UỶ BAN NHÂN DÂN TỈNH NINH BÌNH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ

ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP TRƯỜNG

ĐẠO HÀM CẦU VÀ MỘT SỐ TÍNH CHẤT HÀM PHÂN HÌNH CHUẨN TẮC

Chủ nhiệm đề tài: ĐINH BÍCH HẢO
Đơn vị công tác: Khoa Tự nhiên

NINH BÌNH, 2016

THÔNG TIN CHUNG VỀ ĐỀ TÀI

1. Tên đề tài:

Đạo hàm cầu và một số tính chất hàm phân hình chuẩn tắc

2. Lĩnh vực nghiên cứu:

Khoa học tự nhiên

3. Thời gian thực hiện:

Từ tháng 9/2015 đến tháng 5/2016

4. Chủ nhiệm đề tài:

Đinh Bích Hảo - Khoa Tự nhiên, Trường Đại học Hoa Lư

5. Các thành viên tham gia:

1. Đặng Thị Thu Hiền - Khoa Tự nhiên, Trường Đại học Hoa Lư

2. Nguyễn Thị Hiền- Khoa Tự nhiên, Trường Đại học Hoa Lư

MỤC LỤC

PHẦN MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Cho $\mathcal{M}(\mathbb{D})$ là tập các hàm phân hình trên đĩa đơn vị $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$ và τ là ánh xạ tự bảo giác của $\mathbb{D}$. Hàm $f \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ được gọi là chuẩn tắc nếu họ $f \circ \tau$ là một họ chuẩn tắc, có nghĩa là mọi dãy con đều trích được một dãy con hội tụ theo mê tríc cầu. Một kết quả nổi tiếng của Lehto và Virtanen nói rằng hàm $f \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ là chuẩn tắc nếu và chỉ nếu đạo hàm cầu $f^{\#}(z) = |f'(z)|/(1 + |f(z)|^2)$ thỏa mãn $\sup\limits_{z \in \mathbb{D}} f^{\#}(z)(1 - |z|^2) < \infty$.

Gần đây, trong bài báo [13], Peter Lappan đã tổng quát định lý Yamasshita về hàm phân hình chuẩn tắc và trong bài báo [3], R. Aulaskari và J. R$\ddot{a}$tty$\ddot{a}$ mở rộng khái niệm hàm chuẩn tắc sang khái niệm hàm φ - chuẩn tắc với φ là một hàm trên $[0, 1)$ thỏa mãn một số tính chất nhất định. Mục đích của đề tài là tìm hiểu, làm rõ các kết quả trong hướng nghiên cứu này và nghiên cứu các câu hỏi mở của bài báo [13] đưa ra.

Đề tài nghiên cứu gồm hai chương.

Chương 1, giới thiệu các kiến thức chung, cơ bản và cần thiết cho đề tài về đạo hàm cầu cầu, mêtríc hyperbolic và các khái niệm liên quan.

Chương 2, đầu tiên, chúng tôi trình bày về hàm phân hình chuẩn tắc, hàm φ, hàm phân hình φ - chuẩn tắc và đưa ra ví dụ về hàm φ. Sau đó chúng tôi chứng minh và làm rõ các kết quả về hàm phân hình chuẩn tắc, phát triển cho hàm phân hình φ - chuẩn tắc, trả lời câu hỏi của bài báo [13].

2. Tổng quan tình hình nghiên cứu thuộc lĩnh vực của đề tài

Lý thuyết phân bố giá trị thu hút được đông đảo các nhà toán học trên thế giới quan tâm nghiên cứu. Sự chuẩn tắc của hàm phân hình được các nhà toán học nghiên cứu như: W.K.Hayman, J.L.Schiff, P.Lappan, Yamashita,...Năm 1957, Lehto và Virtanen dã chỉ ra rằng hàm phân hình f trên đĩa đơn vị $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$ là chuẩn tắc khi và chỉ khi đạo hàm cầu $f^{\#}(z) = |f'(z)|/(1 + |f(z)|^2)$ thỏa mãn $\sup_{z\in\mathbb{D}} f^{\#}(z)(1 - |z|^2) < \infty$. Những năm gần đây hướng nghiên cứu này được nhiều nhà toán học quan tâm. Ở ngoài nước, nghiên cứu về vấn đề này phải kể đến các nhà toán học như R.Aulaskari, H.Wulan, ... Ở trong nước nghiên cứu theo hướng này có các nhà toán học như PGS. TSKH. Trần Văn Tấn,GS. TSKH Đỗ Đức Thái, PGS.TS Sĩ Đức Quang,...

3. Mục tiêu và nhiệm vụ nghiên cứu

Xây dựng một số tính chất hàm phân hình chuẩn tắc, hàm phân hình φ - chuẩn tắc.

4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu: Hàm phân hình chuẩn tắc .

Phạm vi nghiên cứu: Một số tính chất của hàm phân hình chuẩn tắc.

5. Cách tiếp cận và phạm vi nghiên cứu

Cách tiếp cận:

+) Từ một số tính chất hàm phân hình chuẩn tắc, phát triển tương tự cho hàm phân hình chuẩn tắc mạnh, hàm phân hình φ - chuẩn tắc.

+) Nghiên cứu các câu hỏi mở của bài báo [13].

Phương pháp nghiên cứu: Nghiên cứu lý thuyết

Chương 1

Đạo hàm cầu

1.1 Đạo hàm cầu

Trong $\mathbb{R}^3$ cho hình cầu $S : x_1^2+x_2^2+(x_3-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ và mặt phẳng x_1x_2 tiếp xúc với hình cầu S tại điểm $(0,0,0)$, điểm $N(0,0,1)$ là cực bắc. Đường thẳng nối N với một điểm z_1 trên mặt phẳng phức x_1x_2 cắt hình cầu tại một điểm $P_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$. Điều này thiết lập tương ứng một - một $z_1 \leftrightarrow P_1$ giữa các điểm của $\mathbb{C}$ và $S-\{N\}$. Liên hệ điểm N của hình cầu S với ∞, ta mở rộng tương ứng giữa S và $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Cho z_1 và z_2 là hai điểm trên $\mathbb{C}$ tương ứng với P_1 và P_2 trên S. Nếu $P_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i), i = 1, 2$, thì khoảng cách Ơclit giữa P_1 và P_2 là

$$|P_1 - P_2| = [(\alpha_1-\alpha_2)^2 + (\beta_1-\beta_2)^2 + (\gamma_1-\gamma_2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

và khoảng cách chordal giữa hai điểm z_1 và z_2 trong mặt phẳng phức mở rộng là

$$\chi(z_1, z_2) = \begin{cases} \dfrac{|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} & \text{nếu } z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & \text{nếu } z_1 \in \mathbb{C}, z_2 = \infty \end{cases}$$

Rõ ràng $\chi(.,.)$ là một mê tríc trên $\widehat{\mathbb{C}}$

Phần tử độ dài đường cong cầu ds trên hình cầu Riemann S là

$$ds = \frac{dz}{1+|z|^2},$$

và phần tử diện tích cầu dA được cho bởi

$$dA = \frac{dxdy}{(1+|z|^2)^2} \qquad (z = x + iy)$$

Độ dài cầu

$$L(\gamma) = \int_\gamma \frac{dz}{1+|z|^2}$$

của đường cong γ trên S gây ra một mê tríc như sau. Cho hai điểm z_1 và z_2 trên hình cầu Riemann, ta định nghĩa

$$\sigma(z_1, z_2) = \inf\{L(\gamma)\},$$

ở đây infimum được lấy theo tất cả các đường cong trên S nối z_1 với z_2. Khi đó $\sigma(z_1, z_2)$ là độ dài ơclit của cung ngắn nhất của vòng tròn lớn nhất trên S nối z_1 và z_2 và định nghĩa một mê tríc trên hình cầu gọi là mê tríc cầu. Ta có $\chi(z_1, z_2) \leq \sigma(z_1, z_2) \leq \frac{\pi}{2}\chi(z_1, z_2)$, do đó hai mê tríc trên là tương đương.

Định nghĩa 1.1.1. *Một dãy hàm $\{f_n\}$ hội tụ cầu đều tới f trên một tập $E \subset \mathbb{C}$ nếu, cho $\varepsilon > 0$ bất kì, có một số n_0 sao cho $n \geq n_0$ thỏa mãn*

$$\chi(f(z), f_n(z)) < \varepsilon,$$

với mọi $z \in E$.

Định nghĩa 1.1.2. *Một dãy hàm $\{f_n\}$ hội tụ cầu đều trên các tập con compact của miền Ω trên $\mathbb{C}$ tới một hàm $f(z)$nếu, cho bất kì tập con compact $K \subseteq \Omega$ và $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $n_0 = n_0(K, \varepsilon)$ sao cho $n \geq n_0$ thỏa mãn*

$$\chi(f_n(z), f(z)) < \varepsilon,$$

với mọi $z \in K$.

Cho $f(z)$ là hàm phân hình trên miền Ω. Nếu $z \in \Omega$ không là một cực điểm, đạo hàm theo mê tríc cầu, gọi là đạo hàm cầu, được cho bởi

$$
\begin{aligned}
f^{\#}(z) &= \lim_{z'\to z} \frac{\chi(f(z), f(z'))}{|z-z'|} \\
&= \lim_{z'\to z} \frac{|f(z)-f(z')|}{|z-z'|}.\frac{1}{\sqrt{1+|f(z)|^2}}.\frac{1}{\sqrt{1+|f'(z)|^2}} \\
&= \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}
\end{aligned}
$$

Nếu ξ là một cực điểm của $f(z)$, ta định nghĩa

$$f^{\#}(\xi) = \lim_{z\to\xi} \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$$

Do đó $f^{\#}(z)$ liên tục và $f^{\#}(z) = (\frac{1}{f(z)})^{\#}$.Nếu γ là một cung khả vi hoặc đường cong trên miền Ω, thì ảnh của γ trên hình cầu Riemann có phần tử độ dài cung $ds = f^{\#}(z)|dz|$, và độ dài cầu của nó được cho bởi

$$\int_{\gamma} f^{\#}(z)|dz|.$$

Trong trường hợp $f(z)$ là hàm phân hình trên $|z| \leq r$, kí hiệu

$$
\begin{aligned}
L(r) &= \int_{|z|=r} f^{\#}(z)|dz| \\
S(r) &= \frac{1}{\pi}\int_{|z|<r}\int \frac{|f'(z)|^2 dxdy}{(1+|f(z)|^2)^2}
\end{aligned}
$$

$L(r)$ = độ dài của ảnh của đường tròn $\{z : |z| = r\}$ trên hình cầu Riemann

$S(r) = \frac{1}{\pi}\cdot$ diện tích ảnh của đĩa $\{z : |z| < r\}$ trên hình cầu Riemann.

Định nghĩa 1.1.3. *Một họ các hàm $\mathcal{F}$ là bị chặn địa phương trên miền Ω nếu, với mỗi $z_0 \in \Omega$, có một số dương $M = M(z_0)$ và một lân cận $D(z_0; r) \subseteq \Omega$ sao cho $|f(z)| \leq M$ với mọi $z \in D(z_0; r)$ và với mọi $f \in \mathcal{F}$.*

Ta thấy $\mathcal{F}$ bị chặn địa phương là bị chặn đều trên một lân cận của mỗi điểm của Ω. Tính chất này đôi khi được gọi là bị chặn đều địa phương. Từ bất kì tập con compact $K \subseteq \Omega$ có thể được phủ bởi một số hữu hạn các lân cận như vậy, do đó một họ bị chặn địa phương $\mathcal{F}$ là bị chặn đều trên các tập con compact của Ω.

Xét đĩa đơn vị mở U. Định nghĩa phần tử độ dài cung hyperbolic bởi

$$d\varsigma = \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

Nếu γ xác định bởi $z(t) =: [a, b] \to U$ là một cung khả vi hoặc đường cong trên U, thì với $z = z(t), |dz| = |z'(t)|dt$, độ dài hyperbolic của γ được xác định bởi

$$\lambda(\gamma) = \int_\gamma d\varsigma = \int_a^b \frac{|z'(t)|dt}{1-|z(t)|^2}.$$

Cho $w = \Phi(z)$ là ánh xạ bảo giác một - một của U vào U. Theo bổ đề Schwarz - Pick, ta có

$$\int_{\Phi(\gamma)} \frac{|dw|}{1-|w|^2} \leq \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2},$$

tức là, $\lambda(\Phi(\gamma)) \leq \lambda(\gamma)$. Áp dụng bổ đề Schwarz - Pick một lần nữa cho Φ^{-1} ta được $\lambda(\gamma) \leq \lambda(\Phi(\gamma))$, do đó Φ bảo toàn độ dài.
Bây giờ chúng ta tính độ dài hyperbolic của đoạn thẳng l nối 0 với r, $0 < r < 1$.Ta có

$$\lambda(l) = \int_0^r \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} log \frac{1+r}{1-r}.$$

Điều này có nghĩa là l là một đường trắc địa, tức là, một đường cong có độ dài hyperbolic nhỏ nhất giữa 0 và r. Thật vậy, cho γ là một cung khả vi bất kì nối 0 với r, xác định bởi $z(t) = x(t) + iy(t), 0 \leq t \leq r$. Khi đó

$$\lambda(\gamma) = \int_0^r \frac{|z'(t)|dt}{1-|z(t)|^2} \geq \int_0^r \frac{|x'(t)|dt}{1-[x(t)]^2} = \frac{1}{2} log \frac{1+r}{1-r} = \lambda(l).$$

Thực tế điều này có thể được sử dụng để xác định đường trắc địa nối hai điểm bất kì $a, b \in U$. Cho F là một phép biến đổi Mobius từ $\overline{U}$ vào $\overline{U}$ sao cho $F(a) = 0, F(b) = r$. Đường trắc địa nối a và b là ảnh nghịch đảo của đoạn thẳng l nối 0 và r, do F bảo toàn độ dài. Phép biến đổi nghịch đảo này biến đường tròn thành đường tròn, còn đường thẳng như là một trường hợp đặc biệt của đường tròn. Hơn nữa, do ánh xạ này là bảo giác và đoạn thẳng l nối 0 với r trực giao với $|z| = 1$ nên nó là đường trắc địa nối a và b. Do đó đường trắc địa giữa a và b là cung tròn nối chúng. Định nghĩa

$$\psi(z) = \frac{z - w}{1 - \overline{z}w}.$$

Khi đó Φ là một phép biến đổi Mobius thỏa mãn $\Phi(z) = 0$, và $|\Phi(w)| = r, 0 < r < 1$, với $z, w \in U$ cố định. Nếu γ là đường trắc địa nối z và w, thì

$$\lambda(\gamma) = \lambda(\Phi(\gamma)) = \frac{1}{2} log \frac{1 + r}{1 - r}.$$

Nhưng

$$r = |\psi(w)| = |\frac{z - w}{1 - \overline{z}w}| := \rho(z, w),$$

nó dẫn tới

$$\lambda(\gamma) = \frac{1}{2} log \frac{1 + |\frac{z - w}{1 - \overline{z}w}|}{1 - |\frac{z - w}{1 - \overline{z}w}|} := d(z, w)$$

Rõ ràng $d(z, w)$ là một mêtríc, gọi là mêtríc hyperbolic, và $\rho(z, w)$ gọi là khoảng cách giả hyperbolic.

1.2 Một số định nghĩa và định lí

Trong mục này chúng tôi trình bày một số định nghĩa và định lí phục vụ cho việc chứng minh ở chương 2.

Định lí 1.2.1 (Dufresnoy). *Nếu $f(z)$ là hàm phân hình trên $|z| \leq r_0$ và $S(r_0) = S(r_0, f) < 1$, thì*

$$[f^{\#}(0)]^2 \leq \frac{1}{r_0^2} \frac{S(r_0)}{1 - S(r_0)}.$$

Chứng minh. Xem chi tiết trong [9, Trang 152]

Định lí 1.2.2 (Hurwitz). *Cho f_n là một dãy các hàm giải tích trên miền Ω, hội tụ đều trên các tập con compact của Ω tới hàm giải tích* *khác hằng* $f(z)$. *Nếu* $f(z_0) = 0$ *với* $z_0 \in \Omega$, *thì với mỗi* $r_0 > 0$ *đủ nhỏ, tồn tại* $N = N(r)$, *sao cho với mọi* $n > N, f_n(z)$ *có cùng số không điểm với* $f(z)$.

Chứng minh. Xem chi tiết trong [16, Trang 9]

Định nghĩa 1.2.3. *Giả sử* $f(z)$ *là hàm phân hình. Khi đó đặc trưng Alhfors - Shimizu* $T_0(r, f)$ *được xác định bởi*

$$T_0(r, f) = \int_0^r \frac{S(t, f)}{t} dt.$$

Định lí 1.2.4 (Ahlfors-Shimizu)**.** *Giả sử* $f(z)$ *là hàm phân hình trên* $|z| < R, 0 < R < \infty$. *Khi đó với mọi a hữu hạn hay vô hạn, và* $0 < r < R$ *ta có*

$$T_0(r, f) = \int_0^r \frac{S(t, f)dt}{t} = N(r, a) + m_0(r, a) - m_0(0, a),$$

với $f(0) \neq a$.

Chứng minh. Xem chi tiết trong [9]

Từ định lí Ahlfors-Shimizu với $a = 0$ ta có $N(r, f) \leq T_0(r, f) + log(\dfrac{\sqrt{1 + |f(0)|^2}}{|f(0)|})$. Ta sẽ sử dụng bất đẳng thức này trong chứng minh định lí 2.2.6

Định lí 1.2.5. *Nếu một họ* $\mathcal{F}$ *các hàm phân hình không chuẩn tắc trên* $\mathbb{D}$ *thì với mỗi* $\beta \in (-1, 1)$ *tồn tại:*
(1) Một tập con compact K của $\mathbb{D}$;
(2) Một dãy $\{z_n\}$ *trên K;*
(3) Một dãy $\{\rho_n\}$ *các số thực dương thỏa mãn* $\rho_n \to 0$ *khi* $n \to \infty$, *và*
(4) Một dãy $\{f_n\}$ *trong* $\mathcal{F}$ *sao cho dãy hàm* $\{\rho_n^{-\beta} f_n(z_n + \rho_n \xi)\}$ *hội tụ cầu đều trên mỗi tập con compact của* $\mathbb{C}$ *tới một hàm phân hình khác hằng.*

Chứng minh. Xem chi tiết trong [15]

Định nghĩa 1.2.6. *Cho một dãy* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *các điểm trên* $\mathbb{D}$ *sao cho* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1 - |z_n|^2)$ *hội tụ (quy ước* $|z_n|/z_n = 1$ *với* $z_n = 0$*), tích Blaschke* *với dãy $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ được xác định bởi*

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} z}.$$

Định nghĩa 1.2.7. *Dãy $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ được gọi là tách nếu $\inf_{k \neq n} \rho(z_k, z_n) > 0$ và nó được gọi là tách đều nếu $\inf_{n} \prod_{k \neq n} \rho(z_k, z_n) \geq \delta$*

Định nghĩa 1.2.8. *Một dãy vô hạn các điểm $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ trên $\mathbb{D}$ được gọi là φ- tách nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho*

$$\rho(z_k, z_n)\varphi(|z_n|)(1 - |z_n|) \geq \delta$$

với mọi số tự nhiên phân biệt k và n. Hơn nữa, nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\varphi(|z_n|)(1 - |z_n|) \prod_{k \neq n} \rho(z_k, z_n) \geq \delta$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$, thì dãy $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ được gọi là φ - tách đều.

Định nghĩa 1.2.9. *Một dãy vô hạn các điểm $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ trên $\mathbb{D}$ được gọi là φ- tách mạnh nếu*

$$\limsup_{n \to \infty} \min_{k \in \mathbb{N}} \rho(z_k, z_n)\varphi(|z_n|)(1 - |z_n|) = \infty.$$

Hơn nữa, nếu

$$\limsup_{n \to \infty} \varphi(|z_n|)(1 - |z_n|) \prod_{k \neq n} \rho(z_k, z_n) = \infty$$

thì dãy $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ được gọi là φ - tách mạnh.

Định nghĩa 1.2.10. *Một dãy $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ các điểm trên $\mathbb{D}$ được gọi nội suy trên $\mathbb{D}$ nếu với mọi dãy bị chặn $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ tồn tại một hàm giải tích bị chặn sao cho $f(z_n) = w_n, n \in \mathbb{N}$.*

Định nghĩa 1.2.11. *Tích Blaschke với dãy tách đều được gọi là tích Blaschke nội suy.*

Định lí 1.2.12. *Nếu dãy* $\{z_n\}$ *nội suy và* $B(z) = B(z, z_n)$ *là tích Blaschke của dãy* $\{z_n\}$ *thì với mỗi* $\epsilon > 0$ *tồn tại* $\eta > 0$ *sao cho* $|B(z)| \geq \eta$ *với* $\rho(z, z_n) \geq \epsilon, n = 1, 2, 3, ...$

Chứng minh. Xem chi tiết trong [7]

Định lí 1.2.13. *Nếu* f *là hàm phân hình chuẩn tắc trên* $\mathbb{D}$ *thì tồn tại một hằng số* $c_2(f)$ *sao cho*

$$(1 - |z|^2)^2 f^{\#}(z)(f')^{\#}(z) \leq c_2(f)$$

với mọi $z \in \mathbb{D}$.

Chứng minh. Xem chi tiết trong [17]

Định nghĩa 1.2.14. *Giả sử* $w, w' \in \mathbb{C} - \{0\}$ *với* $Im(\frac{w}{w'}) > 0$ *và tập các điểm* $nw + mw'; m, n = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$ *có thể được đánh số như là một dãy* $w_0, w_1, w_2, ..., w_k, ...$ *Khi đó, hàm Weierstrass* $\mathscr{P}$ *được định nghĩa như sau*

$$\mathscr{P}(z) = \mathscr{P}(z, w, w') = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty}[\frac{1}{(z - w_k)^2} - \frac{1}{w_k^2}].$$

Định lí 1.2.15. *Một dãy* $\{z_n\}$ *là nội suy khi và chỉ khi tồn tại một hằng số dương* δ *sao cho*

$$\prod_{k \neq n} \psi(z_k, z_n) \geq \delta$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$

Chứng minh. Xem chi tiết trong [8]

Chương 2

Một số tính chất hàm phân hình chuẩn tắc

2.1 Hàm phân hình chuẩn tắc trên đĩa đơn vị

Định nghĩa 2.1.1. *Một hàm phân hình f trên đĩa đơn vị $\mathbb{D}$ được gọi là chuẩn tắc nếu*

$$||f||_{\mathcal{N}} := \sup_{z\in\mathbb{D}} f^{\#}(z)(1-|z|^2) < \infty \tag{2.1.1}$$

Lớp tất cả các hàm chuẩn tắc được kí hiệu là $\mathcal{N}$.

Ví dụ 2.1.2. *i) Cho hàm $f(z) = -\dfrac{1}{z^2}$. Khi đó $f(z)$ là hàm phân hình chuẩn tắc trên $\mathbb{D}$. Tuy nhiên $F(z) = f'(z)$ không chuẩn tắc trên $\mathbb{D}$.*
ii) Cho $\mathscr{F} = \{nz, n = 1, 2, 3....\}$. Khi đó mỗi $f \in \mathscr{F}$ là một hàm chuẩn tắc trên $\mathbb{D}$.

Định nghĩa 2.1.3. *Một hàm phân hình f trên đĩa đơn vị $\mathbb{D}$ được gọi là chuẩn tắc mạnh, kí hiệu $f \in \mathcal{N}^0$, nếu*

$$\lim_{|z|\to 1} f^{\#}(z)(1-|z|^2) = 0$$

Sau đây chúng tôi trình bày khái niệm mở rộng hàm phân hình chuẩn tắc sang hàm phân hình φ - chuẩn tắc

Định nghĩa 2.1.4. *Một hàm tăng $\varphi : [0, 1) \to (0, \infty)$ được gọi là tăng nhẫn nếu*

$$\varphi(r)(1-r) \to \infty, \quad r \to 1^- \tag{2.1.2}$$

và

$$\mathcal{R}_a(z) := \frac{\varphi(|a + \frac{z}{\varphi(|a|)}|)}{\varphi(|a|)} \to 1 \tag{2.1.3}$$

hội tụ đều tới 1, khi $|a| \to 1^-$ trên tập con compact của $\mathbb{C}$.

Định nghĩa 2.1.5. *Cho một hàm tăng nhẫn φ, một hàm $f \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ được gọi là φ - chuẩn tắc nếu*

$$||f||_{\mathcal{N}^\varphi} := \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{f^\#(z)}{\varphi(|z|)} < \infty \tag{2.1.4}$$

Lớp tất cả các hàm φ- chuẩn tắc được kí hiệu là $\mathcal{N}^\varphi$. Hơn nữa, một hàm $f \in \mathcal{N}^\varphi$ được gọi là φ-chuẩn tắc mạnh, kí hiệu $f \in \mathcal{N}_0^\varphi$, nếu

$$f^\#(z) = o(\varphi(|z|)), \quad |z| \to 1^- \tag{2.1.5}$$

Cho φ là hàm tăng nhẫn, không mất tính tổng quát, ta giả sử $\varphi(r)(1-r) \geq 1$, với mọi $r \in [0,1)$. Thật vậy, $\varphi^*(r) := \varphi(r) + (1-r)^{-1})$ thỏa mãn $\mathcal{N}^{\varphi^*} = \mathcal{N}^\varphi$ và $\varphi^*(r)(1-r) \geq 1$, với mọi $r \in [0,1)$. Đặt $\Phi_a(z) := a + z/\varphi(|a|)$. Khi đó $\phi_a(z) \in \mathbb{D}$ khi $\varphi(|a|)(1-|a|) \geq 1$, với mọi $a, z \in \mathbb{D}$ và do đó $\mathcal{R}_a(z) = \dfrac{\varphi(|\phi_a(z)|)}{\varphi(|a|)}$ được xác định.
Bây giờ chúng tôi đưa ra hai ví dụ về hàm tăng nhẫn.

Ví dụ 2.1.6. *Giả sử $\varphi : [0,1) \to (0,\infty)$ là hàm tăng sao cho (2.1.2) thỏa mãn. Nếu $\psi := 1/\varphi$ là khả vi và lồi trên $[r_0, 1)$ với $r_0 \in (0,1)$ thì φ là tăng nhẫn. Thật vậy, cho $K \subset \mathbb{C}$ là compact và chọn $R > 0$ sao cho $K \subset \overline{D(0,R)}$. Khi đó, theo (2.1.2), tồn tại $r_R \in (0,1)$ sao cho $\phi_a(z) \in \mathbb{D}$, với mọi $z \in \overline{D(0,R)}$ nếu $|a| \in (r_R, 1)$ và do đó $\mathcal{R}_a(z)$ được xác định. Từ ψ là hàm tăng, khả vi và lồi trên $[r_0, 1)$ với $r_0 \in (0,1)$, ta có*

$$\sup \mathcal{R}_a(z) \leq \frac{\psi(|a|)}{\psi(|a| + R\psi(|a|))} \leq \frac{1}{1 + R\psi'(|a|)}$$

với mọi a sao cho $|a| > max\{r_R, r_0\}$. Theo (2.1.2) ta cũng có $\psi'(|a|) \to 0$ khi $|a| \to 1^-$ bởi tính chất lồi. Do đó,

$$\lim_{|a|\to 1^-} \sup \sup_{z\in K} \mathcal{R}_a(z) \leq 1.$$

Tương tự ta chỉ ra rằng

$$\lim_{|a|\to 1^-} \inf \sup_{z\in K} \mathcal{R}_a(z) \geq 1$$

Vậy (2.1.3) được thỏa mãn.

Nhận xét. Theo ví dụ (2.1.6), các hàm $(1-r)^{-\alpha}, \alpha \in (1,\infty)$ và $\exp(1/(1-r))$ là hàm tăng nhẫn.

Ví dụ 2.1.7. *Giả sử $\varphi : [0,1) \to (0,\infty)$ là hàm tăng sao cho (2.1.2) được thỏa mãn. Nếu $\psi = 1/\varphi$ thỏa mãn diều kiện Lipschitz*

$$\gamma_r := \sup_{r\leq s\leq t<1} |\frac{\psi(s)-\psi(t)}{s-t}| \leq \gamma < \infty$$

với mọi $r \in (0,1)$ và nếu $\gamma_r \to 0^+$ khi $r \to 1^-$ thì (2.1.3) được thỏa mãn. Thật vậy, ta có

$$|1 - \frac{\varphi(|a|)}{\varphi(|\phi_a(z)|)}| \leq \frac{\psi(|a|) - \psi(|a| + \psi(|a|)|z|)}{\psi(|a|)} \leq \gamma_{|a|}R,$$

với mọi $z \in \overline{D(0,R)}$.

2.2 Một số tính chất hàm phân hình chuẩn tắc

Sau đây chúng tôi trình bày một số tính chất hàm phân hình chuẩn tắc.

Bổ đề 2.2.1. *Cho K là một số thực dương và cho f là hàm phân hình chuẩn tắc trên $\mathbb{D}$. Khi đó với mỗi số nguyên dương n, tồn tại một hằng số $E_n(f,K)$ sao cho*

$$(1-|z|^2)^n|f^{(n)}(z)| \leq E_n(f,K)$$

với mọi với mọi $z \in \mathbb{D}$ sao cho $|f(z)| \leq K$.

Chứng minh. Do f là hàm phân hình chuẩn tắc nên ta có

$$f^{\#}(z) \leq c_1(f)/(1-|z|^2) \leq c_1(f)/(1-|z|)$$

Đặt $\sigma = \chi(K, 2K)$ và

$$A = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\sigma}{2c_1(f)}\}$$

Nếu $z_0 \in \mathbb{D}$ sao cho $|f(z_0)| \leq K$, thì ta có $|z - z_0| \leq A(1 - |z_0|)$. Suy ra

$$\chi(f(z), f(z_0)) \leq \int_L f^{\#}(z)|dz| \leq \sigma$$

ở đây L là đoạn thẳng nối z và z_0.
Từ $|z - z_0| \leq A(1 - |z_0|)$ kéo theo $|f(z_0)| \leq 2K$. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho đạo hàm ta được

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{2Kn!}{A^n(1 - |z_0|)^n}$$

với mỗi số nguyên dương n. Do đó

$$E_n(f, K) = 2Kn!(2/A)^n$$

và

$$(1 - |z|^2)^n |f^{(n)}(z)| \leq 2^n (1 - |z|)^n |f^{(n)}(z)| \leq E_n(f, K),$$

với $|f(z_0)| \leq K$.

Bổ đề 2.2.2. *Với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$ và mỗi hàm phân hình f trên $\mathbb{D}$, ta có*

$$\prod_{j=0}^{n-1} (f^{(j)})^{\#}(z) \leq \frac{|f^{(n)}(z)|}{1 + |f(z)|^2} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\max\{2, |f^{(j)}(z)|\}}$$

với mỗi $z \in \mathbb{D}$.

Chứng minh. Với mỗi $z \in \mathbb{D}$,

$$\prod_{j=0}^{n-1} (f^{(j)})^{\#}(z) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{|f^{(j+1)}(z)|}{1 + |f^{(j)}(z)|^2} = \frac{|f^{(n)}(z)|}{1 + |f(z)|^2} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{|f^{(j+1)}(z)|}{1 + |f^{(j)}(z)|^2}$$

Với mỗi số thực dương x ta có

$$\frac{|x|}{1 + x^2} \leq \min\{\frac{1}{|x|}, \frac{1}{2}\} = \frac{1}{\max\{2, |x|\}}$$

Do đó,

$$\prod_{j=0}^{n-1}(f^{(j)})^{\#}(z) \leq \frac{|f^{(n)}(z)|}{1+|f(z)|^2}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\max\{2,|f^{(j)}(z)|\}}$$

Định lí 2.2.3. *Giả sử f là hàm phân hình chuẩn tắc trên $\mathbb{D}$. Khi đó với mỗi n nguyên dương, tồn tại một hằng số $c_n(f)$ sao cho*

$$(1-|z|^2)^n\prod_{j=0}^{n-1}(f^{(j)})^{\#}(z) \leq c_n(f)$$

với mọi $z \in \mathbb{D}$.

Chứng minh. Cho $K = 1$ trong bổ đề 2.2.1, khi đó theo bổ đề 2.2.2, ta có

$$(1-|z|^2)^n\prod_{j=0}^{n-1}(f^{(j)})^{\#}(z) \leq (1-|z|^2)^n|f^{(n)}(z)| \leq E_n(f,1),$$

với $z \in \mathbb{D}$ và $|f(z)| \leq 1$. Do đó, chúng ta chỉ cần xét trường hợp $|f(z)| > 1$ Đặt $g(z) = 1/f(z)$. Khi đó g là hàm phân hình chuẩn tắc, nên $f^{\#}(z) = g^{\#}(z)$ và $|g(z)| < 1$ với mọi z mà $|f(z)| > 1$.
Đạo hàm hai vế phương trình $f(z)g(z) = 1$ n lần, ta được

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(z)g^{(n-k)}(z) = 0$$

và vì vậy,

$$f^{(n)}(z)g(z) = -\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k f^{(k)}(z)g^{(n-k)}(z)$$

Do $g(z) = 1/f(z)$ nên

$$|f^{(n)}(z)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k |f(z)f^{(k)}(z)g^{(n-k)}(z)|$$

Nhân hai vế bất đẳng thức trên với biểu thức

$$\frac{(1-|z|^2)^n}{(1+|f(z)|^2)\prod_{j=1}^{n-1}\max\{2,|f^{(j)}(z)|\}}$$

Sử dụng bổ đề 2.2.1 ta được

$$\begin{aligned}\frac{|f^{(n)}(z)|(1-|z|^2)^n}{(1+|f(z)|^2)\prod_{j=1}^{n-1}\max\{2,|f^{(j)}(z)|\}} &\leq \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k |g^{(n-k)}(z)|(1-|z|^2)^{n-k}\\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k E_{n-k}(g,1).\end{aligned}$$

Do đó, nếu

$$c_n(f)=\max\{E_n(f,1),\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k E_{n-k}(g,1)\}$$

thì từ bổ đề 2.2.1 và 2.2.2 ta có

$$(1-|z|^2)^n\prod_{j=0}^{n-1}(f^{(j)})^{\#}(z)\leq c_n(f)$$

với mọi $z\in\mathbb{D}$.

Nhận xét. Một câu hỏi được Peter Lappan đặt ra trong bài báo [13] là :" Có tồn tại một hàm phân hình chuẩn tắc f trên $\mathbb{D}$ sao cho dãy $\{c_n(f)\}$ không bị chặn, ở đây $\{c_n(f)\}$ là dãy các hằng số trong định lý 2.2.3? "
Câu trả lời là có. Và chúng tôi trình bày trong ví dụ sau đây.

Ví dụ 2.2.4. *Cho $\{n_k\}$ là dãy số nguyên được xác định như sau: $n_1=2$ và vớ $k>1$ thì n_k bằng số nguyên đầu tiên lớn hơn n_{k-1} sao cho*

$$\frac{n_k!}{(\log n_k)^{n_k}}>n_k2^{n_k}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{n_j!}{(\log n_j)^{n_j}}$$

Cho $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_z^n$, trong đó $a_n=(n!)^{-1}$ nếu $n\neq n_k$ với k bất kì và $a_n=(\log n)^{-n}$ nếu $n=n_k$. Do $\limsup|a_n|^{1/n}=0$ nên $f(z)$ nguyên, suy ra $f(z)$ và mỗi đạo hàm của nó là hàm giải tích bị chặn, do đó chúng

chuẩn tắc trên $\mathbb{D}$.
Với $n = n_k$ đủ lớn, ta có

$$\begin{aligned}
\prod_{j=0}^{n_k-1}(f^{(i)})^{\#}(0) &= \frac{|f^{(n_k)}(0)|}{1+|f(0)|^2}\prod_{j=1}^{n_k-1}\frac{|f^{(j)}(0)|}{1+|f^{(j)}(0)|^2}\\
&\geq \frac{|f^{(n_k)}(0)|}{2^{n_k}}\prod_{j=1}^{n_k-1}\frac{1}{|f^{(j)}(0)|}\\
&= \frac{|f^{(n_k)}(0)|}{2^{n_k}}.\frac{1}{|f^{(n_1)}(0)f^{(n_2)}(0)...f^{(n_k-1)}(0)|}\\
&= \frac{n_k!}{(\log n_k)^{n_k}}.\frac{1}{2^{n_k}}.\prod_{j=1}^{n_k-1}\frac{(\log n_j)^{n_j}}{(n_j)!} > n_k,
\end{aligned}$$

do đó nó phân kì khi $n \to \infty$.

Sau đây chúng tôi trình bày mở rộng của đạo hàm cầu của hàm $f \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$:
Cho f là hàm phân hình trên đĩa đơn vị $\mathbb{D}$ và một số nguyên dương n thì biểu thức

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{1+|f(z)|^{n+1}} \tag{2.2.1}$$

là sự mở rộng đạo hàm cầu của f.
Định lý sau đây chứng tỏ biểu thức (2.2.1) là có nghĩa với hàm chuẩn tắc.

Định lí 2.2.5. *Nếu f là hàm phân hình chuẩn tắc trên $\mathbb{D}$ thì với mỗi số nguyên dương n, tồn tại một hằng số $P_n(f)$ sao cho*

$$\frac{|f^{(n)}(z)|(1-|z|^2)^n}{1+|f(z)|^{n+1}} \leq P_n(f)$$

Chứng minh. Định lý đúng với $n = 1$.
Ta đi chứng minh định lí đúng với $n > 1$. Giả sử định lí đúng với mỗi $k < n$. Theo Bổ đề 2.2.1, ta có

$$\frac{|f^{(n)}(z)|(1-|z|^2)^n}{1+|f(z)|^{n+1}} \leq |f^{(n)}(z)|(1-|z|^2)^n \leq E_n(f,1)$$

với $|f(z)| \leq 1$. Cho $g(z) = 1/f(z)$. Khi đó$|g(z)| \leq 1$ với $|f(z)| > 1$, và g là một hàm phân hình chuẩn tắc. Giả sử $|f(z)| > 1$, khi đó lấy đạo hàm hai vế phương trình $f(z)g(z) = 1$ n lần và được

$$|f^{(n)}(z)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k |f(z)f^{(k)}(z)g^{(n-k)}(z)|$$

Vì thế, cho $n \geq 1$ và $P_0(f)$, ta được

$$\frac{|f^{(n)}(z)|(1-|z|^2)^n}{1+|f(z)|^{n+1}}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \frac{|f(z)||f^{(k)}(z)|(1-|z^2|)^k}{1+|f(z)|^{k+1}}.|g^{(n-k)}(z)|(1-|z|^2)^{n-k}\frac{1+|f(z)|^{k+1}}{1+|f(z)|^{n+1}}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k P_n(k) E_{n-k}(g,1)\frac{|f(z)|+|f(z)|^{k+2}}{1+|f(z)|^{n+1}}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{x+x^{n+1}}{1+x^{n+1}} \leq 2$ với $x > 1$, ta có

$$\frac{|f(z)|+|f(z)|^{k+2}}{1+|f(z)|^{n+1}} \leq 2$$

với $0 \leq k \leq n-1$ và $f(z) > 1$. Do đó ta có

$$\frac{|f^{(n)}(z)|(1-|z|^2)^n}{1+|f(z)|^{n+1}} \leq \sum_{k=0}^{n-1} 2C_n^k P_n(k) E_{n-k}(g,1)$$

với $f(z) > 1$.

Định lí 2.2.6. *Cho $f \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$. Khi đó*
i) Nếu $f \in \mathcal{N}$ và $f(0) \neq 0$, thì

$$N(r,f) = \mathcal{O}(\int_0^r \frac{1}{(1-|s|^2)^2}\log\frac{r}{s}ds); r \to 1^- \tag{2.2.2}$$

ii) Nếu $f \in \mathcal{N}^0$ và $f(0) \neq 0$ thì

$$N(r,f) = o(\int_0^r \frac{1}{(1-|s|^2)^2}\log\frac{r}{s}ds); r \to 1^- \tag{2.2.3}$$

Chứng minh. i) Định lí Fubini chỉ ra rằng đặc trưng Ahlfors-Shimizu của $f \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ có thể được biểu diễn

$$T_0(r,f) = \frac{1}{\pi}\int_{D(0,r)} (f^{\#}(z))^2 \log\frac{r}{|z|} dA(z) \tag{2.2.4}$$

Nếu $f \in \mathcal{N}$ thì

$$T_0(r,f) \leq 2||f||^2_{\mathcal{N}} \int_0^r \frac{1}{(1-|s|^2)^2}\log\frac{r}{s}ds,$$

và theo định lí Ahlfors-Shimizu, ta có

$$N(r,f) \leq T_0(r,f) + \log\frac{\sqrt{1+|f(0)|^2}}{|f(0)|} \tag{2.2.5}$$

Do đó (2.2.6) được chứng minh.
ii) Nếu $f \in \mathcal{N}_0$ thì, cho $\varepsilon > 0$, tồn tại $r_\varepsilon \in (0,1)$ sao cho $f^{\#}(z) \leq \varepsilon(1-|z|^2)$, với mọi $|z| \geq r_\varepsilon$. Khi đó, ta có

$$T_0(r,f) \leq 2||f||^2_{\mathcal{N}_0} \int_0^{r_\varepsilon} \frac{1}{(1-|s|^2)^2}\log\frac{r}{s}ds + 2\varepsilon^2 \int_0^r \frac{1}{(1-|s|^2)^2}\log\frac{r}{s}ds.$$

Do $\int_0^1 \frac{1}{(1-|s|^2)^2}\log\frac{r}{s}ds$ là phân kì nên theo (2.2.9) ta được (2.2.7).

Sau đây chúng tôi trình bày mở rộng định lý 2.2.6 cho hàm phân hình φ - chuẩn tắc.

Định lí 2.2.7. *Cho $\varphi : [0,1) \to (0,1)$ là hàm tăng nhẵn và cho $f \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$. Khi đó*
i) Nếu $f \in \mathcal{N}^\varphi$ và $f(0) \neq 0$, thì

$$N(r,f) = \mathcal{O}(\int_0^r (\varphi(s))^2 \log\frac{r}{s}ds); r \to 1^- \tag{2.2.6}$$

ii) Nếu $f \in \mathcal{N}_0^\varphi$ và $f(0) \neq 0$ thì

$$N(r,f) = o(\int_0^r (\varphi(s))^2 \log\frac{r}{s}ds); r \to 1^- \tag{2.2.7}$$

Chứng minh. i) Định lí Fubini chỉ ra rằng đặc trưng Ahlfors-Shimizu của $f \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ có thể được biểu diễn

$$T_0(r,f) = \frac{1}{\pi}\int_{D(0,r)} (f^{\#}(z))^2 \log\frac{r}{|z|} dA(z) \tag{2.2.8}$$

Nếu $f \in \mathcal{N}^{\varphi}$ thì

$$T_0(r,f) \leq 2||f||^2_{\mathcal{N}^{\varphi}} \int_0^r (\varphi(s))^2 \log\frac{r}{s} ds,$$

và theo định lí Ahlfors-Shimizu, ta có

$$N(r,f) \leq T_0(r,f) + \log\frac{\sqrt{1+|f(0)|^2}}{|f(0)|} \tag{2.2.9}$$

Do đó (2.2.6) được chứng minh.
ii) Nếu $f \in \mathcal{N}_0^{\varphi}$ thì, cho $\varepsilon > 0$, tồn tại $r_\varepsilon \in (0,1)$ sao cho $f^{\#}(z) \leq \varepsilon\varphi(|z|)$, với mọi $|z| \geq r_\varepsilon$. Khi đó, ta có

$$T_0(r,f) \leq 2||f||^2_{\mathcal{N}^{\varphi}} \int_0^{r_\varepsilon} (\varphi(s))^2 \log\frac{r}{s} ds + 2\varepsilon^2 \int_0^r (\varphi(s))^2 \log\frac{r}{s} ds.$$

Do $\int_0^1 (\varphi(s))^2 \log\frac{r}{s} ds$ là phân kì với bất kì hàm φ tăng nhẫn nên theo (2.2.9) ta được (2.2.7).

Định lý 2.2.8 sau đây là sự phát triển của định lý 1.2.5 cho hàm phân hình φ - chuẩn tắc và φ - chuẩn tắc mạnh.

Định lí 2.2.8. *Giả sử $\varphi : [0,1) \to (0,\infty)$ là hàm tăng nhẫn , $-1 < \beta < 1$ và $f \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$. Khi đó*
i) $f \notin \mathcal{N}^{\varphi}$ khi và chỉ khi tồn tại
(1) Một dãy z_n các điểm trên $\mathbb{D}$,
(2) Một dãy ρ_n các số thực dương,
(3) Một dãy σ_n các số thực dương thõa mãn $\sigma_n \to 0$, khi $n \to \infty$, và
(4) Một hằng số $c > 0$ thỏa mãn $\varphi(|z_n|)\rho_n \leq c\sigma_n$, với mọi $n \in \mathbb{N} := 1, 2, ...$ sao cho dãy hàm $\{\sigma_n^{-\beta} f(z_n + \rho_n\xi)\}$ hội tụ cầu đều trên mỗi tập con compact của $\mathbb{C}$ tới một hàm phân hình khác hằng.
ii) Hơn nữa, $f \notin N_0^{\varphi}$ khi và chỉ khi tồn tại

(1') Một hằng số dương R,
(2') Một dãy z_n các điểm trên $\mathbb{D}$ thõa mãn $|z_n| \to 1^-$ khi $n \to \infty$, và
(3') Một dãy ρ_n các số thực dương thỏa mãn $\rho_n\varphi(|z_n)| < 1/R$ sao cho dãy hàm $\{f(z_n + \rho_n\xi)\}$ hội tụ cầu đều trên mỗi tập con compact của $D(0, R)$ tới một hàm phân hình khác hằng.

Chứng minh. i) Giả sử $f \notin \mathcal{N}^{\varphi}$. Khi đó tồn tại một dãy $\{a_m\}$ thỏa mãn $|a_m| \to 1^-$ khi $m \to \infty$, sao cho họ $\mathcal{F} := \{f_m(\xi) := f(a_m + \xi/\varphi(|a_m|)) : m \in \mathbb{N}\}$ là không chuẩn tắc trên $\mathbb{D}$.
Theo định lí 1.2.5, với $\beta \in (1, -1)$ bất kì, tồn tại tập compact $K \subset \mathbb{D}$, một dãy $\{z_n\} \subset K$, một dãy $\{\sigma_n\} \subset (0, \infty)$ thỏa mãn $\sigma_n \to 0$ khi $n \to \infty$, và một dãy $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ sao cho dãy hàm $\{g_n(\xi) := \sigma_n^{-\beta} f_n(z_n + \sigma_n\xi)\}$ hội tụ cầu đều trên mỗi tập con compact của $\mathbb{C}$ tới một hàm phân hình khác hằng. Kí hiệu $w_n := a_n + z_n/\varphi(|a_n|))$, ta có

$$\begin{aligned} g_n(\xi) : &= \sigma_n^{-\beta} f(a_n + \frac{z_n + \sigma_n\xi}{\varphi(|a_n|)}) \\ &= f(w_n + \frac{\sigma_n\xi}{\varphi(|a_n|)}) \end{aligned}$$

Để chứng minh mệnh đề i), ta cần tìm một hằng số dương c sao cho $\rho_n := \sigma_n/\varphi(|a_n|)$ thỏa mãn $\varphi(|w_n|)\rho_n \le c\sigma_n$, với mọi n đủ lớn. Thật vậy, kí hiệu: $\psi := 1/\varphi$. Khi đó

$$\frac{\varphi(|w_n|)}{\varphi(|a_n|)} = \frac{\varphi(|a_n| + \frac{z_n}{\varphi(|a_n|)})}{\varphi(|a_n|)} \le \frac{\psi(|a_n|)}{\psi(|a_n| + |z_n|\psi(|a_n|))} \le \frac{1}{1 + \psi'(|a_n|)|z_n|},$$

Suy ra $\varphi(|w_n|)\rho_n \le 2\sigma_n$, với mọi n đủ lớn.
Bây giờ, giả sử $g_n(\xi) := \sigma_n^{-\beta}(z_n + \rho_n\xi)$ hội tụ cầu đều trên mỗi tập con compact của $\mathbb{C}$ tới hàm khác hằng $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$. Chọn $\xi_0 \in \mathbb{C}$ sao cho $g^{\#}(\xi_0) \neq 0$ và giả sử phản chứng rằng $f \in \mathcal{N}^{\varphi}$. Khi đó, với n đủ lớn, ta có

$$\begin{aligned} g_n^{\#}(\xi_0) = \frac{\sigma_n^{-\beta}\rho_n|f'(z_n + \rho_n\xi_0)|}{1 + \sigma_n^{-2\beta}|f(z_n + \rho_n\xi_0)|^2} &\le \sigma_n^{-|\beta|}\rho_n f^{\#}(z_n + \rho_n\xi_0) \\ &\le C\sigma_n^{-|\beta|}\rho_n\varphi(|z_n + \rho_n\xi_0|) \le Cc\sigma_n^{1-|\beta|}\frac{\varphi(|z_n + \rho_n\xi_0|)}{\varphi(|z_n|)} \\ &\le Cc\sigma_n^{1-|\beta|}\frac{\varphi(|z_n| + \rho_n|\xi_0|)}{\varphi(|z_n|)}. \end{aligned}$$

Ta có

$$\frac{\varphi(|z_n|+\rho_n|\xi_0|)}{\varphi(|z_n|)} = \frac{\psi(|z_n|)}{\psi(|z_n|+\rho_n|\xi_0|)} \leq \frac{\psi(|z_n|)}{\psi(|z_n|)+\psi'(|z_n|)\rho_n|\xi_0|}$$
$$\leq \frac{1}{1+\psi'(|z_n|)c\sigma_n|\xi_0|}, \quad n\to\infty$$

Suy ra $g^{\#}(\xi_0)=0$. Điều này mâu thuẫn. Vậy $f\notin\mathcal{N}^{\varphi}$.

ii) Giả sử f không phải là một hàm chuẩn tắc mạnh. Khi đó, tồn tại một hằng số $c>0$ và một dãy $\{z_n^*\}\subset\mathbb{D}$ với $|z_n^*|\to 1$ sao cho

$$\frac{f^{\#}\left(z_n^*\right)}{\varphi\left(|z_n^*|\right)} \geq c; \quad n=1,2,... \tag{2.2.10}$$

Nếu f không phải là một hàm chuẩn tắc, thì theo mệnh đề i) với $\beta=0$ ta được điều phải chứng minh. Bây giờ ta giả sử rằng f là một hàm chuẩn tắc và $|z_n^*|>1/2, \forall n\in\mathbb{N}$.

Cho $r_n=\dfrac{2|z_n^*|}{1+|z_n^*|}$ và $r'_n=\dfrac{|z_n^*|}{2-|z_n^*|}; n\in\mathbb{N}$. Khi đó, $\dfrac{1}{3}<r'_n<|z_n^*|<r_n<1$ và $r_n\to 1, r'_n\to 1$ khi $n\to\infty$. Từ đó, ta có

$$r_n-r'_n=\frac{2|z_n^*|}{1+|z_n^*|}-\frac{|z_n^*|}{2-|z_n^*|}=\frac{3|z_n^*|\left(1-|z_n^*|\right)}{\left(1+|z_n^*|\right)\left(2-|z_n^*|\right)}$$

và

$$1-r_n=\frac{1-|z_n^*|}{1+|z_n^*|}.$$

Do đó

$$3\left(1-r_n\right)\geq\frac{3|z_n^*|\left(1-|z_n^*|\right)}{\left(1+|z_n^*|\right)}\geq\frac{3|z_n^*|\left(1-|z_n^*|\right)}{\left(1+|z_n^*|\right)\left(2-|z_n^*|\right)}=r_n-r'_n. \tag{2.2.11}$$

Chọn $\{z_n\}\subset\mathbb{D}$ sao cho

$$\begin{aligned} M_n &= \max_{r'_n\leq|z|\leq r_n}\left(1-\frac{|z|}{r_n}\right)^{1/2}\left(1-\frac{r'_n}{|z|}\right)^{1/2} f^{\#}\left(z\right) \\ &= \left(1-\frac{|z_n|}{r_n}\right)^{1/2}\left(1-\frac{r'_n}{|z_n|}\right)^{1/2} f^{\#}\left(z_n\right) \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

Từ $r'_n < |z_n^*| < r_n$ và kết hợp với (2.2.10), ta có

$$\begin{aligned} M_n &\geq \left(1 - \frac{|z_n^*|}{r_n}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{r'_n}{|z_n^*|}\right)^{1/2} f^{\#}(z_n^*) \\ &= \left(\frac{1 - |z_n^*|}{2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{1 - |z_n^*|}{2 - |z_n^*|}\right)^{1/2} f^{\#}(z_n^*) \\ &\geq \frac{1}{2}(1 - |z_n^*|) f^{\#}(z_n^*) \geq \frac{c}{2} > 0. \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

Vì vậy, $r'_n < |z_n| < r_n$ và $|z_n| \to 1$ khi $n \to \infty$. Từ (2.2.12) và (2.2.13), ta có $f^{\#}(z_n) \to \infty$ khi $n \to \infty$. Đặt

$$\rho_n = \frac{1}{M_n}\left(1 - \frac{|z_n|}{r_n}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{r'_n}{|z_n|}\right)^{1/2} = \frac{1}{f^{\#}(z_n^*)}.$$

Thì $\rho_n \to 0$. Từ (2.2.11) ta có

$$1 - |z_n| > 1 - r_n \geq \frac{1}{3}(r_n - r'_n) \geq \frac{1}{3}(|z_n| - r'_n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.2.14}$$

Do $1 - |z_n| > r_n - |z_n|$ và $1/3 < r'_n < |z_n| < r_n$, nên từ (2.2.13) và (2.2.14), ta có

$$\begin{aligned} \rho_n \varphi(|z_n|) &\leq \frac{\rho_n}{1 - |z_n|} = \frac{1}{(1 - |z_n|) M_n} \left(1 - \frac{|z_n|}{r_n}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{r'_n}{|z_n|}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{(r_n - |z_n|)^{\frac{1}{2}} (|z_n| - r'_n)^{\frac{1}{2}}}{M_n (r_n - |z_n|)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3}(|z_n| - r'_n)\right)^{\frac{1}{2}} r_n^{\frac{1}{2}} |z_n|^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{M_n r_n^{1/2} |z_n|^{1/2}} \leq \frac{12\sqrt{3}}{c} := \frac{1}{R}. \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Vì vậy, các hàm $g_n(\xi) = f(z_n + \rho_n \xi)$ được xác định với $|\xi < R|$. Bây giờ ta chỉ ra rằng $\{g_n^{\#}(\xi)\}$ là bị chặn đều trên $|\xi| \leq R' < R, R'$ tùy ý. Từ $||f||_{\mathcal{N}^\varphi} = \sup\limits_{z \in \mathbb{D}} \dfrac{f^{\#}(z)}{\varphi(|z|)} < \infty$ và $|\xi| \leq R' < R$, kết hợp (2.2.15) và bởi tính đơn điệu của φ ta có

$$\begin{aligned} g_n^{\#}(\xi) &= \rho_n f^{\#}(z_n + \rho_n \xi) \le ||f||_{\mathcal{N}^\varphi} \rho_n \varphi(|z_n + \rho_n \xi|) \\ &\le ||f||_{\mathcal{N}^\varphi} \rho_n \varphi(|z_n| + \rho_n |\xi|) \le \frac{1}{R} ||f||_{\mathcal{N}^\varphi} \frac{\varphi(|z_n| + \rho_n R')}{\varphi(|z_n|)} \\ &= \frac{1}{R} ||f||_{\mathcal{N}^\varphi} \frac{\psi(|z_n|)}{\psi(|z_n| + \rho_n R')} \le \frac{1}{R} ||f||_{\mathcal{N}^\varphi} \frac{\psi(|z_n|)}{\psi(|z_n|) + \psi'(|z_n|)\rho_n R'} \\ &\le \frac{1}{R} ||f||_{\mathcal{N}^\varphi} \frac{1}{1 + \psi'(|z_n|)\rho_n R'} \le \frac{1}{R} ||f||_{\mathcal{N}^\varphi}. \end{aligned}$$

Theo tiêu chuẩn Marty, $\{g_n(\xi)\}$ là một họ chuẩn tắc trên $|\xi| < R$. Do đó tồn tại một hàm phân hình $g(\xi)$ trên $|\xi| < R$ sao cho $g_{n_k}(\xi) \to g(\xi)$ hội tụ đều địa phương trên $|\xi| < R$. Từ $g_{n_k}^{\#}(0) = \rho_{n_k} f^{\#}(z_{n_k}) = 1, g(\xi)$ khác hằng.

Ngược lại, giả sử rằng $g_n(\xi) = f(z_n + \rho_n \xi) \to g(\xi)$ hội tụ đều địa phương trên $|\xi| < R$, ở đó $g(\xi)$ là một hàm phân hình khác hằng và $|z_n| \to 1$ với $\rho_n \varphi(|z_n|) < 1/R$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Chọn $\xi_0, |\xi_0| < R$, giả sử rằng $g^{\#}(\xi_0) > 0$.

Giả sử phản chứng rằng f là một hàm chuẩn tắc mạnh, khi đó

$$\begin{aligned} g_n^{\#}(\xi_0) &= \rho_n f^{\#}(z_n + \rho_n \xi_0) \\ &= \rho_n \varphi(|z_n + \rho_n \xi_0|) \frac{f^{\#}(z_n + \rho_n \xi_0)}{\varphi(|z_n + \rho_n \xi_0|)} \\ &\le \rho_n \varphi(|z_n| + \rho_n |\xi_0|) \frac{f^{\#}(z_n + \rho_n \xi_0)}{\varphi(|z_n + \rho_n \xi_0|)} \\ &\le \frac{1}{R} \frac{\varphi(|z_n| + \rho_n |\xi_0|)}{\varphi(|z_n|)} \frac{f^{\#}(z_n + \rho_n \xi_0)}{\varphi(|z_n + \rho_n \xi_0|)} \\ &= \frac{1}{R} \frac{\psi(|z_n|)}{\psi(|z_n| + \rho_n |\xi_0|)} \frac{f^{\#}(z_n + \rho_n \xi_0)}{\varphi(|z_n + \rho_n \xi_0|)} \\ &\le \frac{1}{R} \frac{1}{1 + \psi'(|z_n|)\rho_n R} \frac{f^{\#}(z_n + \rho_n \xi_0)}{\varphi(|z_n + \rho_n \xi_0|)} \le \frac{1}{R} \frac{f^{\#}(z_n + \rho_n \xi_0)}{\varphi(|z_n + \rho_n \xi_0|)} \to 0, \end{aligned}$$

Suy ra $g^{\#}(\xi_0) = 0$. Điều này mâu thuẫn với giả sử $g^{\#}(\xi_0) > 0$. Định lí được chứng minh

Định lí 2.2.9. *Cho E là tập bất kì gồm năm số phức hữu hạn hoặc vô* *hạn. Nếu f là một hàm phân hình trên $\mathbb{D}$ sao cho*

$$\sup\{(1-|z|^2)f^{\#}(z) : z \in f^{-1}(E)\} < \infty$$

thì f là một hàm chuẩn tắc.

Chứng minh. Định lý tương đương với mệnh đề sau: Nếu f không là hàm chuẩn tắc thì với mỗi số phức λ, với ít nhất bốn ngoại lệ,

$$\sup\{(1-|z|^2)f^{\#}(z) : z \in f^{-1}(\lambda)\} = \infty.$$

Ta sẽ chứng minh mệnh đề tương đương này.

Giả sử f là hàm phân hình trên $\mathbb{D}$ sao cho $f \notin \mathcal{N}$. Theo định lí 2.2.8 mệnh đề i) với $\beta = 0$, tồn tại dãy $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ trên $\mathbb{D}$ và dãy các số thực dương ρ_n, thỏa mãn $\rho_n/(1-|z_n|) \to 0$ khi $n \to \infty$ và hàm phân hình khác hằng g trên mặt phức mở rộng sao cho dãy hàm $\{g_n\}$ hội tụ đều tới g, với $g_n(t) = f(z_n + \rho_n t)$ với mỗi số nguyên dương n. Cho λ là một số phức bất kì, hữu hạn hoặc vô hạn, để phương trình $g(t) = \lambda$ có một nghiệm t_0 không phải là nghiệm kép, tức là $g^{\#}(t_0) \neq 0$. Theo định lí Hurwitz, trên mỗi lân cận của t_0 tất cả trừ một số hữu hạn các hàm g_n có giá trị λ. Do đó tồn tại một dãy các điểm t_n sao cho $t_n \to t_0$ và $g_n(t_n) = \lambda$ với n đủ lớn. Mặt khác, do $\{g_n\}$ hội tụ đều tới g nên ta có $g_n^{\#}(t_n) \to g^{\#}(t_0)$. Đặt $s_n = z_n + \rho_n t_n$, ta có $g_n^{\#}(t_n) = \rho_n f^{\#}(s_n)$ để

$$\begin{aligned} f^{\#}(s_n)(1-|s_n|) &= g_n^{\#}(t_n)\frac{1-|s_n|}{\rho_n} \\ &= g_n^{\#}(t_n)\frac{1-|z_n|}{\rho_n}\frac{1-|s_n|}{1-|z_n|} \end{aligned}$$

Cho $n \to \infty$, ta có $g_n^{\#}(t_n) \to g^{\#}(t_0)$, $\dfrac{1-|z_n|}{\rho_n} \to \infty$, $\dfrac{1-|s_n|}{1-|z_n|} \to 1$, do vậy $f^{\#}(s_n)(1-|s_n|) \to \infty$, hay $f^{\#}(s_n)(1-|s_n|^2) \to \infty$

Bây giờ ta chứng minh rằng nếu phương trình $g(t) = \lambda$ có một nghiệm mà không phải nghiệm bội thì

$$\sup\{(1-|z|^2)f^{\#}(z) : z \in f^{-1}(\lambda)\} = \infty.$$

Tuy nhiên có thể có nhiều nhất bốn giá trị λ mà tất cả các nghiệm của phương trình $g(t) = \lambda$ là nghiệm bội (xem trang 231, [10]). Do vậy định lý được chứng minh.

Sau đây chúng tôi chỉ ra rằng định lý 2.2.9 không đúng nếu ta thay giả thiết tập hợp E gồm năm điểm với một tập chỉ chứa bốn điểm.

Định lí 2.2.10. *Tồn tại một hàm phân hình không chuẩn tắc trên $\mathbb{D}$ và một tập F bao gồm bốn điểm sao cho $f^{\#}(z) = 0$ với mỗi $z \in f^{-1}(F)$.*

*Chứng minh.*Cho p là một số thực dương và q là một số phức với phần ảo dương. Cho $\mathscr{P}$ hàm Weierstrass với chu kì nguyên thủy p và q. Cho H là nửa trên của mặt phẳng, và

$$e_1 = \mathscr{P}(p/2); e_2 = \mathscr{P}(q/2); e_3 = \mathscr{P}((p+q)/2).$$

Phương trình $\mathscr{P}(z) = \lambda$ chỉ có nghiệm bội với $\lambda \in \{e_1, e_2, e_3, \infty\}$, (xem chương 13, [10]). Do vậy, $\mathscr{P}^{\#}(z) = 0$ với $\mathscr{P}(z) \in \{e_1, e_2, e_3, \infty\}$. Cho $g(z) = i(1+z)(1-z)$ và $f(z) = \mathscr{P}(g(z))$ với $z \in \mathbb{D}$.
Do hàm g là ánh xạ từ đĩa đơn vị D lên H, với $g(1) = \infty$, nên ta có thể chọn một dãy các số thực dương $\{x_n\}$ với $0 < x_n < 1$ và $x_n \to 1$ sao cho $\{\mathscr{P}(g(x_n))\}$ bị chặn và dãy $\{\mathscr{P}'(g(x_n))\}$ bị chặn giữa 0 và ∞. Khi đó $\mathscr{P}^{\#}(g(x_n))$ bị chặn và

$$(1 - |x_n|^2) f^{\#}(x_n) = 2\mathscr{P}(g(x_n))(1 + |x_n|)/(1 - |x_n|) \to \infty$$

khi $n \to \infty$. Do đó f là hàm không chuẩn tắc. Nhưng $f^{\#}(z) = \mathscr{P}^{\#}(g(z)) = 0$ với $f(z) \in \{e_1, e_2, e_3, \infty\}$. Cho tập $F = \{e_1, e_2, e_3, \infty\}$ thì định lý được chứng minh.

Sau đây chúng tôi chỉ ra rằng định lý 2.2.9 không đúng nếu ta thay giả thiết tập hợp E gồm năm điểm với một tập chỉ chứa ba điểm.

Định lí 2.2.11. *Cho E là tập bất kì gồm ba số phức. Khi đó tồn tại hàm phân hình không chuẩn tắc g trên $\mathbb{D}$ sao cho $g^{\#}(z) = 0$ với $g(z) \in E$.*

Chứng minh. Cho f là hàm được sử dụng trong định lý 2.2.10, cho $E = \{a, b, c\}$ và $L(z)$ là phép biến đổi tuyến tính sao cho $L(e_1) = a, L(e_2) = b, L(e_3) = c$. Khi đó $g(z) = L(f(z))$ là hàm không chuẩn tắc, nhưng $g^{\#}(z) = L^{\#}(f(z))|f'(z)| = 0$ với $f(z) \in \{e_1, e_2, e_3\}$ và $g(z) \in E$. Mặt khác $g^{\#}(z) = 0$ với $g(z) \in \{a, b, c, L(\infty)\}$. Do vậy chúng ta chỉ cần chỉ ra rằng E là tập bất kì bao gồm ba điểm thì có một tập E' chứa E sao cho định lý 2.2.9 không đúng với tập E'. Bằng cách chọn điểm thứ tư này bắt buộc là các giá trị e_1, e_2, e_3 của hàm Weierstrass $\mathscr{P}$ và chúng phải thỏa mãn điều kiện $e_1 + e_2 + e_3 = 0$. Theo định lý 2.2.10 thì định lý được chứng minh.

Sau đây chúng tôi xây dựng một tính chất tương tự định lý 2.2.9 mở rộng cho hàm phân hình φ - chuẩn tắc và hàm phân hình φ - chuẩn tắc mạnh .

Định lí 2.2.12. *Giả sử $\varphi : [0, 1) \to (0, \infty)$ là hàm tăng nhẫn và $f \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$. Khi đó*
i) $f \in \mathcal{N}^{\varphi}$ khi và chỉ khi tồn tại một tập E gồm năm giá trị phân biệt trên $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sao cho

$$\sup\{f^{\#}(z)/\varphi(|z|) : z \in \mathbb{D}, f(z) \in E\} < \infty$$

ii) $f \in \mathcal{N}_0^{\varphi}$ khi và chỉ khi tồn tại một tập E gồm năm giá trị phân biệt trên $\hat{\mathbb{C}}$ với các tạo ảnh sao cho

$$\lim_{|z| \to 1^-, f(z) \in E} f^{\#}(z)/\varphi(|z|) = 0.$$

*Chứng minh.*i) Điều kiện cần của mệnh đề được suy ra từ định nghĩa hàm φ- chuẩn tắc.

Điều kiện đủ của mệnh đề i) tương đương với mệnh đề sau: Nếu f không là hàm φ-chuẩn tắc thì với mỗi số phức λ, với ít nhất bốn ngoại lệ,

$$\sup\{f^{\#}(z)/\varphi(|z|) : z \in f^{-1}(\lambda)\} = \infty.$$

Ta sẽ chứng minh mệnh đề tương đương này.

Giả sử f là hàm phân hình trên $\mathbb{D}$ sao cho $f \notin \mathcal{N}^{\varphi}$. Theo định lí 2.2.8 mệnh đề i) với $\beta = 0$, tồn tại dãy $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ trên $\mathbb{D}$ và dãy các số thực dương ρ_n, dãy các số thực dương σ_n thỏa mãn $\sigma_n \to 0$ khi $n \to \infty$, một hằng số $c > 0$ thỏa mãn $\varphi(|z_n|)\rho_n \leq c\sigma_n$ và hàm phân hình khác hằng

g trên mặt phức mở rộng sao cho dãy hàm $\{g_n\}$ hội tụ đều tới g, với $g_n = f(z_n + \rho_n t)$ với mỗi số nguyên dương n. Cho λ là một số phức bất kì, hữu hạn hoặc vô hạn, để phương trình $g(t) = \lambda$ có một nghiệm t_0 không phải là nghiệm kép, tức là $g^{\#}(t_0) \neq 0$. Theo định lí Hurwitz, trên mỗi lân cận của t_0 tất cả trừ một số hữu hạn các hàm g_n có giá trị λ. Do đó tồn tại một dãy các điểm t_n sao cho $t_n \to t_0$ và $g_n(t_n) = \lambda$ với n đủ lớn. Mặt khác, do $\{g_n\}$ hội tụ đều tới g nên ta có $g_n^{\#}(t_n) \to g^{\#}(t_0)$. Đặt $s_n = z_n + \rho_n t_n$, ta có $g_n^{\#}(t_n) = \rho_n f^{\#}(s_n)$ để

$$\begin{aligned}\frac{f^{\#}(s_n)}{\varphi(|s_n|)} = \frac{g_n^{\#}(t_n)}{\rho_n\varphi(|s_n|)} &= \frac{g_n^{\#}(t_n)}{\rho_n\varphi(|z_n|)}\frac{\varphi(|z_n|)}{\varphi(|z_n+\rho_n t_n|)}\\ &= \frac{g_n^{\#}(t_n)}{\rho_n\varphi(|z_n|)}\frac{\psi(|z_n+\rho_n t_n|)}{\psi(|z_n|)}\end{aligned}$$

Cho $n \to \infty$, ta có $g_n^{\#}(t_n) \to g^{\#}(t_0)$, $\rho_n\varphi(|z_n|) \to 0$, $\dfrac{\psi(|z_n+\rho_n t_n|)}{\psi(|z_n|)} \to 1$, do vậy $\dfrac{f^{\#}(s_n)}{\varphi(|s_n|)} \to \infty$.

Bây giờ ta chứng minh rằng nếu phương trình $g(t) = \lambda$ có một nghiệm mà không phải nghiệm kép thì

$$\sup\{f^{\#}(z)/\varphi(|z|) : z \in f^{-1}(\lambda)\} = \infty.$$

Tuy nhiên có thể có nhiều nhất bốn giá trị λ mà tất cả các nghiệm của phương trình $g(t) = \lambda$ là nghiệm kép. Do vậy mệnh đề i) được chứng minh.

ii) Điều kiện cần của mệnh đề được suy ra từ định nghĩa hàm φ- chuẩn tắc mạnh.

Điều kiện đủ của mệnh đề tương đương với mệnh đề sau: Nếu f không là hàm $\varphi-$chuẩn tắc mạnh thì với mỗi số phức λ, với ít nhất bốn ngoại lệ, tồn tại hằng số c sao cho

$$\lim_{|z|\to 1^-, z\in f^{-1}(\lambda)} f^{\#}(z)/\varphi(|z|) = c > 0.$$

Ta sẽ chứng minh mệnh đề tương đương này.

Giả sử f là hàm phân hình trên $\mathbb{D}$ sao cho $f \notin \mathcal{N}_0^{\varphi}$. Theo định lí 2.2.8

mệnh đề ii) tồn tại dãy $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ trên $\mathbb{D}$, $|z_n| \to 1^-$ khi $n \to \infty$ và dãy các số thực dương ρ_n, một hằng số $R > 0$ thỏa mãn $\varphi(|z_n|)\rho_n < 1/R$ và hàm phân hình khác hằng g trên mặt phức mở rộng sao cho dãy hàm $\{g_n\}$ hội tụ đều tới g, với $g_n = f(z_n + \rho_n t)$ với mỗi số nguyên dương n. Cho λ là một số phức bất kì, hữu hạn hoặc vô hạn, để phương trình $g(t) = \lambda$ có một nghiệm t_0 không phải là nghiệm kép, tức là $g^{\#}(t_0) \neq 0$. Theo định lí Hurwitz, trên mỗi lân cận của t_0 tất cả trừ một số hữu hạn các hàm g_n có giá trị λ. Do đó tồn tại một dãy các điểm t_n sao cho $t_n \to t_0$ và $g_n(t_n) = \lambda$ với n đủ lớn. Mặt khác, do $\{g_n\}$ hội tụ đều tới g nên ta có $g_n^{\#}(t_n) \to g^{\#}(t_0)$. Đặt $s_n = z_n + \rho_n t_n$, ta có $g_n^{\#}(t_n) = \rho_n f^{\#}(s_n)$ để

$$\begin{aligned}\frac{f^{\#}(s_n)}{\varphi(|s_n|)} = \frac{g_n^{\#}(t_n)}{\rho_n\varphi(|s_n|)} &= \frac{g_n^{\#}(t_n)}{\rho_n\varphi(|z_n|)}\frac{\varphi(|z_n|)}{\varphi(|z_n + \rho_n t_n|)} \\ &= \frac{g_n^{\#}(t_n)}{\rho_n\varphi(|z_n|)}\frac{\psi(|z_n + \rho_n t_n|)}{\psi(|z_n|)}\end{aligned}$$

Cho $n \to \infty$, ta có $g_n^{\#}(t_n) \to g^{\#}(t_0)$, $\rho_n\varphi(|z_n|) < 1/R$, $\dfrac{\psi(|z_n + \rho_n t_n|)}{\psi(|z_n|)} \to 1$, do vậy $\dfrac{f^{\#}(s_n)}{\varphi(|s_n|)} \to c$.

Bây giờ ta chứng minh rằng nếu phương trình $g(t) = \lambda$ có một nghiệm mà không phải nghiệm kép thì

$$\lim_{|z| \to 1^-, f(z) \in E} f^{\#}(z)/\varphi(|z|) = c.$$

Tuy nhiên có thể có nhiều nhất bốn giá trị λ mà tất cả các nghiệm của phương trình $g(t) = \lambda$ là nghiệm kép. Do vậy mệnh đề ii) được chứng minh.

Hệ quả 2.2.13. *Giả sử $\varphi : [0, 1) \to (0, \infty)$ là hàm tăng nhẵn và $f \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$. Khi đó*
i) $f \in \mathcal{N}^{\varphi}$ khi và chỉ khi tồn tại $R > 0$ và $M_R > 0$ sao cho

$$\sup\{f'(z)/\varphi(|z|) : |f(z)| < R\} < M_R$$

ii) $f \in \mathcal{N}_0^{\varphi}$ khi và chỉ khi tồn tại $R > 0$ sao cho

$$\lim_{|z| \to 1^-, |f(z)| < R} |f'(z)/\varphi(|z|)| = 0.$$

Chứng minh. i) Giả sử $f \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ và $R > 0$. Nếu $\sup\{f'(z)/\varphi(|z|) : |f(z)| < R\} < \infty$ thì định lý 2.2.12 suy ra $f \in \mathcal{N}^{\varphi}$. Ngược lại, nếu $f \in \mathcal{N}^{\varphi}$ thì

$$\sup_{|f(z)|<R} \frac{|f'(z)|}{\varphi(|z|)} = \sup_{|f(z)|<R} (1 + |f(z)|^2) \frac{f^{\#}(z)}{\varphi(|z|)} \leq (1 + R^2)\|f\|_{\mathcal{N}^{\varphi}}.$$

ii) Giả sử $f \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ và $R > 0$. Nếu $\lim\limits_{|z|\to 1^-, |f(z)|<R} |f'(z)/\varphi(|z|)| = 0$ thì định lý 2.2.12 suy ra $f \in \mathcal{N}_0^{\varphi}$. Ngược lại, nếu $f \in \mathcal{N}_0^{\varphi}$ thì

$$\begin{aligned}\lim_{|z|\to 1^-, |f(z)|<R} \frac{|f'(z)|}{\varphi(|z|)} &= \lim_{|z|\to 1^-, |f(z)|<R} (1 + |f(z)|^2) \frac{f^{\#}(z)}{\varphi(|z|)} \\ &\leq (1 + R^2) \lim_{|z|\to 1^-} \frac{f^{\#}(z)}{\varphi(|z|)} = 0.\end{aligned}$$

Định lí 2.2.14. *Giả sử $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ và $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ là hai dãy nội suy rời nhau trên $\mathbb{D}$. Khi đó B_1/B_2 là chuẩn tắc trên $\mathbb{D}$ khi và chỉ khi $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ là nội suy.*

Chứng minh. Giả sử B_1/B_2 là chuẩn tắc trên $\mathbb{D}$. Khi đó

$$f^{\#}(z) \leq C|dz|/(1 - |z|^2)$$

với $|z| < 1$ và C là hằng số dương. Chọn $z = z_n$ ta có

$$|B_2(z_n)| \geq (1/C)|B_1'(z_n)|(1 - |z_n|^2)$$

Mà

$$\frac{|z_k|}{-z_k} . \frac{1 - \bar{z}_k z}{z - z_k} B_1(z) = \prod_{n=1, n\neq k}^{\infty} \frac{-z_n}{|z_n|} . \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z} := \prod_j (z)$$

Khi đó

$$B_1(z) = \frac{-z_k}{|z_k|} . \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z} . \prod_j (z)$$

Theo định lí 1.2.15 ta có $|\prod_j (z_k)| \geq \delta > 0$. Do đó

$$lim \inf |B_2(z_k)| \geq (1/C)\delta > 0$$

Vậy $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ là nội suy. Ngược lại, ta có $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ là nội suy. Giả sử $B_1/B_2 \notin \mathcal{N}$. Khi đó tập hợp các số thỏa mãn

$$|f'(z)|(1-|z|^2)/(1+|f(z)|^2)$$

không bị chặn, nên phải tồn tại một dãy $\{z_k\}$ trên $\mathbb{D}$ sao cho

$$|B_1(z_k)|^2 + |B_2(z_k)|^2 \to 0$$

khi $k \to \infty$. Theo định lí 1.2.12, phải tồn tại dãy con của $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ và $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ tương ứng là α_{k_n} và β_{jk_n} sao cho $\psi(z_{k_n}, \alpha_{k_n}) \to 0$ và $\psi(z_{jk_n}, \beta_{jk_n}) \to 0$. Do đó $\psi(\alpha_{jk_n}, \beta_{jk_n}) \to 0$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. vậy $B_1/B_2 \in \mathcal{N}$.

Định lí sau đây là tổng quát của định lí 2.2.14 cho hàm phân hình φ - chuẩn tắc và φ - chuẩn tắc mạnh.

Định lí 2.2.15. *Giả sử B_1 và B_2 là tích Blaschke nội suy với hai dãy rời nhau $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ và $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ và $\varphi : [0,1) \to (0,\infty)$ là hàm tăng nhẵn. Khi đó*
i) Các mệnh đề sau tương đương:
(1) $B_1/B_2 \in \mathcal{N}^{\varphi}$;
(2) $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ là φ-tách;
(3) $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ là φ-tách đều.
ii) Các mệnh đề sau tương đương:
(1) $B_1/B_2 \in \mathcal{N}_0^{\varphi}$;
(2) $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ là φ-tách mạnh;
(3) $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ là φ-tách đều mạnh.

Chứng minh. i) Nếu $B_1/B_2 \in \mathcal{N}^{\varphi}$ thì tồn tại $C > 0$ sao cho

$$\left(\frac{B_1}{B_2}\right)^{\#}(z) = \frac{|B_1'(z)B_2(z) - B_1(z)B_2'(z)|}{|B_1(z)|^2 + |B_2(z)|^2} \leq C\varphi(|z|) \qquad (2.2.16)$$

với mọi $z \in \mathbb{D}$. Chọn $z = z_n$, ta được $B_1'(z_n) \leq C|B_2(z_n)|\varphi(|z_n|)$. Ta có

$$B_1'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|z_j|}{z_j} \left(\frac{|z_j|^2 - 2}{1 - \overline{z}_j} \prod_{k \neq j} \frac{|z_k|}{z_k} \frac{z_k - z}{1 - \overline{z_k} z} \right), \qquad (2.2.17)$$

$$|B_1'(z_n)| = \frac{1}{1-|z_n|^2}\prod_{k\neq n}\rho(z_k, z_n)$$

Từ (2.2.17) và $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ là tách đều, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\prod_{k=1}^{\infty}\rho(w_k, z_n)\prod_{k\neq n}\rho(z_k, z_n) = |B_2(z_n)|\prod_{k\neq n}\rho(z_k, z_n)$$
$$\geq \frac{(\prod_{k\neq n}\rho(z_k, z))^2}{c\varphi(|z_n|)(1-|z_n|^2)} \geq \frac{\delta^2/C}{\varphi(|z_n|)(1-|z_n|^2}$$

với mọi $z \in \mathbb{N}$. Do tính đối xứng nên $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ là φ-tách đều và do đó nó là φ-tách. Vậy ta đã chứng minh được (1) suy ra (3) và (3) suy ra (2).

Để chứng minh (2) suy ra (1), ta giả sử phản chứng rằng $B_1/B_2 \notin \mathcal{N}^{\varphi}$. Cho $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy điểm trên $\mathbb{D}$ sao cho (2.1.4) không thoả mãn. Từ đẳng thức trong (2.2.16) và Bổ đề Schwarz-Pick, ta có

$$\left(\frac{B_1}{B_2}\right)^{\#}(z) \leq \frac{1}{|B_1(z)|(1-|z|^2)} + \frac{1}{|B_2(z)|(1-|z|^2)}$$

với mọi $z \in \mathbb{D}$. Do đó, bằng cách chọn dãy con nếu cần thiết, ta có

$$|B_i(a_k)|\varphi(|a_k|)(1-|a_k|^2) \to 0, \quad k \to \infty \tag{2.2.18}$$

với hoặc $i = 1$ hoặc $i = 2$. Thực tế ta có (2.2.18) chạy theo hai chỉ số. Thật vậy, nếu nó thỏa mãn với $i = 1$ và nếu giới hạn dưới bằng $\gamma > 0$ với $i = 2$, thì $|B_1(a_k)|/|B_2(a_k)| = o(1)$ khi $k \to \infty$. Suy ra

$$\left(\frac{B_1}{B_2}\right)^{\#}(a_k) \leq \frac{1}{|B_2(a_k)|(1-|a_k|^2)}\left(1 + |\frac{B_1(a_k)}{B_2(a_k)}|\right)$$
$$= \frac{\varphi(|a_k|)}{\gamma}(1+o(1)), \quad k \to \infty.$$

Điều này mâu thuẫn với giả sử ban đầu của dãy $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, do vậy (2.2.18) phải thỏa mãn với hai chỉ số. Bằng cách lấy dãy con nếu cần thiết, từ (2.2.18) và định lí 1.2.12 ta có $\rho(z_n, a_n)$ và $\rho(w_n, a_n)$ tiến dần về 0 khi

$n \to \infty$. Do dãy $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ là tách đều, theo bất đẳng thức tam giác và bổ đề Schwarz - Pick ta có

$$\delta \leq \prod_{k \neq n} \rho(z_k, z_n) = \rho\left(\prod_{k \neq n} \frac{z_k - z_n}{1 - \bar{z}_k z_n}, 0\right)$$
$$\leq \rho\left(\prod_{k \neq n} \frac{z_k - z_n}{1 - \bar{z}_k z_n}, \prod_{k \leq n} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z}\right) + \prod_{k \neq n} \rho(z_k, z) \leq \rho(z_n, z) + \prod_{k \neq n} \rho(z_k, z)$$

với mọi $z \in \mathbb{D}$; đặc biệt

$$|B_1(a_n)| \geq \rho(z_n, a_n)(\delta - \rho(z_n, a_n)).$$

Do đó $|B_1(a_n)| \geq \rho(z_n, a_n)\delta/2$ với mọi n đủ lớn. Điều này kết hợp với (2.2.18) ta được

$$\rho(z_n, a_n)\varphi(|a_n|)(1 - |a_n|^2) \to 0, \quad n \to \infty \tag{2.2.19}$$

Tương tự ta có

$$\rho(z_n, w_n)\varphi(|a_n|)(1 - |a_n|^2) \to 0, \quad n \to \infty \tag{2.2.20}$$

Từ $\rho(a_n, z_n) \to 0$ khi $n \to \infty$, ta có

$$\frac{1 - |a_n|^2}{1 - |z_n|^2} \to 1, \quad n \to \infty \tag{2.2.21}$$

Nếu $|z_n| \leq |a_n|$, thì $\varphi(|a_n|) \geq \varphi(|z_n|)$ do sự đơn điệu của hàm φ. Nếu $|z_n| \geq |a_n|$, thì (2.2.19) suy ra $|z_n - a_n| \leq 1/\varphi(|a_n|)$ với mọi n đủ lớn, và kết hợp với (2.1.3) ta được

$$\varphi(|a_n|)/\varphi(|z_n|) \to 1 \tag{2.2.22}$$

khi $n \to \infty$. Kết hợp (2.2.20),(2.2.21),(2.2.22), ta được

$$\rho(z_n, w_n)\varphi(|z_n|)(1 - |z_n|^2) \to 0, \quad n \to \infty$$

và do đó $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ không là φ-tách. Vậy (2) suy (1).
ii) Nếu $B_1/B_2 \in \mathcal{N}_0^{\varphi}$ thì tương tự như trên thay C bởi $o(1)$ khi $n \to \infty$, ta được $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ là φ-tách đều mạnh và do đó nó là φ tách

mạnh.

Để chứng minh (2') suy ra (1'), giả sử phản chứng rằng $B_1/B_2 \notin \mathcal{N}_0^{\varphi}$. Cho $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy điểm trên $\mathbb{D}$ sao cho (2.1.5) không thoả mãn. Lý luận tương tự như trong i) ta được

$$\lim_{k\to\infty} |B_i(a_k)|\varphi(|a_k|)(1-|a_k|^2) \in (0;\infty), \quad i = 1, 2. \tag{2.2.23}$$

Hơn nữa, bằng cách chọn dãy con nếu cần thiết, ta thu được

$$\lim_{n\to\infty} \rho(z_n, w_n)\varphi(|z_n|)(1-|z_n|^2) < \infty;$$

do đó $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ không là φ-tách mạnh. Vậy (2') suy (1').

Kết luận - Kiến nghị

Kết quả đã đạt được

1. Đề tài đã đưa ra ví dụ minh họa cho câu hỏi của bài báo [13] .

2. Đề tài đã chứng minh một kết quả cho hàm φ - chuẩn tắc, và hàm φ - chuẩn tắc mạnh. Cụ thể là định lí 2.2.12, định lí 2.2.8 ii)

3. Đề tài đã mở rộng kết quả cho hàm phân hình φ- chuẩn tắc mạnh $f \in \mathcal{N}_0^{\varphi}$. Cụ thể là hệ quả 2.2.13

Hướng phát triển của đề tài

- Như ta đã biết, ánh xạ phân hình là khái niệm mở rộng của hàm phân hình, hàm phân hình lại là khái niệm mở rộng của hàm chỉnh hình trong môn giải tích phức. Một vấn đề cũng khá được quan tâm là nghiên cứu họ chuẩn tắc của các ánh xạ phân hình. Khái niệm này khá hay, và cũng là khái niệm "yếu" , do vậy, trong hướng nghiên cứu tiếp theo, nhóm chúng tôi sẽ quan tâm xây dựng và phát triển các tính chất của hàm phân hình chuẩn tắc cho ánh xạ phân hình chuẩn tắc.
- Lấy ví dụ minh họa cho các kết quả đạt được ở trên.
- Nghiên cứu và xây dựng các tính chất của hàm phân hình chuẩn tắc với biểu thức mở rộng của đạo hàm cầu.
- Nghiên cứu chiều ngược lại của định lí 2.2.5

Tài liệu tham khảo

[1] R. Aulaskari, S. Makhmutov, and J. Rättyä, *Results on meromorphic φ normal functions*, Complex Var. Elliptic Equ. **54** (2009), 855-863.

[2] R. Aulaskari and J. Rättyä, *Nevanlinna class contains functions whose spherical derivatives grow arbitrarily fast*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **34**(2009), 387-390.

[3] R. Aulaskari and J. Rättyä, *Properties of meromorphic φ - normal functions*, Michigan Math. J. **60**(2011), 93-111.

[4] R. Aulaskari and H. Wulan, *An version of the Lohwater-Pommerenke theorem for strongly normal functions*, Comput. Methods Funct. Theory. **1** (2001), 99-105.

[5] D. Campell, *Nonnormal sums and products of unbounded normal functions, II*, Proc. Amer. Math. Soc, **74** (1979), 202-203.

[6] Chi - Tai Chuang, *Normal families of meromorphic functions*, Utopia Press, Singapore,1993

[7] J. Cima and P. Colwell, *Blaschke quotients and normality*, Proc. Amer. Math. Soc, **21** (1968), 796-798.

[8] F. Colona, *On normality of Blaschke quotients*, Proc. Amer. Math. Soc. **102** (1988), 71-77.

[9] W. K. Hayman, *Meromorphic functions,* Oxford Math. Monogr., Clarendon Press, Oxford, 1964.

[10] E. Hille, *Analytic function theory,* V.II, New York,1962.

[11] P. Lappan, *Non-normal sums and products of unbounded normal functions*, Michigan Math. J. **8** (1961), 187-192.

[12] P. Lappan, *A criterion for a meromorphic function to be normal*, Comment. Math. Helv. **49** (1974), 492-495.

[13] P. Lappan, *The spherical derivative and normal functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. **3** (1977), 301-310.

[14] O. Lehto and K.I. Virtanen, *Boundary behaviour and normal meromorphic functions*, Acta Math.**97** (1957), 47-65.

[15] X. Pang, *Bloch's principle and normal criterion*, Sci. China Ser. A. **32** (1989), 782-791.

[16] J. L. Schiff, *Normal families*, Spinger-Verlag, New York, 1993.

[17] S. Yamashita, *On normal meromorphic functions*, Math . Z. **141** (1975), 139-145.