán có thể chứng minh chúng cực đại trên G. Từ (i) suy ra $u_j \downarrow u$ □

Định lý 2.1.4. Giới hạn của dãy các hàm đa điều hòa dưới cực đại bị chặn địa phương hội tụ hầu khắp nơi tới hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương là hàm đa điều hòa dưới cực đại.

Chứng minh. Để chứng minh định lí này ta chứng minh bổ đề sau

Bổ đề 2.1.5. Giả sử $u_0^j, u_1^j, ..., u_p^j \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega), 0 \leq p \leq n, j = 1, 2, ...$ là dãy đơn điệu (tăng hoặc giảm) hội tụ hầu khắp nơi (tương ứng hội tụ theo độ đo Lebesgue) tới $u_1, ..., u_p \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$. Khi đó

$$u_0^j dd^c u_1^j \wedge ... \wedge dd^c u_p^j \to u_0 dd^c u_1 \wedge .... \wedge dd^c u_p.$$

Chứng minh. Vì bài toán là địa phương nên có thể coi $\Omega = \mathbb{B} = \mathbb{B}(z_0, r), r > 0$ và các hàm được xét cùng lớn hơn $A\psi$ và bằng $A\psi$ trong một lân cận của $\partial\mathbb{B}$, ở đây $A > 0, \psi(z) = ||z - z_0||^2 - r^2$. Chứng minh quy nạp theo p. Rõ ràng định lí đúng với $p = 0$. Giả sử $p \geq 1$ và định lí đúng đến $p - 1$. Khi đó đặt

$$S^j = dd^c u_1^j \wedge ... \wedge dd^c u_p^j, S = dd^c u_1 \wedge ... \wedge dd^c u_p.$$

thì $S^j \to S$ theo nghĩa dòng. Thật vậy, giả sử $\eta \in \mathcal{D}^{(n-p,n-p)}(\Omega)$. Khi đó

$$\int\limits_\Omega \eta S^j = \int\limits_\Omega \eta dd^c u_1^j \wedge ... \wedge dd^c u_p^j = \int\limits_\Omega u_p^j dd^c u_1^j \wedge ... \wedge dd^c u_{p-1}^j \wedge dd^c \eta$$

theo giả thiết vế phải hội tụ tới

$$\int\limits_\Omega u_p dd^c u_1^j \wedge ... \wedge dd^c u_{p-1}^j \wedge dd^c \eta = \int\limits_\Omega \eta S.$$

Bây giờ chỉ cần chứng minh nếu $u_0^j S^j \to \Theta$ thì $\Theta = u_0 S$. Nếu $\left\{u_0^j\right\}$ là dãy giảm thì ta có $\Theta \leq u_0 S$. Giả sử $\left\{u_0^j\right\}$ là dãy tăng. Khi đó $u_0^j S^j \leq u_0 S^j$ và do mọi giới hạn yếu của $u_0 S^j$ đều nhỏ hơn hoặc bằng $u_0 S$. Như vậy trong mọi trường hợp $\Theta \leq u_0 S$. Do đó chỉ cần chứng tỏ

$$\int\limits_{\mathbb{B}} (\Theta - u_0 S) \wedge \beta^{n-p} \geq 0.$$

Nghĩa là

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{B}} u_0^j S^j \wedge \beta^{n-p} \geq \int\limits_{\mathbb{B}} u_0 S \wedge \beta^{n-p} \tag{2.2}$$

Dùng tính tựa liên tục của hàm đa điều hòa dưới ta chứng minh mọi hàm đa điều hòa dưới bị chặn u trong $\mathbb{B}$, bằng $A\psi$ trong lân cận của $\partial\mathbb{B}$ ta có

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{B}} u S^j \wedge \beta^{n-p} \geq \int\limits_{\mathbb{B}} u S \wedge \beta^{n-p} \tag{2.3}$$

Giả sử (2.3) đúng, ta chứng minh (2.2) đúng và do đó định lí được chứng minh. Thật vậy, nếu $u_0^j \downarrow u_0$, từ (2.3) đúng suy ra

$$\int\limits_{\mathbb{B}} u_0^j S^j \wedge \beta^{n-p} \geq \int\limits_{\mathbb{B}} u_0 S^j \wedge \beta^{n-p}$$

Do đó

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{B}} u_0^j S^j \wedge \beta^{n-p} \geq \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{B}} u_0 S^j \wedge \beta^{n-p} = \int\limits_{\mathbb{B}} u_0 S \wedge \beta^{n-p}.$$

Giả sử $u_0^j \uparrow u_0$. Khi đó với mọi k ta có

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{B}} u_0^j S^j \wedge \beta^{n-p} &\geq \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{B}} u_0^k S^j \wedge \beta^{n-p} = \int\limits_{\mathbb{B}} u_0^k S \wedge \beta^{n-p} \\ &= \int\limits_{\mathbb{B}} u_1 dd^c u_0^k \wedge dd^c u_2 \wedge ... \wedge dd^c u_p \wedge \beta^{n-p}.\end{aligned}$$

Bởi giả thiết quy nạp

$$dd^c u_0^k \wedge dd^c u_1 \wedge ... \wedge dd^c u_p \to dd^c u_0 \wedge dd^c u_1 \wedge ... \wedge dd^c u_p$$

yếu khi $k \to \infty$. Vậy theo (2.3)

$$\begin{aligned}&\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{B}} u_1 dd^c u_0^k \wedge dd^c u_2 \wedge ... \wedge dd^c u_p \wedge \beta^{n-p} \\ &= \int\limits_{\mathbb{B}} u_1 dd^c u_0 \wedge dd^c u_2 \wedge ... \wedge dd^c u_p \wedge \beta^{n-p} = \int\limits_{\mathbb{B}} u_0 S \wedge \beta^{n-p}.\end{aligned}$$

Do đó (2.2) đúng.

Vậy chỉ cần chứng minh (2.3) đúng. Do tính tựa liên tục nên với $\varepsilon > 0$, tồn tại $G \Subset \mathbb{B}, G$ mở sao cho u liên tục trên $F = \overline{\mathbb{B}} \backslash G$ và $C_n(G, \mathbb{B}) < \varepsilon$, kí hiệu $\mu_j = S^j \wedge \beta^{n-p}$ và $\mu = S \wedge \beta^{n-p}$. Viết

$$\int_{\mathbb{B}} (ud\mu_j - ud\mu) = \int_G (ud\mu_j - ud\mu) + \int_F (ud\mu_j - ud\mu).$$

Nhưng $\mu \leq (dd^c(u_1 + u_2 + ... + u_p + (n-1)\beta))^n$ và

$$\left| \int_G (ud\mu_j - ud\mu) \right| \leq C_1 \varepsilon,$$

ở đó C_1 không phụ thuộc vào j và ε (do tính bị chặn của dãy $\left\{ u_0^j, ..., u_p^j, u_0, ..., u_p \right\}$ và $C_n(G, \mathbb{B}) < \varepsilon$).

Giả sử ϕ là hàm liên tục trên $\mathbb{B}, \varphi = u$ trên F và $-A \leq \varphi \leq 0$ trên $\mathbb{B}$. Khi đó từ $u = \varphi = 0$ trên $\partial \mathbb{B}$,

$$\begin{aligned} - \int_F ud\mu = - \int_F \varphi d\mu &\geq \limsup_{j \to \infty} \left(- \int_F \varphi d\mu_j \right) \\ = - \liminf_{j \to \infty} \int_F \varphi d\mu_j &= - \liminf_{j \to \infty} \int_F ud\mu_j. \end{aligned}$$

Mặt khác do $d\mu_j \to d\mu$ yếu nên

$$- \int_F ud\mu \leq - \int_{\mathbb{B}} \varphi d\mu = - \lim_{j \to \infty} \int_F \varphi d\mu_j$$

và

$$- \int_F \varphi d\mu_j = - \int_G \varphi d\mu_j \leq - \int_F ud\mu_j + C_2 \varepsilon$$

với $C_2 > 0$ không phụ thuộc vào j và ε. Điều này suy ra từ giả thiết $C_n(G, \mathbb{B}) < \varepsilon$ và $d\mu_j \leq (dd^c(u_1 + ... + u_p + (n-1)\beta))^n$. Từ đó

$$0 \leq \liminf_{j \to \infty} \left| \int_{\mathbb{B}} (ud\mu_j - ud\mu) \right| \leq \limsup_{j \to \infty} \left| \int_{\mathbb{B}} (ud\mu_j - ud\mu) \right| \leq (C_1 + C_2)\varepsilon.$$

và (2.3) được chứng minh. $\square$

Ta chứng minh định lí (2.1.4)

Giả sử $\{u_j\} \subset \mathrm{MPSH}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega), u_j \uparrow u \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$. Chỉ cần chứng minh với mọi tập compact $K \subset \Omega, (dd^c u)^n(K) = 0$. Do đó có thể phủ K bởi hữu hạn các hình cầu nên ta chỉ cần chứng minh với mọi hình cầu mở $\mathbb{B} \subset \Omega, (dd^c u)^n = 0$. từ định lý (2.1.4) thì $(dd^c u_j)^n \to (dd^c u)^n$ yếu. Do đó

$$\int\limits_{\mathbb{B}} (dd^c u)^n \leq \liminf_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{B}} (dd^c u_j)^n = 0,$$

và định lý (2.1.4) được chứng minh. □

Kết quả sau đây cho thấy mỗi hàm đa điều hòa dưới trên một miền đều có hàm đa điều hòa dưới cực đại trội hơn trên mỗi miền nhỏ hơn compact tương đối trong nó.

Mệnh đề 2.1.6. Giả sử Ω là miền trong $\mathbb{C}^n$ và $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$. Giả sử $G \Subset \Omega$ là một miền chính quy (như một miền trong $\mathbb{R}^{2n}$ mà trên đó bài toán Dirichlet cho lớp hàm điều hòa có lời giải). Khi đó tồn tại $\widehat{u} \in \mathrm{PSH}(\Omega), \widehat{u} \geq u$ và $\widehat{u} = u$ trên $\Omega \backslash G, \widehat{u}$ cực đại trên G. Nếu $u_j \downarrow u$ thì $\widehat{u}_j \downarrow \widehat{u}$ và nếu u liên tục thì $\widehat{u}$ cũng liên tục.

Chứng minh. Xét $u|_{\partial G}$. Khi đó có dãy hàm liên tục $\{f_j\} \subset C(\partial\Omega)$ và $f_j \downarrow u|_{\partial G}$ trên ∂G. Giả sử $u_j = u_{G,f_j}$. Khi đó từ G là chính quy nên $u^*|_{\partial G} \leq f_j$ và do đó $u_j^* = u_j$ trên G. Vậy $u \in \mathrm{PSH}(G)$. Hơn nữa dùng định lí dán dễ thấy nó cực đại trên G. Mặt khác từ $f_{j+1} \leq f_j$ và $u_{j+1}^*|_{\partial G} \leq f_{j+1} \leq f_j/$ suy ra $u_{j+1}^* \leq u_j$ trên G. Đồng thời $u|_{\partial G} \leq f_j$ với mọi j nên $u \leq u_j$ trên G với mọi j. Đặt $v = \lim\limits_{j\to\infty} u_j$ thì bởi (i) của mệnh đề (2.1.3), $v \in \mathrm{PSH}(G)$ và $u \leq v$ trên G. Hơn nữa với mọi $j, v \leq u_j$ nên $\limsup\limits_{z\to\partial G} v(z) \leq u_j^* \leq f_j$ với mọi j. Vậy $\limsup\limits_{z\to\partial G} v(z) \leq u|_{\partial G}$.

Đặt

$$\widehat{u}(z) = \begin{cases} \max(u(z),\, v(z)) & \text{nếu} \quad z \in G \\ u(z) & \text{nếu} \quad z \in \Omega\backslash G. \end{cases}$$

Hàm $\widehat{u}$ thỏa mãn các kết luận của mệnh đề (2.1.6). □

Bây giờ ta chuyển qua mô tả tính cực đại của một hàm đa điều hòa dưới khi nó lớp C^2 trên miền đã cho.

Mệnh đề 2.1.7. Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là tập mở và $u \in C^2(\Omega)$. Nếu $u \in \mathrm{MPSH}(\Omega)$ thì

$$\det\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\right] \equiv 0$$

trên Ω

Chứng minh. Giả sử $\det\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\right] \not\equiv 0$. Khi đó tồn tại $a \in \Omega$ sao cho với mọi $b \in (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})$, ta có dạng Levi $< \mathcal{L}u(z)b, b >> 0$.
Từ tính liên tục của đạo hàm bậc hai tại a nên ta có $r > 0$ sao cho với mọi $z \in \overline{B}(a, r)$ và $b \in (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})$

$$< \mathcal{L}u(z)b, b >> c||b||^2.$$

Đặt

$$v(z) = \begin{cases} u(z) & \text{nếu} \quad z \in \Omega \setminus \overline{B}(a, r) \\ u(z) + c(r^2 - ||z - a||^2) & \text{nếu} \quad z \in \overline{B}(a, r). \end{cases}$$

Hàm $v \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ và $v|_{\partial B(a,r)} = u|_{\partial B(a,r)}$. Vậy do tính cực đại của u kéo theo

$$v|_{B(a,r)} \leq u|_{B(a,r)}$$

Như vậy $v(a) = u(a) + cr^2 \leq u(a)$ và ta gặp mâu thuẫn. □

Mệnh đề 2.1.8. Giả sử Ω là tập mở, bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và u, v là các hàm đa điều hòa dưới lớp C^2 trong lân cận của $\overline{\Omega}$. Nếu $v \leq u$ trên $\partial\Omega$ và

$$\det\left[\frac{\partial^2 v}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z)\right] \geq \det\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z)\right]$$

trên Ω thì $v \leq u$ trong Ω.

Chứng minh. Với $\varepsilon > 0$ đã cho ta đặt

$$v_\varepsilon(z) = v(z) + \varepsilon(||z||^2 - \sup_{w \in \partial\Omega} ||w||^2)$$

Khi đó

$$\begin{aligned} 0 &< \det\left[\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z)\right] - \det\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z)\right] \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \det\left[\frac{\partial^2 (tv_\varepsilon + (1-t)u)}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z)\right] dt \\ &= \int_0^1 \Big(\sum_{j,k=1}^n A^{jk}(t) \frac{\partial^2 (v_\varepsilon - u)}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z)\Big) dt \\ &= \sum_{j,k=1}^n B^{jk} \frac{\partial^2 (v_\varepsilon - u)}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z) \end{aligned}$$

ở đó $\left[A^{jk}(t)\right]$ là phần phụ đại số của phần tử $\left[\dfrac{\partial^2(tv_\varepsilon+(1-t)u)}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}\right]$ trong ma trận $\left[\dfrac{\partial^2(tv_\varepsilon+(1-t)u)}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}\right]_{j,k=1,\dots,n}$ và $B(t)$ là tích phân theo t của nó trên $[0,1]$. Vậy từ bất đẳng thức trên, ma trận $\left[B^{jk}\right]$ xác định dương và vậy thì $v_\varepsilon - u$ không có cực đại địa phương trong Ω. Vậy $v_\varepsilon \leq u$ trong Ω và cho $\varepsilon \to 0$ ta được điều phải chứng minh. □

2.2. MỘT SỐ TÍNH CHẤT MỞ RỘNG

Giả sử $\Omega \in \mathbb{C}^n$ là tập mở và $f:\Omega\to\mathbb{C}$ khả vi tại $a\in\Omega$. Khi đó, đạo hàm $d_af = \partial_a f + \overline{\partial}_a f$.

Ta có

$$\begin{aligned}
&dx_j(z_1,....,z_n) = \mathrm{Re}z_j, \qquad dy_j(z_1,....,z_n) = \mathrm{Im}z_j,\\
&dz_j = dx_j + dy_j, \qquad d\overline{z}_j = dx_j - idy_j,\\
&\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right),\\
&\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right),
\end{aligned}$$

Từ đó ta có công thức

$$\begin{aligned}
d_af &= \sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j}dy_j\right);\\
\partial_af &= \sum_{j=1}^n\frac{\partial f}{\partial z_j}dz_j;\\
\overline{\partial}_af &= \sum_{j=1}^n\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}d\overline{z}_j.
\end{aligned}$$

Đặt

$$d = \partial + \overline{\partial}, d^c = i(\overline{\partial} - \partial)$$

Khi đó $dd^c = 2i\partial\overline{\partial}$.

Nếu $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là tập mở và $u \in C^2(\Omega)$ thì

$$dd^cu = 2i\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}dz_j\wedge d\overline{z}_k$$

Toán tử Monge - Ampère phức của u cho bởi

$$(dd^c u)^n = dd^c u \wedge ... \wedge dd^c u$$

Khi đó

$$(dd^c u)^n = 4^n n! \det \left[\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} \right] dV$$

ở đó $dV = \frac{i}{2} dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \frac{i}{2} dz_2 \wedge d\overline{z}_2 \wedge ... \wedge \frac{i}{2} dz_n \wedge d\overline{z}_n$ là dạng thể tích trong $\mathbb{C}^n$.

Định lý 2.2.1. Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là tập mở và $u \in C^2(\Omega) \cap \mathrm{PSH}(\Omega)$. Khi đó $u \in \mathrm{MPSH}(\Omega)$ khi và chỉ khi $(dd^c u)^n = 0$.

Chứng minh. Điều kiện cần suy ra từ mệnh đề (2.1.7).
Điều kiện đủ. Giả sử $(dd^c u)^n = 0$, nghĩa là

$$\det \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} \right] = 0$$

trên Ω. Ta chứng minh $u \in \mathrm{MPSH}(\Omega)$. Giả sử G là tập mở, compact tương đối trong Ω và $v \in \mathrm{PSH}(\Omega), v \leq u$ trên ∂G. Với $\delta > 0$ và $\varepsilon > 0$ đủ bé, xét $(v - \delta) * \chi_\varepsilon$. Khi đó $(v - \delta) * \chi_\varepsilon$ là hàm lớp C^∞ trên lân cận của $\overline{G}$ và $(v - \delta) * \chi_\varepsilon|_{\partial G} \leq u|_{\partial G}$. Hơn nữa $(v - \delta) * \chi_\varepsilon$ là hàm đa điều hòa dưới trên lân cận của ∂G. Từ đó

$$\det \left[\frac{\partial^2 (v - \delta) * \chi_\varepsilon}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} \right] \geq 0 = \det \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} \right]$$

trên G. Vậy theo mệnh đề (2.1.8) trên G

$$(v - \delta) * \chi_\varepsilon \leq u$$

cho $\delta, \varepsilon \to 0$ ta nhận được $v \leq u$ trên G, tức là $u \in \mathrm{MPSH}(\Omega)$ và mệnh đề được chứng minh. □

Sau đây là ví dụ minh họa cho kết quả của Định lí (2.2.1)

Ví dụ 2.2.2. Trên $\Omega = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, xét hàm $u(z_1, z_2) = \ln |z_1|, z = (z_1, z_2) \in \Omega = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Khi đó, rõ ràng u là hàm đa điều hòa dưới trên $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Ta có thể tính trực tiếp để thu được .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_1 \partial \overline{z}_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z_2 \partial \overline{z}_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial z_2 \partial \overline{z}_2}$$

Điều này suy ra det $\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\right] = 0$. Vì vậy $(dd^c u)^2 = 0$ và do đó u là hàm đa điều hòa dưới cực đại trên $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ (theo Định lí (2.2.1)).

Sau đây ta xét trường hợp tổng quát hơn khi u là hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương trên Ω .

Bổ đề 2.2.3. Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Giả sử u là một hàm đa điều hòa dưới trong một lân cận của $\overline{\Omega}$ sao cho với một hằng số dương K và h đủ nhỏ thoả mãn đánh giá

$$u(z+h) + u(z-h) - 2u(z) \leq K|h|^2, \quad z \in \Omega$$

Khi đó, u là $C^{1,1}$ trong Ω và $|D^2 u| \leq K$.

Chứng minh. Đặt $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$ là chính quy hóa của u (ở đây, $\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\rho(\dfrac{x}{\varepsilon})$ với $\rho \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ sao cho $\rho \geq 0, \mathrm{supp}\rho = \overline{B}(0;1), \int \rho d\lambda = 1$ và ρ chỉ phụ thuộc vào $|x|$). Với $z \in \Omega_\varepsilon := \{z \in \Omega : \mathrm{dist}(z, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ và h đủ nhỏ ta có

$$u_\varepsilon(z+h) + u_\varepsilon(z-h) - 2u_\varepsilon(z) \leq K|h|^2$$

Điều này chỉ ra

$$D^2 u_\varepsilon . h^2 \leq K|h|^2 \tag{2.4}$$

Ta có

$$D^2 u_\varepsilon . h^2 = \sum_{j,k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial z_j \partial z_k} h_j h_k + 2\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} h_j \overline{h}_k + \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial \overline{z}_j \partial z_k} \overline{h}_j h_k \right)$$

và do u_ε là đa điều hòa dưới,

$$D^2 u_\varepsilon . h^2 + D^2 u_\varepsilon .(ih)^2 = 4 \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} h_j \overline{h}_k \geq 0$$

Do đó từ (2.4)

$$D^2 u_\varepsilon . h^2 \geq -D^2 u_\varepsilon .(ih)^2 \geq -K|h|^2.$$

Từ đó $D^2 u_\varepsilon \leq K$ trên Ω_ε và bổ đề được suy ra từ Định lí 1.1.13 ([4], tr.12). □

Bổ đề 2.2.4. Cho P là một đa đĩa và giả sử $f \in C^{1,1}(\partial P)$ (nghĩa là $f \in C^{1,1}$ trong một lân cận của ∂P sao cho f là nghiệm của bài toán Dirichlet thuần nhất trên P. Khi đó, $u_{P,f} \in C^{1,1}(P)$.

Chứng minh. Từ Mệnh đề 1.4.4 ([4], tr.29) ta có $u := u_{P,f} \in \mathrm{PSH}(P) \cap C(\overline{P})$. Ta giả sử $P = (\Delta(0,1))^n$ là đa đĩa đơn vị. Lấy $r < 1$ và đặt $P_r = (\Delta(0,1))^n$. Với $z \in \overline{P}, a \in P$ và h đủ nhỏ đặt

$$\begin{aligned} &T_{a,h}(z) = T(a,h,z) \\ =&\left(\frac{h_1 + (1 - |a_1|^2 - \overline{a_1}h_1)z_1}{1 - |a_1|^2 - a_1\overline{h_1} + \overline{h_1}z_1}, ..., \frac{h_n + (1 - |a_n|^2 - \overline{a_n}h_n)z_n}{1 - |a_n|^2 - a_n\overline{h_n} + \overline{h_n}z_n} \right\} \end{aligned}$$

Khi đó, T khả vi mọi cấp trong một lân cận của tập $\overline{P}_r \times \overline{P}_{\frac{1-r}{2}} \times \overline{P}$ và $T_{a,h}$ là một tự đẳng cấu chỉnh hình của P sao cho $T_{a,h}(a) = a + h$ và $T_{a,0}(z) = z$. Đặt

$$V(a,h,z) := u(T_{a,h}(z))$$

và

$$v_{a,h}(z) := \frac{1}{2}\left[V(a,h,z) + V(a,-h,z)\right].$$

$v_{a,h}(z) \in \mathrm{PSH}(P) \cap C(\overline{P})$ và chúng ta thừa nhận rằng với K đủ lớn ta có $v_{a,h} - K|h|^2 \leq u$ với mọi $a \in P_r$ và $h \in P_{\frac{1-r}{2}}$. Từ đó, $v_{a,h} - K|h|^2 \leq f$ trên ∂P và vì cả hai hàm đều liên tục nên ta có bất đẳng thức này trên

$$R := \bigcup_{j=1}^{n} \Delta^{j-1} \times \partial\Delta \times \Delta^{n-j}.$$

Nhưng điều này được suy ra từ Mệnh đề A1.5 ([4], tr.83), bởi vậy V là $C^{1,1}$ trên $P_r \times P_{\frac{1-r}{2}} \times P$ và $|D^2V| \leq K$, ở đây K chỉ phụ thuộc vào n, r và $\sup|D^2 f|$. Do đó, thay $z = a$ ta được

$$u(a+h) + u(a-h) - 2u(a) \leq K|h|^2$$

với $a \in P_r$ và $h \in P_{\frac{1-r}{2}}$. Từ Bổ đề (2.2.3) ta có điều phải chứng minh. □

Định lý 2.2.5. Giả sử $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ là tập mở và u là hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương trên Ω. Khi đó, $u \in \mathrm{MPSH}(\Omega)$ khi và chỉ khi $(dd^c u)^n = 0$.

Chứng minh. Điều kiện cần. Giả sử u là hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương trên Ω và $u \in \mathrm{MPSH}(\Omega)$. Ta cần chứng minh $(dd^c u)^n = 0$.
Không mất tổng quát, giả sử u là hàm đa điều hòa dưới cực đại trong lân cận của đa đĩa P . Lấy $u_j \in C^{1,1}(\partial P)$ là dãy giảm tới u trên ∂P, khi đó theo Mệnh đề (2.1.3) thì $u_{f_j,P} \downarrow u$ trên $\overline{P}$. Do đó, theo (2.2.4) ở trên ta giả sử $u \in C^{1,1}$ trong P. Khi đó, u khả vi cấp 2 hầu khắp nơi theo nghĩa

cổ điển nên ta có $(dd^c u)^n = 4^n n! \det\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\right] dV$. Lấy $z_0 \in P$ sao cho $D^2 u(z_0)$ tồn tại và giả sử $\det\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\right] > 0$. Từ khai triển Taylor cho ta

$$u(z_0+h) = \mathrm{Re}P(h) + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z_0) h_j \overline{h}_k + o(|h|^2) \geq \mathrm{Re}P(h) + c|h|^2 + o(|h|^2),$$

ở đây

$$P(h) = u(z_0) + 2\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial z_j}(z_0) h_j + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial z_k}(z_0) h_j h_k,$$

và $c > 0$. Ta tìm được $r > 0$ sao cho $u(z_0 + h) > \mathrm{Re}P(h)$ nếu $|h| = r$ nhưng $u(z_0) = \mathrm{Re}P(0)$, mâu thuẫn với tính cực đại của u. Suy ra

$$\det\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\right] = 0.$$

Do đó, $(dd^c u)^n = 0$.

Điều kiện đủ. Giả sử u là hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương trên Ω và $(dd^c u)^n = 0$. Ta cần chứng minh $u \in \mathrm{MPSH}(\Omega)$.

Thật vậy, giả sử G là tập mở, compact tương đối trong Ω và $v \in \mathrm{PSH}(G)$, $v \leq u$ trên ∂G. Khi đó,

$$0 = (dd^c u)^n \leq (dd^c v)^n.$$

Theo nguyên lý so sánh (Hệ quả (1.2.17)), ta có $v \leq u$ trên G. Vì vậy u là hàm đa điều hòa dưới cực đại trên Ω. □

Sau đây là ví dụ minh họa cho kết quả của Định lí (2.2.5)

Ví dụ 2.2.6. Trên $\Omega = \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$, xét hàm

$$u(z_1, z_2, z_3) = \log(\max(|z_1|, |z_2|, |z_3|)),$$

với $z = (z_1, z_2, z_3) \in \Omega = \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$.

Khi đó, u không khả vi trên $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$, $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ vì với $z \in \Omega$, lấy hình cầu $B(a, r)$ bán kính r đủ nhỏ là lân cận của z thì $\sup(\max(|z_1|, |z_2|, |z_3|))$ hữu hạn. Rõ ràng u là hàm đa điều hòa dưới trên $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$. Ta chứng minh u là cực đại trên $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$.

Thật vậy, lấy $v \in \mathrm{PSH}(\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}), G$ compact tương đối trong $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ và $u \geq v$ trên $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$. Với $z \in G$ đặt $A = \{t \in \mathbb{C} : tz \in G\}$ trên $\mathbb{C}$. Khi

đó hàm $v(tz)$ và $u(tz) = \log|t| + \log(\max(|z_1|, |z_2|, |z_3|))$ là hàm điều hòa dưới và điều hòa trên A với mọi $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$, tức là $u(tz)$ là hàm đa điều hòa dưới cực đại trên A. Mặt khác $\partial A \subset \partial G$ nên $v(tz) \le u(tz)|_{\partial A}$, từ tính cực đại của $u(tz)$ trên A ta có $v(tz) \le u(tz)|_A$. Suy ra $v(z) \le u(z)|_G$.
Theo Định lí (2.2.5) ta có $(dd^c u)^3 = 0$, đây là một kết quả rất tốt vì việc tính $(dd^c u)^3 = 0$ trong trường hợp này khá phức tạp.

KẾT LUẬN - KIẾN NGHỊ

Kết quả đã đạt được:

- Trình bày được một số tính chất cơ bản của hàm đa điều hòa dưới cực đại.

- Trình bày được 2 tính chất mở rộng của hàm đa điều hòa dưới cực đại: Định lí (2.2.1), Định lí (2.2.5) là kết quả mở rộng của Mệnh đề 2.3.9 ([1]).

- Lấy ví dụ minh họa cho 2 tính chất mở rộng trên.

- Kết quả của Định lý (2.2.1), Định lý (2.2.5) đã viết thành bài báo "Tính chất của toán tử Monge – Ampère đối với hàm đa điều hòa dưới cực đại" (đã được đăng trên *Thông báo khoa học trường Đại học Hoa Lư* Số 8, tháng 10-2020).

Hướng phát triển đề tài:

Xây dựng điều kiện cần và đủ để hàm đa điều hòa dưới u là cực đại trong trường hợp u là một hàm đa điều hòa dưới tổng quát.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH CỦA TÁC GIẢ (NHÓM TÁC GIẢ) ĐÃ CÔNG BỐ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN NỘI DUNG ĐỀ TÀI

Nguyễn Thị Nhàn (2020), "Tính chất của toán tử Monge – Ampère đối với hàm đa điều hòa dưới cực đại" (đã được xuất bản trên *Thông báo khoa học trường Đại học Hoa Lư* Số 8 tháng 10/2020).

DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Quang Diệu, Lê Mậu Hải (2014), *Cơ sở lý thuyết đa thế vị*, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm Hà Nội.

[2] Maciej Klimek (1991), *Pluripotential Theory*, Oxford Science Publications.

[3] U. Cegrell, Zbigniew Blocki (2009), "A note on maximal plurisubharmonic funtions", *Uzbek Mathematical Journal*, No1, pp.28-32.

[4] Zbigniew Blocki (1998), "The complex Monge-Ampère operator in pluripotential theory", *Sundsvall*, May.

[5] Do Hoang Son (2019), "A class of maximal plurisubharmonic functions", *Comptes Rendus Mathematique*, 357, 858-862.

[6] Do Hoang Son, "Some properties of maximal plurisubharmonic function", https://arxiv.org/pdf/1706.02469.pdf