TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ
KHOA TỰ NHIÊN

Nguyễn Thị Thu Hoài

ĐỀ TÀI:
ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC VÀO GIẢI TOÁN Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

KHÓA LUẬN TỐT NGHIỆP ĐẠI HỌC
CHUYÊN NGHÀNH SƯ PHẠM

Hệ đào tạo: Chính quy
Khóa học: 2016-2020

NINH BÌNH, 2020

TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ

KHOA TỰ NHIÊN

Nguyễn Thị Thu Hoài

ĐỀ TÀI:

ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC VÀO GIẢI TOÁN Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

KHÓA LUẬN TỐT NGHIỆP ĐẠI HỌC

CHUYÊN NGHÀNH SƯ PHẠM

Hệ đào tạo: Chính quy

Khóa học: 2016-2020

NGƯỜI HƯỚNG DẪN: Th.S ĐẶNG THỊ THU HIỀN

Ninh Bình, năm 2020

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM

Độc lập – Tự do - Hạnh phúc

LỜI CAM ĐOAN

Kính gửi: - Ban giám hiệu trường Đại học Hoa Lư.

- Phòng đào tạo trường Đại học Hoa Lư.
- Khoa Tự nhiên trường Đại học Hoa Lư.

Tên em là: Nguyễn Thị Thu Hoài.

Lớp: D9 Toán - Khoa Tự nhiên.

Đề tài Nghiên cứu khoa học *"Ứng dụng của phương pháp quy nạp toán học trong giải toán ở trường trung học phổ thông"* là sản phẩm cá nhân của em trong quá trình tìm hiểu, nghiên cứu và làm khóa luận.

Em xin khẳng định và cam đoan toàn bộ nội dung, kết quả nghiên cứu là của cá nhân em dựa trên cơ sở tham khảo một số tài liệu, hoàn toàn không sao chép từ bất cứ tài liệu nào.

Ninh Bình, ngày 05 tháng 05 năm 2020

Sinh viên

Nguyễn Thị Thu Hoài

LỜI CẢM ƠN

Khóa luận được hoàn thành dưới sự quan tâm và hướng dẫn tận tình của cô Đặng Thị Thu Hiền. Nhân dịp này, em xin được gửi tới cô lời cảm ơn chân thành và sâu sắc nhất.

Em xin được bày tỏ lòng biết ơn đến quý thầy cô giáo đã giảng dạy lớp D9 Toán khóa 2016 - 2020 của trường Đại học Hoa Lư, đặc biệt là các thầy cô trong Bộ môn Toán - Khoa Tự nhiên đã giảng dạy tận tình và quan tâm, động viên em trong suốt quá trình học tập và thực hiện đề tài.

Em cũng xin gửi lời cảm ơn những người thân trong gia đình, bạn bè, tập thể lớp D9 Toán đã luôn ủng hộ, động viên và nhiệt tình giúp đỡ em trong suốt thời gian vừa qua.

Tác giả

Mục lục

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Toán học là một môn khoa học suy diễn. Các kết luận của Toán học đều được chứng minh một cách chặt chẽ. Nhưng trong quá trình hình thành, trước khi có những kết luận mang tính tổng quát, toán học cũng đã phải tiến hành suy xét các trường hợp cụ thể, riêng biệt. Ta phải đối chiếu các quan sát được, thử đi thử lại, suy ra các điều tương tự, ... để từ đó dự đoán một định lý, một công thức, một tính chất toán học nào đó trước khi chứng minh chúng. Để làm được điều đó, người ta thường sử dụng quy nạp toán học.

Trong các kì thi học kì, thi THPT Quốc Gia, thi học sinh giỏi các cấp, các bài toán trong đại số, số học, hình học về chứng minh sự chia hết, chứng minh đẳng thức, chứng minh bất đẳng thức, xác định công thức tổng quát của dãy số,... thường xuất hiện, là dạng bài hay nhưng khá khó và phong phú về cách giải. Trong nhiều trường hợp các phương pháp khác không giải quyết được bài toán dạng này thì phương pháp quy nạp toán học được vận dụng giải rất hiệu quả, thể hiện thế mạnh của phương pháp ở một lớp bài toán nhất định.

Trong chương trình toán trung học phổ thông, phương pháp quy nạp toán học được đề cấp ở lớp 11 với thời lượng tiết rất ít nên phạm vi còn hạn chế, điều này gây khó khăn cho học sinh trong việc vận dụng phương pháp quy nạp toán học một cách linh hoạt vào các dạng toán trong số học, đại số, hình học.

Với niềm yêu thích Toán học, mong muốn tìm hiểu một cách có hệ thống và sâu sắc phương pháp quy nạp toán học, nhằm tích lũy cho mình những kĩ năng, kinh nghiệm, em lựa chọn đề tài nghiên cứu ***"Ứng dụng của phương pháp quy nạp toán học vào giải toán ở trường trung học phổ thông"***.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

2.1 Mục đích nghiên cứu

Nghiên cứu ứng dụng của phương pháp quy nạp toán học trong giải một số dạng toán ở trường THPT: Chứng minh sự chia hết, chứng minh đẳng thức, chứng minh bất đẳng thức, một số bài toán về dãy số, một số bài toán về hình học. Từ đó, giúp học sinh vận dụng phương pháp quy nạp toán học vào giải toán một cách linh hoạt, chủ động và sáng tạo.

2.2 Nhiệm vụ nghiên cứu

- Nghiên cứu phép quy nạp, phương pháp quy nạp toán học.
- Nghiên cứu ứng dụng của phương pháp quy nạp toán học vào giải toán ở trường THPT.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

3.1 Đối tượng nghiên cứu: Quy nạp toán học và một số bài toán được giải bằng phương pháp quy nạp toán học trong chương trình Toán THPT.

3.2 Phạm vi nghiên cứu: Nghiên cứu ứng dụng của phương pháp quy nạp toán học để giải một số dạng toán ở trường THPT: Chứng minh sự chia hết, chứng minh đẳng thức, chứng minh bất đẳng thức, một số bài toán về dãy số, một số bài toán về hình học.

4. Phương pháp nghiên cứu

- *Phương pháp nghiên cứu lý luận*: Đọc và nghiên cứu các tài liệu liên quan đến đề tài.
- *Phương pháp phỏng vấn*: Trao đổi với các thầy cô giáo ở bộ môn Toán trường Đại học Hoa Lư về một số bài toán giải được bằng phương pháp quy nạp toán học.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Việc nghiên cứu phương pháp quy nạp toán học và ứng dụng của phương pháp này trong việc giải toán ở trường THPT sẽ giúp bản thân hiểu sâu sắc các kiến thức trên trong quá trình học tập và nghiên cứu Toán học.

Kết quả nghiên cứu của đề tài là nguồn tài liệu tham khảo hữu ích cho sinh viên ngành sư phạm Toán, cho học sinh, cho giáo viên trường THPT về ứng dụng của phương pháp quy nạp toán học vào giải toán.

6. Bố cục của khóa luận

Nội dung chính của khóa luận được trình bày trong 2 chương:

Chương 1: *Cơ sở lý thuyết.*

Chương 2: *Ứng dụng của phương pháp quy nạp toán học vào giải toán ở trường trung học phổ thông.*

Chương 1 được dành cho việc trình bày chi tiết các kiến thức cơ bản về phương pháp quy nạp.

Chương 2 được dành cho việc trình bày một số ứng dụng của phương pháp quy nạp.

Chương 1

Cơ sở lý thuyết

1.1 Phép quy nạp không hoàn toàn và phép quy nạp hoàn toàn

1.1.1 Phép quy nạp hoàn toàn

Sơ đồ của phép quy nạp hoàn toàn :

đối tượng a_1 có tính chất P,

đối tượng a_2 có tính chất P,

đối tượng a_3 có tính chất P,

....

đối tượng a_n có tính chất P.

Đặt $S = \{a_1; a_2; a_3; ...; a_n\}$.

Ta có khẳng định: "Mọi phần tử thuộc S đều có tính chất P".

Quy nạp hoàn toàn là quy nạp trong đó khẳng định: *Tất cả đối tượng của lớp đang xét có tính chất P, trên cơ sở biết mỗi đối tượng của lớp này có tính chất P*. Nói cách khác, quy nạp hoàn toàn là một mệnh đề tổng quát được chứng minh theo từng trường hợp của một số hữu hạn các trường hợp có thể.

Ví dụ 1.1.1 *"Mỗi số chẵn trong khoảng* $[4; 22]$ *đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng của hai số nguyên tố".*

Bài giải

Ta có:

$$\begin{array}{ll} 4 = 2 + 2 & 14 = 11 + 3 \\ 6 = 3 + 3 & 16 = 13 + 3 \\ 8 = 5 + 3 & 18 = 13 + 5 \\ 10 = 7 + 3 & 20 = 17 + 3 \\ 12 = 7 + 5 & 22 = 17 + 5 \end{array}$$

Sau khi thử tất cả các trường hợp ta có thể kết luận rằng mỗi số chẵn trong khoảng được xét được biểu diễn dưới dạng tổng của hai số nguyên tố.

Ví dụ 1.1.2 *"Tổng lập phương của các tự nhiên liên tiếp trong khoảng* $[1; 5]$ *là bình phương của một số nguyên".*

Bài giải

Ta kiểm tra các trường hợp riêng khác nhau:

$$1^3 = 1^2,$$
$$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2,$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2,$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2,$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = 15^2.$$

Qua đó, ta có thể khẳng định rằng: "Tổng lập phương của các tự nhiên liên tiếp trong khoảng $[1; 5]$ là bình phương của một số nguyên".

Trong quy nạp hoàn toàn, kết luận chỉ khái quát được những trường hợp đã biết, chứ không đề cập đến những trường hợp chưa biết. Vì thế, quy nạp hoàn toàn tuy đầy đủ, chắc chắn nhưng nó không đem lại điều gì mới mẻ so với những điều đã được nêu ra trong tiền đề. Mặc dù có rất ít tác dụng đối với việc nghiên cứu, phát minh khoa học, nhưng nó cũng giúp chúng ta trong việc tóm tắt, trình bày các sự kiện.

1.1.2 Phép quy nạp không hoàn toàn

Trong trường hợp kết luận tổng quát rút ra không dựa trên sự kiểm tra tất cả các trường hợp có thể xảy ra mà chỉ trên cơ sở một số đủ lớn các trường hợp thì ta có quy nạp không hoàn toàn.

Quy nạp không hoàn toàn là quy nạp trong đó khẳng định rằng : *Tất cả các đối tượng của lớp đang xét có tính chất P trên cơ sở biết một số đối tượng của lớp này có tính chất P.*

Trong toán học, quy nạp không hoàn toàn không được xem là một phương pháp chứng minh chặt chẽ, do đó nó chỉ được áp dụng hạn chế. Bởi vì một mệnh đề toán học bao hàm một số vô hạn các trường hợp riêng, nhưng con người ra không thể tiến hành kiểm tra được hết tất cả các trường hợp. Như ở **Ví dụ 1.1.1**, sau khi kiểm hết 10 trường hợp với kết quả đúng, ta chưa thể đưa ra kết luận rằng: "Mọi số tự nhiên chẵn đều có thể phân tích thành tổng của hai số nguyên tố".

Ở **Ví dụ 1.1.2**, sau khi xét một số trường hợp riêng này, ta đưa ra dự đoán: *"Tổng lập phương của n số tự nhiên đầu tiên là bình phương của một số nguyên".* Trong nghiên cứu chương 2, chúng tôi chứng minh dự đoán này là đúng, cụ thể.

Suy luận bằng quy nạp không hoàn toàn không phải lúc nào cũng đem lại sự chính xác. Nó vẫn xảy ra một số trường hợp ngoại lệ, làm chúng ta đưa ra những kết luận sai lầm như ở các ví dụ sau:

Ví dụ 1.1.3 *Khi xét các số có dạng* $F_n = 2^{2^n} + 1$ *nhà toán học Fecma đã nhận được các số nguyên tố với* $n = 0, 1, 2, 3, 4.$

$$F_0 = 2^1 + 1 = 3,$$
$$F_1 = 2^2 + 1 = 5,$$
$$F_2 = 2^4 + 1 = 17,$$
$$F_3 = 2^8 + 1 = 257,$$
$$F_4 = 2^{16} + 1 = 65537.$$

Từ đó ông suy ra kết luận rằng tất cả các số có dạng $F_n = 2^{2^n} + 1$ đều là số nguyên tố. Nhưng nhà toán học Euclid đã chỉ ra với $n = 5$ thì F_n không phải là số nguyên tố, vì:

$F_5 = 2^{32} + 1 = 641 \cdot 6700417.$

Ví dụ 1.1.4 *Khi xét các số có dạng $n^p - n$ nhà toán học Đức Leibniz đã chứng minh được với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 - n \vdots 3, n^5 - n \vdots 5, n^7 - n \vdots 7$. Từ đó ông dự đoán với mọi n nguyên dương, và với mọi số lẻ p thì $n^p - n \vdots p$. Tuy nhiên, chỉ ít lâu sau đó, ông lại phát hiện ra $2^9 - 2 = 510$ không chia hết cho 9.*

1.2 Phương pháp quy nạp toán học

1.2.1 Phương pháp quy nạp toán học

Ta thấy, quy nạp không hoàn toàn là một trong những con đường giúp ta tìm ra chân lý mới; người ta nghiên cứu một số hữu hạn các trường hợp riêng để tìm ra quy luật tổng quát. Tuy nhiên, quy nạp không hoàn toàn cũng có những mặt hạn chế của nó và khiến ta đưa ra kết luận sai lầm.

Vậy làm thế nào để biết được quy luật tổng quát mà ta đưa ra là đúng? Ta không thể thử hết tất cả các trường hợp để biết xem có trường hợp riêng nào mà kết luận đó không đúng không.

Để tránh những khó khăn như thế, ta áp dụng một phương pháp suy luận đặc biệt gọi là **"Phương pháp quy nạp toán học"**. Nội dung của phương pháp này như sau:

Phương pháp quy nạp toán học.

Để chứng minh những mệnh đề liên quan đến số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$ là đúng với mọi n mà không thể thử trực tiếp được thì ta có thể làm như sau:

Bước cơ sở: *Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n = 1$.*

Bước quy nạp : *Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì $n = k \geq 1$ (gọi là giả thiết quy nạp), chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.*

Ta có thể hình dung như sau: Mệnh đề đã đúng khi $n = 1$ nên theo kết quả bước 2, nó cũng đúng với $n = 1 + 1$. Vì nó đúng với $n = 2$ nên lại theo kết quả ở bước 2, nó đúng với $n = 2 + 1 = 3, ...$Bằng cách ấy ta có thể khẳng định rằng mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 1.2.1 *Chứng minh đẳng thức*

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta phải chứng minh

$$1 = \frac{1.2}{2} \text{ (đúng)}.$$

Vậy đẳng thức đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử, đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Ta phải chứng minh đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là

$$1 + 2 + 3 + ... + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + ... + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đúng với $n = k + 1$. Theo phương pháp quy nạp toán học, đẳng thức trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

1.2.2 Một số dạng khác của phép chứng minh quy nạp

a) Trong nhiều bài toán để chứng minh mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$, không phải $n \geq 1$ ta làm như sau:

<u>Bước cơ sở:</u> Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n = n_0$.

<u>Bước quy nạp:</u> Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì $n = k \geq n_0$ (gọi là giả thiết quy nạp), chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.

Ví dụ 1.2.2 *Chứng minh rằng:*

$$3^n > 3n + 1, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 2$, ta phải chứng minh

$$3^2 > 3.2 + 1 \text{ (đúng)}.$$

Vậy khẳng định đúng với $n = 2$.

Bước quy nạp: Giả sử, khẳng định đúng với $n = k \geq 2$, tức là

$$3^k > 3k + 1.$$

Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là

$$3^{k+1} > 3k + 4.$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} 3^{k+1} &= 3.3^k > 3(3k + 1) = 9k + 3 \\ &= (3k + 4) + (6k - 1) > 3k + 4 \text{ (vì } 6k - 1 > 0, \forall k \geq 2). \end{aligned}$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định đúng với mọi $n \geq 2$.

b) Để chứng minh mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi $n \geq n_0$ ta làm như sau:

<u>Bước 1:</u> Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n = n_0, n = n_0 + 1$.

<u>Bước 2:</u> Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì $n = k - 1$, $n = k, k \geq n_0 + 1$ (gọi là giả thiết quy nạp), chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.

c) Quy nạp lùi

Nguyên lý quy nạp lùi: Cho $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ là một dãy vô hạn các số nguyên dương mà $\lim\limits_{k\to\infty} m_k = \infty$.

Giả sử $P(n)$ là một mệnh đề của biến n biến thiên trên tập $\mathbb{N}^*$ sao cho $P(m_k)$ đúng với mọi $k \in \mathbb{N}^*$. Hơn nữa, với mọi số nguyên dương $n > 1$, nếu $P(n)$ đúng thì $P(n-1)$ cũng đúng.

Khi đó, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

Trong chương 2, chúng tôi có ví dụ vận dụng các dạng khác của phương pháp quy nạp.

Chương 2

Ứng dụng của phương pháp quy nạp toán học vào giải toán ở trường trung học phổ thông

Chương này sẽ nghiên cứu ứng dụng của phương pháp quy nạp toán học vào giải toán ở trường trung học phổ thông. Cụ thể, là ứng dụng trong số học, đại số, hình học liên quan đến dạng toán như: Chứng minh sự chia hết, chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức, bài toán tìm số hạng tổng quát của một dãy số, một số bài toán hình học.

2.1 Chứng minh sự chia hết

Nhắc lại một số kiến thức cơ bản liên quan đến sự chia hết.

Định nghĩa: Cho 2 số nguyên a và $b, b \neq 0$. Ta nói, a chia hết cho b nếu tồn tại số nguyên q sao cho $a = bq$.

Kí hiệu: $a \vdots b$.

Tính chất:

- $a \vdots a, \forall a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$.
- Nếu $\begin{cases} a \vdots c \\ b \vdots c \end{cases}$ thì $ax + by \vdots c, \forall a, b, c, x, y \in \mathbb{Z}, c \neq 0$.

  Tổng quát: Nếu $a_1 \vdots b, a_2 \vdots b, ..., a_n \vdots b$ thì

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n) \vdots b$$

trong đó: $a_1, a_2, ..., a_n, x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.

- Nếu $\begin{cases} ab \ \vdots \ c \\ (b,c) = 1 \end{cases}$ thì $a \ \vdots \ c$.
- Với số nguyên tố p, nếu $a \not\vdots\, p$ thì $(a, p) = 1$.
- Với số nguyên tố p thì $C_p^k \ \vdots \ p$ với $1 \leq k < p$.

Ở phần này sẽ đưa ra một số bài tập về ứng dụng phương pháp quy nạp toán học để giải các bài toán chia hết ở trung học phổ thông.

Ví dụ 2.1.1 *Chứng minh rằng với n nguyên dương, ta có*

$$13^n - 1 \ \vdots \ 6.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta phải chứng minh

$$13^1 - 1 \ \vdots \ 6 \text{ (đúng)}.$$

Vậy khẳng định đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$13^k - 1 \ \vdots \ 6.$$

Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là

$$13^{k+1} - 1 \ \vdots \ 6.$$

Thật vậy, ta có

$$13^{k+1} - 1 = 13.13^k - 1 = 13(13^k - 1) + 12 \ \vdots \ 6 \text{ vì } \begin{cases} 13^k - 1 \ \vdots \ 6 \\ 12 \ \vdots \ 6 \end{cases}.$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định đúng với mọi n nguyên dương.

Ví dụ 2.1.2 *Chứng minh rằng*

$$n^3 + 5n \ \vdots \ 6, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta phải chứng minh

$$1^3 + 5.1 \,\vdots\, 6 \text{ (đúng)}.$$

Vậy khẳng định đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử, khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$k^3 + 5k \,\vdots\, 6.$$

Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là

$$(k+1)^3 + 5(k+1) \,\vdots\, 6.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} & (k+1)^3 + 5(k+1) \\ = \ & k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 \\ = \ & (k^3 + 5k) + 3k(k+1) + 6. \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{cases} k^3 + 5k & \vdots\, 6 \\ 3k(k+1) & \vdots\, 6 \Rightarrow (k^3 + 5k) + 3k(k+1) + 6 \,\vdots\, 6. \\ 6 & \vdots\, 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (k+1)^3 + 5(k+1) \,\vdots\, 6.$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 2.1.3 *Chứng minh rằng*

$$3^{3n+3} - 26n - 27 \,\vdots\, 676, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài giải

Bước cơ sở:Với $n = 1$, ta phải chứng minh

$$3^{3.1+3} - 26.1 - 27 \,\vdots\, 676 \ \Leftrightarrow 676 \,\vdots\, 676 \text{ (đúng)}.$$

Vậy khẳng định đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử, khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$3^{3k+3} - 26k - 27 \,\vdots\, 676.$$

Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là:

$$3^{3k+6} - 26(k+1) - 27 \,\vdots\, 676.$$

Thật vậy, ta có

$$3^{3k+6} - 26(k+1) - 27 = 27(3^{3k+3} - 26k - 27) + 676k + 676.$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{cases} 3^{3k+3} - 26k - 27 & \vdots\, 676 \\ 676 & \vdots\, 676 \end{cases} \Rightarrow 27(3^{3k+3} - 26k - 27) + 676k + 676 \,\vdots\, 676.$$

$$\Rightarrow 3^{3k+6} - 26(k+1) - 27 \,\vdots\, 676.$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 2.1.4 *Với mọi n nguyên dương, ta có*

$$2^{2^{2n}} + 5 \,\vdots\, 7.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta phải chứng minh

$$2^{2^{2.1}} + 5 \,\vdots\, 7 \;\Leftrightarrow 21 \,\vdots\, 7 \text{ (đúng)}.$$

Vậy khẳng định đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử, khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$2^{2^{2k}} + 5 \,\vdots\, 7.$$

Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là

$$2^{2^{2(k+1)}} + 5 \,\vdots\, 7.$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
2^{2^{2(k+1)}} + 5 &= 2^{2^{2k+2}} + 5 = 2^{2^{2k}.4} + 5 \\
&= (2^{2^{2k}})^4 + 5 = (2^{2^{2k}})^4 - 5^4 + 5^4 + 5 \\
&= \left(2^{2^{2k}} - 5\right)\left(2^{2^{2k}} + 5\right)\left[\left(2^{2^{2k}}\right)^2 + 5^2\right] + 360.
\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{cases} 2^{2^{2k}} + 5 \,\vdots\, 7 \\ 360 \,\vdots\, 7 \end{cases} \Rightarrow \left(2^{2^{2k}} - 5\right)\left(2^{2^{2k}} + 5\right)\left[\left(2^{2^{2k}}\right)^2 + 5^2\right] + 360 \,\vdots\, 7.$$

$$\Rightarrow 2^{2^{2(k+1)}} + 5 \,\vdots\, 7.$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.1.5 *Chứng minh rằng*

$$3^{2^{4n+1}} + 2 \,\vdots\, 11, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 0$, ta phải chứng minh

$$3^{2^{4.0+1}} + 2 \,\vdots\, 11 \;\Leftrightarrow 11 \,\vdots\, 11(\text{đúng}).$$

Vậy khẳng định đúng với $n = 0$.

Bước quy nạp: Giả sử, khẳng định đúng với $n = k \geq 0$, tức là

$$3^{2^{4k+1}} + 2 \,\vdots\, 11.$$

Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là

$$3^{2^{4k+5}} + 2 \,\vdots\, 11.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
3^{2^{4k+5}} + 2 &= 3^{2^{4k+1}.16} + 2 = \left(3^{2^{4k+1}}\right)^{16} + 2 \\
&= \left(3^{2^{4k+1}}\right)^{16} - 2^{16} + 2^{16} + 2 \\
&= \left[\left(3^{2^{4k+1}}\right)^2\right]^8 - (2^2)^8 + 2^{16} + 2.
\end{aligned}$$

Mặt khác
$$\left[\left(3^{2^{4k+1}}\right)^2\right]^8 - (2^2)^8 \vdots \left(3^{2^{4k+1}}\right)^2 - 2^2. \quad (2.1)$$

Lại có
$$\left(3^{2^{4k+1}}\right)^2 - 2^2 \vdots 3^{2^{4k+1}} + 2. \quad (2.2)$$

Theo giả thiết quy nạp
$$3^{2^{4k+1}} + 2 \vdots 11. \quad (2.3)$$

Từ (2.1), (2.2), (2.3) ta suy ra:
$$\left[\left(3^{2^{4k+1}}\right)^2\right]^8 - (2^2)^8 \vdots 11. \quad (2.4)$$

Mà
$$2^{16} + 2 \vdots 11. \quad (2.5)$$

Từ (2.4), (2.5) ta suy ra
$$\left[\left(3^{2^{4k+1}}\right)^2\right]^8 - (2^2)^8 + 2^{16} + 2 \vdots 11 \Rightarrow 3^{2^{4k+5}} + 2 \vdots 11.$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 2.1.6 *Chứng minh rằng*
$$5^{2n-1}.2^{n+1} + 3^{n+1}.2^{2n-1} \vdots 38, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta phải chứng minh
$$5^{2.1-1}.2^{1+1} + 3^{1+1}.2^{2.1-1} \vdots 38 \ \Leftrightarrow 38 \vdots 38(\text{đúng}).$$

Vậy khẳng định đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử, khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, tức là
$$5^{2k-1}.2^{k+1} + 3^{k+1}.2^{2k-1} \vdots 38.$$

Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là

$$5^{2k+1}.2^{k+2} + 3^{k+2}.2^{2k+1} \vdots 38.$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} & 5^{2k+1}.2^{k+2} + 3^{k+2}.2^{2k+1} \\ = \; & 25.5^{2k-1}.2.2^{k+1} + 3 \cdot 3^{k+1}.4.2^{2k-1} \\ = \; & 50.5^{2k-1}.2^{k+1} + 12.3^{k+1}.2^{2k-1} \\ = \; & 50(5^{2k-1}.2^{k+1} + 3^{k+1}.2^{2k-1}) - 38.3^{k+1}.2^{2k-1}. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{cases} 50(5^{2k-1}.2^{k+1} + 3^{k+1}.2^{2k-1}) \vdots 38 \\ 38.3^{k+1}.2^{2k-1} \vdots 38 \end{cases} \Rightarrow 5^{2k+1}.2^{k+2} + 3^{k+2}.2^{2k+1} \vdots 38.$$

Vậy mệnh đề đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 2.1.7 *Chứng minh rằng tổng các lập phương của ba số nguyên dương liên tiếp chia hết cho* 9.

Bài giải

Theo đề ra, ta phải chứng minh

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \vdots 9, n \in \mathbb{N}^*.$$

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta phải chứng minh

$$1^3 + 2^3 + 3^3 \vdots 9 \Leftrightarrow 36 \vdots 9 \text{ (đúng)}.$$

Vậy khẳng định đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử, khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 \vdots 9.$$

Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 \vdots 9.$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} & (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 \\ = \;& k^3 + 9k^2 + 27k + 27 + (k+1)^3 + (k+2)^3 \\ = \;& k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + 9(k^2 + 3k + 3). \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{cases} k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 \,\vdots\, 9 \\ 9(k^2 + 3k + 3) \,\vdots\, 9 \end{cases} \Rightarrow (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 \,\vdots\, 9.$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 2.1.8 *Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng*

$$(n+1)(n+2)(n+3)...3n \,\vdots\, 3^n.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta phải chứng minh

$$2.3 \,\vdots\, 3 \text{ (đúng)}.$$

Vậy khẳng định đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$(k+1)(k+2)(k+3)...3k \,\vdots\, 3^k.$$

Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là

$$(k+2)(k+3)(k+4)...3k...(3k+3) \,\vdots\, 3^{k+1}.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} & (k+2)(k+3)(k+4)...3k(3k+1)(3k+2)(3k+3) \\ = \;& 3(k+1)(k+2)(k+3)....3k(3k+1)(3k+2). \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{cases} (k+1)(k+2)(k+3)....3k \,\vdots\, 3^k \\ 3(3k+1)(3k+2) \,\vdots\, 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow 3(k+1)(k+2)(k+3)....3k(3k+1)(3k+2) \vdots 3^{k+1}$.

$\Rightarrow (k+2)(k+3)...3k(3k+1)(3k+2)(3k+3) \vdots 3^{k+1}$.

Vậy khẳng định đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định đúng với mọi n nguyên dương.

Ví dụ 2.1.9 *1. Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố, thì số $a^p - a \vdots p$ với mọi a (a là số nguyên dương).*

2. Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố và a không chia hết cho p, thì số $a^{p-1} - 1 \vdots p$ (định lý Fermat).

Bài giải

1. **Bước cơ sở:** Với $a = 1$, thì $1^p - 1 = 0 \vdots p$ (đúng).

Vậy khẳng định đúng với $a = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử khẳng định đúng với $a = k \geq 1$, tức là

$$k^p - k \vdots p.$$

Ta cần chứng minh khẳng định đúng với $a = k+1$, tức là

$$(k+1)^p - (k+1) \vdots p.$$

Ta có

$$\begin{aligned}(k+1)^p - (k+1) &= \textstyle\sum_{i=0}^{p} C_p^i.k^{p-i}1^i - (k+1)\\ &= k^p + C_p^1 k^{p-1} + C_p^2 k^{p-2} + ... + C_p^{p-1}k + 1 - (k+1)\\ &= (k^p - k) + C_p^1 k^{p-1} + C_p^2 k^{p-2} + ... + C_p^{p-1}k.\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{cases} C_p^i \vdots p, \forall i = \overline{1, p-1} \\ (k^p - k) \vdots p \end{cases} \Rightarrow (k+1)^p - (k+1) \vdots p.$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

2. Ta có

$$(a^p - a) = a(a^{p-1} - 1)$$

Theo chứng minh trên:

$$a^p - a \vdots p \Rightarrow a(a^{p-1} - 1) \vdots p.$$

Vì theo đề bài, a không chia hết cho $p \Rightarrow (a, p) = 1$.

$\Rightarrow a^{p-1} - 1 \vdots p$ (điều phải chứng minh).

Ví dụ 2.1.10 *Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, ta có*

$$n^7 - n \vdots 7.$$

Bài giải

Áp dụng định lý Fermat với $p = 7$, ta có

$$n^7 - n \vdots 7 \text{ (đpcm) }.$$

Ví dụ 2.1.11 *Hãy tìm ước chung lớn nhất của các số*

$$2^{2^2} + 2^{2^1} + 1, 2^{2^3} + 2^{2^2} + 1, .., 2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1, ...$$

Bài giải

Ta kí hiệu

$$a_n = 2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1, n \geq 1.$$

Với $n = 1, a_1 = 2^{2^2} + 2^{2^1} + 1 = 21 \vdots 21$.

Với $n = 2, a_2 = 2^{2^3} + 2^{2^2} + 1 = 273 = 21.13 \vdots 21$.

Với $n = 3, a_3 = 2^{2^4} + 2^{2^3} + 1 = 65793 \vdots 21$.

Ta dự đoán $a_n \vdots 21, \forall n \geq 1$. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

Bước cơ sở: Với $n = 1, n = 2$ ta thấy khẳng định đúng như đã kiểm tra ở trên.

Bước quy nạp: Giả sử, khẳng định đúng với $n = k \geq 2$, tức là

$$a_k = 2^{2^{k+1}} + 2^{2^k} + 1 \vdots 21.$$

Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là

$$a_{k+1} = 2^{2^{k+2}} + 2^{2^{k+1}} + 1 \vdots 21.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= 2^{2^{k+2}} + 2^{2^{k+1}} + 1 = \left(2^{2^{k+1}}\right)^2 + 2^{2^{k+1}} + 1 \\
&= 2^{2^{k+1}}\left(2^{2^{k+1}} + 2^{2^k} + 1\right) - \left(2^{2^{k+1}+2^k} - 1\right) \\
&= 2^{2^{k+1}}(2^{2^{k+1}} + 2^{2^k} + 1) - (2^{3.2^k} - 1) \\
&= 2^{2^{k+1}}\left(2^{2^{k+1}} + 2^{2^k} + 1\right) - \left[\left(2^{2^k}\right)^3 - 1\right] \\
&= 2^{2^{k+1}}\left(2^{2^{k+1}} + 2^{2^k} + 1\right) - \left(2^{2^k} - 1\right)\left(2^{2^{k+1}} + 2^{2^k} + 1\right).
\end{aligned}$$

Theo giả thiết quy nạp, ta có

$$2^{2^{k+1}} + 2^{2^k} + 1 \vdots 21 \Rightarrow \begin{cases} 2^{2^{k+1}}\left(2^{2^{k+1}} + 2^{2^k} + 1\right) \vdots 21 \\ \left(2^{2^k} - 1\right)\left(2^{2^{k+1}} + 2^{2^k} + 1\right) \vdots 21 \end{cases} \Rightarrow a_{k+1} \vdots 21.$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Như vậy tất cả các số trong dãy ban đầu đều chia hết cho 21, mà 21 là số hạng bé nhất trong dãy đó nên ước chung lớn nhất của các số đã cho là 21.

Ví dụ 2.1.12 *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì số* $2^{3^n} + 1$ *chia hết cho* 3^{n+1}.

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta phải chứng minh:

$$2^{3^1} + 1 \vdots 3^2 \text{ (đúng)}.$$

Vậy khẳng định đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là

$$2^{3^k} + 1 \vdots 3^{k+1}.$$

Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là

$$2^{3^{k+1}} + 1 \vdots 3^{k+2}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} 2^{3^{k+1}} + 1 &= \left(2^{3^k}\right)^3 + 1^3 \\ &= (2^{3^k} + 1)\left[\left(2^{3^k}\right)^2 - 2^{3^k} + 1\right] \\ &= (2^{3^k} + 1)\left[(2^{3^k} + 1)^2 - 3.2^{3^k}\right]. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{cases} 2^{3^k} + 1 \vdots 3^{k+1} \\ 2^{3^k} + 1 \vdots 3 \\ 3.2^{3^k} \vdots 3 \end{cases} \Rightarrow (2^{3^k}+1)\left[(2^{3^k} + 1)^2 - 3.2^{3^k}\right] \vdots 3^{k+2} \Rightarrow 2^{3^{k+1}}+1 \vdots 3^{k+2}.$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.1.13 *Với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, hãy tìm chữ số tận cùng của số $A_n = 2^{2^n} + 1$.*

Bài giải

Ta có: $A_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$ có chữ số tận cùng là 7.

$A_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$ có chữ số tận cùng là 7.

$A_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537$ có chữ số tận cùng là 7.

Ta dự đoán: $A_n = 2^{2^n} + 1, n \geq 2$ có chữ số tận cùng là 7.

Để chứng minh chữ số tận cùng của A_n là 7 ta quy về chứng minh hiệu $A_n - 7 \vdots 10$, hay nói cách khác: $2^{2^n} - 6 \vdots 10, n \geq 2$. Ta chứng minh bằng quy nạp toán học.

Bước cơ sở: Với $n = 2$, ta phải chứng minh

$$2^{2^2} - 6 \vdots 10 \text{ (đúng)}.$$

. Vậy khẳng định đúng với $n = 2$.

Bước quy nạp: Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 2$, ta có

$$2^{2^k} - 6 \vdots 10.$$

Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là

$$2^{2^{k+1}} - 6 \vdots 10.$$

Do $2^{2^k} - 6 \vdots 10$, ta có

$$2^{2^k} - 6 = 10m \Rightarrow 2^{2^k} = 10m + 6.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} 2^{2^{k+1}} - 6 &= \left(2^{2^k}\right)^2 - 6 = (10m+6)^2 - 6 \\ &= 100m^2 + 120m + 36 - 6 \\ &= 100m^2 + 120m + 30 \\ &= 10(10m^2 + 12m + 3) \vdots 10. \end{aligned}$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh. Vậy $A_n = 2^{2^n} + 1, n \geq 2$ có chữ số tận cùng là 7.

2.2 Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức

2.2.1 Chứng minh đẳng thức

Ví dụ 2.2.1 *Chứng minh rằng: Với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta có*

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + ... + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1}).$$

Bài giải

Bước cơ sở: Khi $n = 2$, ta phải chứng minh:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \text{ (đúng)}.$$

Vậy đẳng thức đúng với $n = 2$.

Bước quy nạp: Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 2$ tức là

$$a^k - b^k = (a-b).(a^{k-1} + a^{k-2}.b + ... + a \cdot b^{k-2} + b^{k-1}).$$

Ta cần chứng minh đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là

$$a^{k+1} - b^{k+1} = (a-b).(a^k + a^{k-1}.b + ... + ab^{k-1} + b^k).$$

Ta có

$$\begin{aligned}
& (a-b).(a^k + a^{k-1}.b + ... + ab^{k-1} + b^k) \\
= \ & (a-b).[a.a^{k-1} + a.a^{k-2}.b + ... + a.b^{k-1} + b^k] \\
= \ & a.(a-b).[a^{k-1} + a^{k-2}.b + ... + b^{k-1}] + (a-b).b^k \\
= \ & a.(a^k - b^k) + (a-b).b^k = a^{k+1} - a.b^k + a.b^k - b^{k+1} = a^{k+1} - b^{k+1}.
\end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.2.2 *Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, ta có*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta phải chứng minh

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2.1+1)}{6} \text{ (đúng)}.$$

Vậy đẳng thức đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, tức là ta có

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Ta phải chứng minh đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\
&=(k+1)\frac{k(2k+1)+6(k+1)}{6}\\
&=(k+1)\frac{2k^2+7k+6}{6}\\
&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.
\end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đúng với $n=k+1$. Theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.2.3 *Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, ta có*

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n=1$, ta phải chứng minh

$$1^3=\frac{1^2(1+1)^2}{4}\text{ (đúng)}.$$

Vậy đẳng thức đúng với $n=1$.

Bước quy nạp: Giả sử đẳng thức đúng với $n=k\geq 1$, tức là ta có

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}.$$

Ta phải chứng minh đẳng thức đúng với $n=k+1$, tức là :

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3\\
&=(k+1)^2\left[\frac{k^2}{4}+(k+1)\right]\\
&=(k+1)^2\cdot\frac{k^2+4k+4}{4}\\
&=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đúng với $n=k+1$. Theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.2.4 *Tính tổng sau*

$$S = 1.4 + 2.7 + 3.10 + ... + n(3n+1), n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài giải

Ta có

$$\begin{aligned} S &= 1.4 + 2.7 + 3.10 + ... + n(3n+1) \\ &= 1(3.1+1) + 2.(3.2+1) + 3(3.3+1) + ... + n(3n+1) \\ &= (3.1^2+1) + (3.2^2+2) + (3.3^2+3) + ... + (3.n^2+n) \\ &= 3.(1^2+2^2+3^2+...+n^2) + (1+2+3+..+n). \end{aligned}$$

Ở **Ví dụ 2.2.1**, ta đã chứng minh: $1+2+3+..+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Ở **Ví dụ 2.2.4**, ta đã chứng minh: $1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Do đó

$$\begin{aligned} S &= 3.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1+1)}{2} \\ &= n(n+1)^2. \end{aligned}$$

Vậy

$$1.4 + 2.7 + 3.10 + ... + n(3n+1) = n(n+1)^2.$$

Ví dụ 2.2.5 *Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, ta có*

$$\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + ... + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta phải chứng minh

$$\frac{1}{1.5} = \frac{1}{4.1+1} \Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \text{ (đúng).}$$

Vậy khẳng định đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử, khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + ... + \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{k}{4k+1}.$$

Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là

$$\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + ... + \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{k+1}{4k+5}.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + ... + \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} \\ = & \frac{k}{4k+1} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{4k^2+5k+1}{(4k+1)(4k+5)} \\ = & \frac{(4k+1)(k+1)}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{k+1}{4k+5}. \end{aligned}$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định đúng với mọi n nguyên dương.

Ví dụ 2.2.6 *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có*

$$1.1! + 2.2! + ... + n.n! = (n+1)! - 1.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta phải chứng minh:

$$1.1! = 2! - 1 \text{ (đúng)}.$$

Vậy khẳng định đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử, khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$1.1! + 2.2! + ... + k.k! = (k+1)! - 1.$$

Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là

$$1.1! + 2.2! + ... + k.k! + (k+1).(k+1)! = (k+2)! - 1.$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} & 1.1! + 2.2! + ... + k.k! + (k+1).(k+1)! \\ = & (k+1)! - 1 + (k+1) \cdot (k+1)! \\ = & (k+1)![1 + (k+1)] - 1 \\ = & (k+1)!(k+2) - 1 = (k+2)! - 1. \end{aligned}$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định đúng với mọi $n \geq 1$.

Ví dụ 2.2.7 *Chứng minh rằng*

$$1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

với mọi $x \neq 1, n$ *nguyên dương.*

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta phải chứng minh

$$1 + x = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \text{ (đúng } \forall x \neq 1)$$

Vậy đẳng thức đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử, đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, tức là ta có

$$1 + x + x^2 + ... + x^k = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}.$$

Ta phải chứng minh đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là

$$1 + x + x^2 + ... + x^k + x^{k+1} = \frac{x^{k+2} - 1}{x - 1}.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} & 1 + x + x^2 + ... + x^k + x^{k+1} \\ = & \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} + x^{k+1} \\ = & \frac{x^{k+1} - 1 + x^{k+1}(x - 1)}{x - 1} \\ = & \frac{x^{k+1}(1 + x - 1) - 1}{x - 1} \\ = & \frac{x^{k+2} - 1}{x - 1}. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.2.8 *Chứng minh rằng với mọi* $x \neq \pm 1$ *và với mọi* $n \in \mathbb{N}$, *ta có*

$$\frac{1}{1 + x} + \frac{2}{1 + x^2} + \frac{4}{1 + x^4} + ... + \frac{2^n}{1 + x^{2n}} = \frac{1}{x - 1} + \frac{2^{n+1}}{1 - x^{2^{n+1}}}.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 0$, ta phải chứng minh

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{1-x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} = \frac{-1(1+x)+2}{(1-x)(1+x)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x} \text{ (đúng } \forall x \neq \pm 1).$$

Vậy đẳng thức đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử, đẳng thức đúng với $n = k \geq 0$, tức là

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + ... + \frac{2^k}{1+x^{2k}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}.$$

Ta phải chứng minh đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + ... + \frac{2^k}{1+x^{2k}} + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+2}}{1-x^{2^{k+2}}}.$$

Thật vậy

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + ... + \frac{2^k}{1+x^{2k}} + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} \\
= & \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}} + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} \\
= & \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+1}(1+x^{2^{k+1}}) + 2^{k+1}(1-x^{2^{k+1}})}{1-(x^{2^{k+1}})^2} \\
= & \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+2}}{1-x^{2^{k+2}}}.
\end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

2.2.2 Chứng minh bất đẳng thức

Ví dụ 2.2.9 *Bất đẳng thức Cauchy*

Cho các số thực không âm $a_1, a_2, ...a_n$ và số nguyên dương $n \geq 2$, ta có:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}.$$

Bài giải

Cách 1: Chứng minh bằng quy nạp lùi.

Đầu tiên ta đi chứng minh bất đẳng thức đúng với các số có dạng $n = 2m$, với m nguyên dương tùy ý.

Bước cơ sở: Với $n = 2$, ta phải chứng minh

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$$
$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = 2$.

Bước quy nạp: Giả sử, bất đẳng thức đúng với $n = k(k \geq 2)$, tức là

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 a_2 ... a_n}.$$

Ta phải chứng minh bất đẳng thức cũng đúng khi $n = 2k$, tức là ta sẽ chứng minh

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1} + ... + a_{2k}}{2k} \geq \sqrt[2k]{a_1 a_2 ... a_k a_{k+1} .... a_{2k}}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
& \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_k) + (a_{k+1} + ... + a_{k+k})}{2k} \\
\geq \; & \frac{k\sqrt[k]{a_1 a_2 ... a_k} + k\sqrt[k]{a_{k+1} ... a_{k+k}}}{2k} \\
\geq \; & \frac{2k\sqrt[2k]{a_1 a_2 ... a_{2k}}}{2k} \\
= \; & \sqrt[2k]{a_1 a_2 ... a_{2k}}.
\end{aligned}$$

Ta đã chứng minh nếu bất đẳng thức đúng với $n = k$ thì cũng đúng với $n = 2k$. Từ đó, suy ra bất đẳng thức đúng với $n = 2^m, m$ dương tùy ý.

Ta giả sử, nếu bất đẳng thức đúng với n, ta có

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với $n - 1$, tức là

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1 a_2 ... a_{n-1}}.$$

Ta có

$$a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}{n-1}$$
$$\geq n\sqrt[n]{a_1a_2...a_{n-1} \cdot \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}{n-1}}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{n}{n-1}(a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}) \geq n\sqrt[n]{a_1a_2...a_{n-1} \cdot \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}{n-1}}$$
$$\Rightarrow \quad \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}{n-1}\right)^n \geq a_1a_2...a_{n-1} \cdot \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}{n-1}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1a_2...a_{n-1}}.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n-1$. Theo nguyên lý quy nạp lùi, ta có điều phải chứng minh.

Cách 2:

Cho bài toán: *Chứng minh rằng nếu tích n số thực dương bằng 1, thì tổng của chúng không nhỏ hơn n. Hay nói cách khác cho $x_1, x_2, ...x_n$ là những số dương, chứng minh rằng nếu $x_1x_2...x_n = 1$ thì $x_1+x_2+...+x_n \geq n$ với mọi $n \geq 1$.*

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta thấy bài toán thỏa mãn.

Với $n = 2$, ta phải chứng minh nếu $x_1x_2 = 1$ thì $x_1 + x_2 \geq 2$ trong đó x_1, x_2 là những số thực dương.

Thật vậy, ta luôn có

$$(x_1 - 1)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow x_1^2 + 1 \geq 2x_1 \Leftrightarrow x_1 + \frac{1}{x_1} \geq 2 \text{ (vì } x_1 > 0)$$
$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 \geq 2 \text{ (do } x_2 = \frac{1}{x_1}).$$

Vậy bài toán đúng với $n = 2$.

Bước quy nạp: Giả sử bài toán đúng với $n = k \geq 2$, tức là ta có

$$x_1x_2...x_k = 1 \text{ và } x_1 + x_2 + ... + x_k \geq k.$$

Ta phải chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$, tức là cho

$$x_1x_2...x_kx_{k+1} = 1$$

ta phải chứng minh

$$x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} \geq k + 1.$$

Khi đó, có 2 trường hợp xảy ra:

Trường hợp 1: $x_1 = x_2 = ... = x_k = x_{k+1} = 1$. Khi đó

$$x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} = k + 1.$$

Trường hợp 2: $x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}$ là các số không bằng nhau.

Khi đó để tích các số bằng 1 thì phải cố một số hạng lớn hơn 1 và một số hạng nhỏ hơn 1. Để không làm mất tính tổng quát ta giả sử $x_1 < 1$ và $x_{k+1} > 1$.

Đặt $y_1 = x_1 x_{k+1}$, khi đó ta có: $y_1 x_2 x_3 ... x_k = 1$

Do giả thiết quy nạp đúng với $n = k$, ta có

$$y_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k \geq k$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} &= (y_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k) + x_{k+1} - y_1 + x_1 \\ &\geq k + x_{k+1} - y_1 + x_1 \\ &= (k+1) + x_{k+1} - x_1 x_{k+1} + x_1 - 1 \\ &= (k+1) + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1) \\ &> k + 1 \text{ (vì } x_{k+1} > 1 \text{ và } x_1 < 1). \end{aligned}$$

Từ hai trường hợp trên, ta thấy bài toán đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Áp dụng bài toán trên chứng minh bất đẳng thức Cauchy:

Ta đặt:

$$a = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}, g = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}.$$

Trường hợp 1: $a_1, a_2, ..., a_n$ đều dương.

Khi đó bất đẳng thức Cauchy chỉ là hệ quả của bài toán trên.

Thật vậy, ta có: $g^n = a_1a_2...a_n$ nên $\frac{a_1}{g} \cdot \frac{a_2}{g} \cdots \frac{a_n}{g} = 1$. Do đó theo kết quả bài toán trên, ta có:

$$\frac{a_1}{g} + \frac{a_2}{g} + ... = \frac{a_n}{g} \geq n$$
$$\Rightarrow \quad \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi: $\frac{a_1}{g} = \frac{a_2}{g} = ... = \frac{a_n}{g} = 1$ hay $a_1 = a_2 = .. = a_n$.

Trường hợp 2: Xét trường hợp $\exists a_i = 0, i = \overline{1, n}$.

Khi đó, ta có:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq 0 = \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.2.10 *(Bất đẳng thức Bernoulli): Chứng minh rằng với mọi* $x > -1$*, ta có:*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta phải chứng minh

$$(1 + x)^1 \geq 1 + 1x \text{ (đúng } \forall x > -1).$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử, bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, ta có

$$(1 + x)^k \geq 1 + kx.$$

Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là

$$(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} (1 + x)^{k+1} &\geq (1 + kx)(1 + x) = 1 + (k + 1)x + kx^2 \\ &\geq 1 + (k + 1)x \text{ (luôn đúng } \forall x > -1). \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.2.11 *(Bất đẳng thức Cauchy-Bunhiacopxki). Chứng minh rằng*

$$(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n)^2$$

với $x_1, ...x_n, y_1, ..., y_n$ *là những số thực và* n *nguyên dương.*

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta phải chứng minh

$$x_1^2y_1^2 \geq (x_1y_1)^2 \text{ (đúng)}.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = 1$.

Với $n = 2$, ta phải chứng minh

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2)^2.$$

Thật vậy:

$$\begin{aligned} & (x_1y_1 + x_2y_2)^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) - (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\ \Rightarrow \quad & (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2)^2. \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = 2$.

Bước quy nạp: Giả sử, bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 2$, tức là

$$(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2)(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_k^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ky_k)^2.$$

Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là

$$\begin{aligned} & (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2 + x_{k+1}^2)(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_k^2 + y_{k+1}^2) \\ \geq \quad & (x_1y_1 + x_2y_2 ... + x_ky_k + x_{k+1}y_{k+1})^2. \end{aligned}$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} & (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2 + x_{k+1}^2)(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_k^2 + y_{k+1}^2) \\ = \quad & \left[\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2}\right)^2 + x_{k+1}^2\right]\left[\left(\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_k^2}\right)^2 + y_{k+1}^2\right] \\ \geq \quad & \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_k^2} + x_{k+1}y_{k+1}\right)^2 \\ = \quad & \left(\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2)(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_k^2)} + x_{k+1}y_{k+1}\right)^2 \\ \geq \quad & \left(\sqrt{(x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ky_k)^2} + x_{k+1}y_{k+1}\right)^2 \\ \geq \quad & (x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ky_k + x_{k+1}y_{k+1})^2. \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Ta áp dụng quy nạp để làm một số ví dụ về chứng minh bất đẳng thức.

Ví dụ 2.2.12 *Chứng minh rằng với $n > 4$, ta có*

$$P_n > 2n.$$

(P_n là số nguyên tố thứ n).

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 5$, ta có: $P_5 = 11 > 2.5$.

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = 5$.

Bước quy nạp: Giả sử, bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 5$, tức là

$$P_k > 2k.$$

Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là

$$P_{k+1} > 2(k + 1) = 2k + 2.$$

Vì $n > 4$ nên các số nguyên tố P_n đều là số lẻ. Do đó

$P_{k+1} - P_k \geq 2$ (vì nếu $P_{k+1} - P_k = 1$ thì một trong 2 số sẽ là số chẵn).

$\Rightarrow P_{k+1} \geq P_k + 2 > 2k + 2$ (đpcm).

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có bất đẳng thức đúng với mọi $n > 4$.

Ví dụ 2.2.13 *Gọi P_n là số nguyên tố thứ n. Chứng minh rằng*

$$P_n \leq 2^{2^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta có: $P_1 = 2 = 2^{2^{1-1}}$.

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử, bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, ta có

$$P_k \leq 2^{2^{k-1}}.$$

Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là

$$P_{k+1} \leq 2^{2^k}.$$

Dễ dàng chứng minh được

$$P_{k+1} \leq P_1 P_2 ... P_k + 1.$$

Áp dụng, ta có

$$\begin{aligned} P_{k+1} &\leq 2^{2^{1-1}}.2^{2^{2-1}}.2^{2^{3-1}}...2^{2^{k-1}} + 1 \\ &= 2^{2^0+2^1+2^2+...+2^{k-1}} + 1 \\ &= 2^{1\cdot\frac{2^k-1}{2-1}} + 1 = 2^{2^k-1} + 1 \\ &= \frac{2^{2^k}}{2} + 1 < 2^{2^k} \text{ (vì } 2^{2^k} > 2, \forall k \geq 1). \end{aligned}$$

Ví dụ 2.2.14 *Chứng minh rằng*

$$2^n > 2n + 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 3$, ta phải chứng minh:

$$2^3 > 2 \cdot 3 + 1 \text{ (đúng)}.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = 3$.

Bước quy nạp: Giả sử, bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 3$, ta có

$$2^k > 2k + 1.$$

Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là

$$2^{k+1} > 2k + 3.$$

Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2.2^k > 2(2k+1) \\ &= 4k+2 = (2k+3)+(2k-1) \\ &> (2k+3) \text{ (vì } 2k-1>0.\ \forall x \geq 3). \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, bất đẳng thức đúng với mọi $n \geq 3$.

Ví dụ 2.2.15 *Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$, ta có*

$$\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6.2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta phải chứng minh

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2 > \sqrt{3} \text{ (đúng)}.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử, bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$\frac{1.3.5....(2k-1)}{2.4.6.2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là

$$\frac{1.3.5....(2k-1)(2k+1)}{2.4.6.2k.(2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}.$$

Ta có

$$\frac{1.3.5....(2k-1)(2k+1)}{2.4.6.2k.(2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}. \tag{2.6}$$

Ta phải chứng minh

$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}. \tag{2.7}$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} (2.7) \quad &\Leftrightarrow (2k+1)(2k+3) < (2k+2)^2. \\ &\Leftrightarrow 4k^2+8k+3 < 4k^2+8k+4. \\ &\Leftrightarrow 3 < 4 \text{ (luôn đúng)}. \end{aligned}$$

Suy ra (2.7) đúng. Từ (2.7) và (2.6), suy ra

$$\frac{1.3.5....(2k-1)(2k+1)}{2.4.6.2k.(2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.2.16 *Cho $a, b, c \geq 0$, n nguyên dương. Chứng minh rằng*

$$a) \frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n.$$

$$b) \frac{a^n + b^n + c^n}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n.$$

Bài giải

a) Giả sử $a \geq b \Rightarrow a^k \geq b^k, \forall k \geq 1$.

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta phải chứng minh

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{a+b}{2} \text{ (đúng)}.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử, bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, ta có

$$\frac{a^k + b^k}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^k.$$

Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là

$$\frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}.$$

Ta có

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^k \frac{a+b}{2} \leq \frac{a^k + b^k}{2} \cdot \frac{a+b}{2}. \quad (2.8)$$

Ta phải chứng minh

$$\frac{a^k + b^k}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \leq \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2}. \quad (2.9)$$

Thật vậy

$$\begin{aligned}(2.9) \quad &\Leftrightarrow (a^k + b^k)(a+b) \le 2(a^{k+1} + b^{k+1}) \\ &\Leftrightarrow a^{k+1} + a^k b + b^k a + b^{k+1} \le 2a^{k+1} + 2b^{k+1} \\ &\Leftrightarrow a^{k+1} - a^k b + b^{k+1} - b^k a \ge 0 \\ &\Leftrightarrow a^k(a-b) - b^k(a-b) \ge 0 \\ &\Leftrightarrow (a^k - b^k)(a-b) \ge 0 \text{ (đúng vì } a-b \ge 0, a^k - b^k \ge 0).\end{aligned}$$

Suy ra (2.9) đúng. Từ (2.8) và (2.9) suy ra

$$\frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, bất đẳng thức đúng với mọi n nguyên dương.

b) Giả sử $a \ge b \ge c \Rightarrow a^k \ge b^k \ge c^k, \forall k \ge 1$.

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta phải chứng minh

$$\frac{a+b+c}{3} \ge \frac{a+b+c}{3} \text{ (đúng).}$$

Vậy mệnh đề đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử, bất đẳng thức đúng với $n = k \ge 1$, ta có

$$\frac{a^k + b^k + c^k}{3} \ge \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^k.$$

Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là

$$\frac{a^{k+1} + b^{k+1} + c^{k+1}}{3} \ge \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{k+1}.$$

Ta có

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{k+1} = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^k \frac{a+b+c}{3} \le \frac{a^k + b^k + c^k}{3} \cdot \frac{a+b+c}{3}. \tag{2.10}$$

Ta phải chứng minh

$$\frac{a^k + b^k + c^k}{3} \cdot \frac{a+b+c}{3} \le \frac{a^{k+1} + b^{k+1} + c^{k+1}}{3}. \tag{2.11}$$

Thật vậy

$$
\begin{aligned}
(2.11) \Leftrightarrow\ & (a+b+c)(a^k+b^k+c^k) \le 3(a^{k+1}+b^{k+1}+c^{k+1}) \\
\Leftrightarrow\ & 2a^{k+1}+2b^{k+1}+2c^{k+1}-ab^k-ac^k-ba^k-bc^k-ca^k-cb^k \ge 0 \\
\Leftrightarrow\ & (a^{k+1}+b^{k+1}-ab^k-ba^k)+(b^{k+1}+c^{k+1}-bc^k-cb^k) \\
& +(a^{k+1}+c^{k+1}-ac^k-ca^k) \ge 0 \\
\Leftrightarrow\ & (a-b)(a^k-b^k)+(b-c)(b^k-c^k)+(a-c)(a^k-c^k) \ge 0 \text{ (đúng).}
\end{aligned}
$$

Suy ra (2.11) đúng. Từ (2.10) và (2.11) suy ra

$$\frac{a^{k+1}+b^{k+1}+c^{k+1}}{3} \ge \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{k+1}.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, Theo nguyên lý quy nạp, bất đẳng thức đúng với mọi n nguyên dương.

Ví dụ 2.2.17 *Cho $a, b, c \ge 0, n$ nguyên dương. Chứng minh rằng*

$$a)\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2} \le \sqrt[n]{\frac{a+b}{2}}.$$

$$b)\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3} \le \sqrt[n]{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Bài giải

a) Đặt $x = \sqrt[n]{a}, y = \sqrt[n]{b} \Rightarrow a = x^n, b = y^n, \forall n \ge 1.$

Vì $a, b \ge 0$ nên $x, y \ge 0$. Ta có

$$\frac{x+y}{2} \le \sqrt[n]{\frac{x^n+y^n}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \le \frac{x^n+y^n}{2} \text{ (đúng).}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2} \le \sqrt[n]{\frac{a+b}{2}} \text{ (đpcm) .}$$

Vậy bất đẳng thức luôn đúng với mọi n nguyên dương.

b) Đặt $x = \sqrt[n]{a}, y = \sqrt[n]{b}, z = \sqrt[n]{c} \Rightarrow a = x^n, b = y^n, c = z^n, \forall n \ge 1.$

Ví $a, b, c \ge 0$nên $x, y, z \ge 0$. Ta có

$$\frac{x+y+c}{3} \le \sqrt[n]{\frac{x^n+y^n+z^n}{3}} \Leftrightarrow \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^n \le \frac{x^n+y^n+z^n}{3} \text{ (đúng).}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3} \le \sqrt[n]{\frac{a+b+c}{3}} \text{ (đpcm) .}$$

Vậy bất đẳng thức luôn đúng với mọi n nguyên dương.

Ví dụ 2.2.18 *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \geq 3$, ta có*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 3$, ta phải chứng minh

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 < 3 \text{ (đúng)}.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = 3$.

Bước quy nạp: Giả sử, bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 3$, tức là

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < k.$$

Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là

$$\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} < k+1.$$

Thật vậy

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} &= \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^k \cdot \left(1+\frac{1}{k+1}\right)\\ &< \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \cdot \left(1+\frac{1}{k}\right)\\ &< k\left(1+\frac{1}{k}\right) = k+1.\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, bất đẳng thức đúng với mọi $n \geq 3$.

Ví dụ 2.2.19 *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, ta có*

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 2$, ta phải chứng minh

$$\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2+2} > \frac{13}{24} \text{ (đúng)}.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = 2$.

Bước quy nạp: Giả sử, bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 2$, ta có

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}.$$

Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + ... + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} > \frac{13}{24}.$$

Thật vậy

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + ... + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} \\
= \; & \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{2k}\right) + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} \\
> \; & \frac{13}{24} + \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} > \frac{13}{24}.
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, bất đẳng thức đúng với mọi $n \geq 2$.

Ví dụ 2.2.20 *Chứng minh rằng với mọi $x > 0$, ta có:*

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}, \forall n \geq 1.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta phải chứng minh

$$e^x > 1 + x, \forall x > 0.$$

Đặt $f(x) = e^x - (1 + x)$.

Ta có: $f'(x) = e^x - 1 > 0, \forall x > 0$.

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$\Rightarrow f(x) > f(0) = 0 \Rightarrow e^x > 1 + x$.

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^k}{k!}.$$

Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Đặt

$$g(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right).$$

$$\Rightarrow \; g'(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^k}{k!}\right) > 0 \text{ (giả thiết quy nạp).}$$

$\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty) \Rightarrow g(x) > g(0) = 0.$

$$\Rightarrow e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.2.21 *Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1, x \in \mathbb{R}$, ta có*

$$|\sin nx| \leq n|\sin x|.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta phải chứng minh

$$|\sin x| \leq |\sin x| \text{ (đúng).}$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử, bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$|\sin kx| \leq k|\sin x|.$$

Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là

$$|\sin(k+1)x| \leq (k+1)|\sin x|.$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} |\sin(k+1)x| &= |\sin kx \cos x + \cos kx \sin x| \\ &\leq |\sin kx|.|\cos x| + |\cos kx|.|\sin x| \\ &= |\sin kx| + |\sin x| \\ &\leq k|\sin x| + |\sin x| \\ &= (k+1)|\sin x|. \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.2.22 *Với mọi n nguyên dương, ta có*

$$(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1} - n\cos\frac{\pi}{n} \geq 1.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta phải chứng minh

$$2\cos\frac{\pi}{2} - 1\cos\frac{\pi}{1} \geq 1 \text{ (đúng)}.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử, bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, ta có

$$(k+1)\cos\frac{\pi}{k+1} - k\cos\frac{\pi}{k} \geq 1.$$

Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là

$$(k+2)\cos\frac{\pi}{k+2} - (k+1)\cos\frac{\pi}{k+1} \geq 1.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
& (k+2)\cos\frac{\pi}{k+2} - (k+1)\cos\frac{\pi}{k+1} \geq 1.\\
\Leftrightarrow\ & -(k+1)\left(\cos\frac{\pi}{k+1} - \cos\frac{\pi}{k+2}\right) \geq 1 - \cos\frac{\pi}{k+2}.\\
\Leftrightarrow\ & (k+1)\sin\frac{\pi}{2(k+1)(k+2)}\sin\frac{(2k+3)\pi}{2(k+1)(k+2)} \geq \sin^2\frac{\pi}{2(k+2)}.
\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\frac{\pi}{2} > \frac{(2k+3)\pi}{2(k+1)(k+2)} > \frac{\pi}{2(k+2)} > 0.$$

$$\Rightarrow \sin\frac{(2k+3)\pi}{2(k+1)(k+2)} > \sin\frac{\pi}{2(k+2)}. \tag{2.12}$$

Ở **Ví dụ 2.2.21**, ta đã chứng minh

$$n|\sin x| \geq |\sin nx|.$$

$$\Rightarrow (k+1)\sin\frac{\pi}{2(k+1)(k+2)} \geq \sin\frac{\pi}{2(k+2)}. \tag{2.13}$$

Từ (2.12) và (2.13) suy ra

$$(k+1)\sin\frac{\pi}{2(k+1)(k+2)}\sin\frac{(2k+3)\pi}{2(k+1)(k+2)} \geq \sin^2\frac{\pi}{2(k+2)}.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

2.3 Một số bài toán về dãy số

Trong mục này, đầu tiên trình bày ứng dụng của phương pháp quy nạp toán học trong bài toán xác định số hạng tổng quát của dãy số. Tiếp theo, trình bày chi tiết về dãy số Fibonacci và một số bài toán khác về dãy số.

2.3.1 Xác định công thức số hạng tổng quát

Ví dụ 2.3.1 *Cho dãy (u_n) xác định bởi* $\begin{cases} u_1 = 5, u_2 = 19 \\ u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}$

Tìm công thức tổng quát của dãy số.

Bài giải

Ta có: $u_1 = 5 = 3^2 - 2^2$,

$u_2 = 19 = 3^3 - 2^3$,

$u_3 = 5u_2 - 6u_1 = 65 = 3^4 - 2^4$,

$u_4 = 5u_3 - 6u_2 = 211 = 3^5 - 2^5$.

Ta dự đoán: $u_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}, n \geq 1$.

Bước cơ sở: Với $n = 1, n = 2$ thì khẳng định đúng.

Bước quy nạp: Giả sử khẳng định đúng với $n = k$ và $n = k+1 (k \geq 1)$, tức là

$$u_k = 3^{k+1} - 2^{k+1} \text{ và } u_{k+1} = 3^{k+2} - 2^{k+2}.$$

Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k+2$, tức là

$$u_{k+2} = 3^{k+3} - 2^{k+3}.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} u_{k+2} &= 5u_{k+1} - 6u_k = 5(3^{k+2} - 2^{k+2}) - 6(3^{k+1} - 2^{k+1}) \\ &= 15.3^{k+1} - 10.2^{k+1} - 6.3^{k+1} + 6.2^{k+1} \\ &= 9.3^{k+1} - 4.2^{k+1} = 3^{k+3} - 2^{k+3}. \end{aligned}$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k+2$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.3.2 *Cho dãy (u_n) được xác định bởi* $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3, \forall n \geq 2 \end{cases}$

Tìm số hạng tổng quát của dãy số.

Bài giải

Ta có: $u_1 = 1 = 2^{1+1} - 3$,

$u_2 = 2.1 + 3 = 5 = 2^{2+1} - 3$,

$u_3 = 2.5 + 3 = 13 = 2^{3+1} - 3$.

Ta dự đoán: $u_n = 2^{n+1} - 3, n \geq 1$.

Bước cơ sở: Với $n = 1$, thì khẳng định đúng như trên.

Bước quy nạp: Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$u_k = 2^{k+1} - 3.$$

Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là

$$u_{k+1} = 2^{k+2} - 3.$$

Thật vậy:

$$u_{k+1} = 2u_k + 3 = 2(2^{k+1} - 3) + 3 = 2^{k+2} - 3.$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định đúng với mọi $n \geq 1$.

Ví dụ 2.3.3 *Cho dãy số (u_n) được xác định như sau*

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n-1}}{2}, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy.

Bài giải

Ta có

$$u_2 - u_1 = 1, u_3 - u_2 = \frac{u_1 + u_2}{2} - u_2 = \frac{u_1 - u_2}{2} = -\frac{1}{2},$$
$$u_4 - u_3 = \frac{u_2 + u_3}{2} - u_2 = \frac{1}{4}, ...$$

Ta dự đoán

$$u_n - u_{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}, n \geq 2.$$

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

Bước cơ sở: Với $n = 2$, khẳng định đúng như trên.

Bước quy nạp: Giả sử, khẳng định đúng với $n = k \geq 2$, tức là

$$u_k - u_{k-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-2}.$$

Ta phải chứng minh khẳng định trên đúng với $n = k + 1$, tức là

$$u_{k+1} - u_k = \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} u_{k+1} - u_k &= \frac{u_k + u_{k-1}}{2} - u_k = \frac{u_{k-1} - u_k}{2} \\ &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề đúng với mọi $n \geq 2$.

Mặt khác, với $n \geq 2$, ta có thể viết như sau:

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + (u_4 - u_3) + ... + (u_n - u_{n-1}) \\ &= 1 + \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - ... + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right] = 1 + \frac{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= 1 + \frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Vậy $u_n = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \forall n \geq 2.$

Ví dụ 2.3.4 *Cho dãy (u_n) xác định bởi* $\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$

Tìm số hạng tổng quát của dãy.

Bài giải

<u>Cách 1:</u>

Ta có: $u_1 = 2 = 2^0 + 1,$

$u_2 = 3 = 2^1 + 1,$

$u_3 = 3u_2 - 2u_1 = 5 = 2^2 + 1.$

Ta dự đoán $u_n = 2^{n-1} + 1, n \geq 1..$

Bước cơ sở: Với $n = 1, n = 2$ khẳng định đúng.

Bước quy nạp: Giả sử khẳng định đúng với $n = k-1$ và $n = k(k \geq 2)$, nghĩa là

$$u_k = 2^{k-1} + 1 \text{ và } u_{k-1} = 2^{k-2} + 1.$$

Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là

$$u_{k+1} = 2^k + 1.$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 3u_k - 2u_{k-1} = 3(2^{k-1} + 1) - 2(2^{k-2} + 1) \\ &= 3.2^{k-1} - 2.2^{k-2} + 1 = 3.2^{k-1} - 2^{k-1} + 1 \\ &= 2.2^{k-1} + 1 = 2^k + 1. \end{aligned}$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

<u>Cách 2:</u>

Ta có $u_{n+1} - u_n = 2(u_n - u_{n-1}), n \geq 2.$

Đặt $v_{n-1} = u_n - u_{n-1}, n \geq 2 \Rightarrow v_n = u_{n+1} - u_n.$

$\Rightarrow v_n = 2v_{n-1}, n \geq 2.$

$\Rightarrow \{v_n\}_{n\geq 1}$ là cấp số nhân với $\begin{cases} v_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases}$.

Ta có

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + ... + (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_n - u_{n-1}) \\ &= 2 + v_1 + v_2 + ... + v_{n-2} + v_{n-1} \\ &= 2 + 1 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 2^{n-1} + 1. \end{aligned}$$

Vậy $u_n = 2^{n-1} + 1, n \geq 1$.

Ví dụ 2.3.5 *Cho dãy số* (u_n) *xác định như sau*

$$\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 1, n = 1, 2, 3, ... \end{cases}$$

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy số.

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, số $A_n = 4u_nu_{n+2} + 1$ *là số chính phương.*

Bài giải

a) **<u>Cách 1:</u>**

Ta có: $u_1 = 1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$,

$u_2 = 3 = \dfrac{2(2+1)}{2}$,

$u_3 = 2u_2 - u_1 + 1 = 6 = \dfrac{3(3+1)}{2}$.

Ta dự đoán: $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}, \forall n \geq 1$.

Bước cơ sở: Với $n = 1, n = 2$, khẳng định đúng.

Bước quy nạp: Giả sử khẳng định đúng với $n = k - 1, n = k (k \geq 2)$, tức là ta có

$$u_{k-1} = \frac{k(k-1)}{2}, u_k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là

$$u_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2u_k - u_{k-1} + 1 \\ &= 2\frac{k(k+1)}{2} - \frac{(k-1)k}{2} + 1 \\ &= \frac{k^2+3k+2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định trên đúng với mọi số nguyên dương n.

Cách 2:

Ta có $u_{n+2} - u_{n+1} = (u_{n+1} - u_n) + 1$.

Đặt: $v_n = u_{n+1} - u_n$ $(n \geq 1) \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$.

$\Rightarrow v_{n+1} = v_n + 1, n \geq 1$.

$\Rightarrow \{v_n\}_{n\geq 1}$ là cấp số cộng.

Ta có $v_n = v_1 + (n-1)d = 2 + (n-1).1 = n+1$.

Mặt khác

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + ... + (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_n - u_{n-1}) \\ &= u_1 + v_1 + v_2 + ... + v_{n-2} + v_{n-1} \\ &= 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}, n \geq 1$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} A_n &= 4u_n u_{n+2} + 1 \\ &= 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{(n+2)(n+3)}{2} + 1 \\ &= n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 \\ &= (n^2 + 3n + 1)^2. \end{aligned}$$

Vậy A_n là số chính phương với mọi số nguyên dương n.

Ví dụ 2.3.6 *Cho dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện*

$$\begin{cases} x_0 = 4, x_1 = 34 \\ x_{n+2} \cdot x_n = x_{n+1}^2 + 18 \cdot 10^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, ta luôn có

$$x_n = \frac{10^{n+1}+2}{3}.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 0$ thì $x_0 = 4 = \dfrac{10^1+2}{3}$.

Với $n = 1$ thì $x_1 = 34 = \dfrac{10^2+2}{3}$.

Vậy mệnh đề đúng với $n = 0, n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử khẳng định đúng với $n = k-1$ và $n = k (k \geq 1)$, tức là

$$x_{k-1} = \frac{10^k+2}{3}, x_k = \frac{10^{k+1}+2}{3}.$$

Ta sẽ chứng minh khẳng định đúng với $n = k+2$, tức là

$$x_{k+1} = \frac{10^{k+2}+2}{3}.$$

Ta có

$$x_{k+1} \cdot x_{k-1} = x_k^2 + 18 \cdot 10^{k+1} = \left(\frac{10^{k+1}+2}{3}\right)^2 + 18 \cdot 10^k$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{k+1} \cdot \frac{10^k+2}{3} = \frac{10^{2k+2} + 4 \cdot 10^{k+1} + 4 + 162 \cdot 10^k}{9}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{k+1} \cdot \frac{10^k+2}{3} = \frac{10^{2k+2} + 202 \cdot 10^k + 4}{9}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{k+1} \cdot \frac{10^k+2}{3} = \frac{10^k+2}{3} \cdot \frac{10^{k+2}+2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{k+1} = \frac{10^{k+2}+2}{3}.$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k+2$. Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 2.3.7 *Cho dãy số (u_n) xác định bởi*

$$u_1 = \sqrt{2}$$

$$u_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$u_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+....+\sqrt{2}}}}, \quad n \text{ dấu căn bậc hai}$$

Chứng minh rằng: $u_n = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta có

$$u_1 = 2\cos\frac{\pi}{4} \text{ (đúng)}.$$

Vậy đẳng thức đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử, đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$u_k = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}} \text{ (k dấu căn bậc hai)}.$$

Ta phải chứng minh đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là

$$u_{k+1} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}} \text{ (k+1 dấu căn bậc hai)}.$$

Thật vậy

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}} \quad \text{(k+1 dấu căn bậc hai)} \\
&= \sqrt{2 + \left(\sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}\right)} = \sqrt{2 + u_k} \\
&= \sqrt{2 + 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}} = \sqrt{2\left(1 + \cos\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)} \\
&= \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}.
\end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, đẳng thức đúng với mọi $n \geq 1$.

2.3.2 Dãy Fibonacci

Định nghĩa: Dãy Fibonacci là dãy số $u_1, u_2, ..$ được định nghĩa bằng công thức $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, n \geq 1 \end{cases}$

Những số $u_1, u_2, ...$ được gọi là số Fibonacci.

Một số số hạng của dãy:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...$$

Dãy số Fibonacci thường gặp trong tự nhiên. Những chiếc lá trên cành cây mọc cách nhau các khoảng cách ứng với các số trong dãy Fibonacci. Số cánh hoa trong hầu hết các bông hoa là các số trong dãy Fibonacci. Hoa loa kèn có 3 cánh, hoa mao lương vàng có 5 cánh, hoa phi yến có 8 cánh,...Trong hoa hướng dương cũng xuất hiện các số Fibonacci.

Ngoài những điều thú vị trên, một số vấn đề của kiến trúc, hội họa, âm nhạc,... cũng liên quan đến các số Fibonacci.

Ví dụ 2.3.8 *Chứng minh rằng trong dãy Fibonacci*

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = u_{n+2} - 1, n > 1.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 2$, theo định nghĩa về dãy, ta có

$$u_1 + u_2 = 1 + 1 = 3 - 1 = u_4 - 1.$$

Vậy khẳng định đúng với $n = 2$.

Bước quy nạp: Giả sử, khẳng định đúng với $n = k \geq 2$, tức là

$$u_1 + u_2 + ... + u_k = u_{k+2} - 1.$$

Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là

$$u_1 + u_2 + ... + u_k + u_{k+1} = u_{k+3} - 1.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + ... + u_k + u_{k+1} &= (u_1 + u_2 + ... + u_k) + u_{k+1} \\ &= (u_{k+2} - 1) + u_{k+1} \\ &= u_{k+1} + u_{k+2} - 1 \\ &= u_{k+3} - 1. \end{aligned}$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định đúng với mọi $n > 1$.

Ví dụ 2.3.9 *Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, ta có*

$$u_1 + u_3 + u_5 + ... + u_{2n-1} = u_{2n}.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta có $u_1 = u_2 = 1$.

Vậy khẳng định đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử, khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$u_1 + u_3 + u_5 + ... + u_{2k-1} = u_{2k}.$$

Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là

$$u_1 + u_3 + u_5 + ... + u_{2k-1} + u_{2k+1} = u_{2k+2}.$$

Thật vậy, ta có

$$u_1 + u_3 + u_5 + ... + u_{2k-1} + u_{2k+1} = u_{2k} + u_{2k+1} = u_{2k+2}.$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định đúng với mọi $n \geq 1$.

Ví dụ 2.3.10 *Chứng minh rằng*

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + ... + u_n^2 = u_n u_{n+1}, n \geq 1.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta có $u_1 = 1 = u_1.u_2$.

Vậy khẳng định đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử, khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + ... + u_k^2 = u_k u_{k+1}.$$

Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + ... + u_k^2 + u_{k+1}^2 = u_{k+1} u_{k+2}.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + ... + u_k^2 + u_{k+1}^2 &= u_k u_{k+1} + u_{k+1}^2 \\ &= u_{k+1}(u_k + u_{k+1}) \\ &= u_{k+1} u_{k+2}. \end{aligned}$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định đúng với mọi $n \geq 1$.

Ví dụ 2.3.11 *Chứng minh rằng*

$$u_{n+1}u_{n+2} - u_n u_{n+3} = (-1)^n.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta phải chứng minh

$$u_2.u_3 - u_1 u_4 = 1.2 - 1.3 = (-1)^1 \text{ (đúng)}.$$

Vậy khẳng định đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử, khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$u_{k+1}u_{k+2} - u_k u_{k+3} = (-1)^k.$$

Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là

$$u_{k+2}u_{k+3} - u_{k+1}u_{k+4} = (-1)^{k+1}.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} u_{k+2}u_{k+3} - u_{k+1}u_{k+4} &= (u_k + u_{k+1})u_{k+3} - u_{k+1}(u_{k+2} + u_{k+3}) \\ &= u_k u_{k+3} + u_{k+1}u_{k+3} - u_{k+1}u_{k+2} - u_{k+1}u_{k+3} \\ &= -(u_{k+1}u_{k+2} - u_k u_{k+3}) = -(-1)^k = (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định đúng với mọi $n \geq 1$.

Ví dụ 2.3.12 *Chứng minh rằng*

a) $u_{m+n} = u_{m-1}u_n + u_{n+1}u_m,$ *với* $m \geq 1, n \geq 1.$

b) $u_1u_2 + u_2u_3 + ... + u_{2n-1}u_{2n} = u_{2n}^2, n \in \mathbb{N}^*.$

Bài giải

a) Với $m \geq 1$ bất kì, ta chứng minh đẳng thức bằng phương pháp quy nạp theo n.

Bước cơ sở: Với $n = 1$, đẳng thức trở thành $u_{m+1} = u_m + u_{m-1}$ (vì $u_1 = u_2 = 1$) nên đẳng thức đúng với $n = 1$.

Khi $n = 2$, đẳng thức trở thành

$$\begin{aligned} u_{m+2} &= u_{m-1} + 2u_m \\ &= (u_m + u_{m-1}) + u_m \\ &= u_{m+1} + u_m \text{ (đúng vì } u_2 = 1, u_3 = 2). \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đúng với $n = 2$.

Bước quy nạp: Giả sử đẳng thức đúng với $n = k - 1, n = k (k \geq 2)$, tức là ta có

$$u_{m+(k-1)} = u_{m-1}u_{k-1} + u_k u_m,$$

$$u_{m+k} = u_{m-1}u_k + u_{k+1}u_m.$$

Ta phải chứng minh đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là

$$u_{m+(k+1)} = u_{m-1}u_{k+1} + u_{k+2}u_m.$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} u_{m+(k+1)} &= u_{m+k} + u_{m+(k-1)} \\ &= u_{m-1}u_k + u_{k+1}u_m + u_{m-1}u_{k-1} + u_k u_m \\ &= u_{m-1}(u_k + u_{k-1}) + u_m(u_{k+1} + u_k) \\ &= u_{m-1}u_{k+1} + u_{k+2}u_m. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

b) Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

Bước cơ sở: Với $n = 1$ ta phải chứng minh

$$u_1 u_2 = u_2^2 \text{ (đúng)}.$$

Vậy đẳng thức đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$u_1u_2 + u_2u_3 + ... + u_{2k-1}u_{2k} = u_{2k}^2.$$

Ta phải chứng minh đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là

$$u_1u_2 + u_2u_3 + ... + u_{2k-1}u_{2k} + u_{2k}u_{2k+1} + u_{2k+1}u_{2k+2} = u_{2k+2}^2.$$

Thật vậy

$$\begin{aligned}
& u_1u_2 + u_2u_3 + ... + u_{2k-1}u_{2k} + u_{2k}u_{2k+1} + u_{2k+1}u_{2k+2} \\
= \; & u_{2k}^2 + u_{2k}u_{2k+1} + u_{2k+1}u_{2k+2} \\
= \; & u_{2k}(u_{2k} + u_{2k+1}) + u_{2k+1}u_{2k+2} \\
= \; & u_{2k}u_{2k+2} + u_{2k+1}u_{2k+2} \\
= \; & u_{2k+2}(u_{2k} + u_{2k+1}) \\
= \; & u_{2k+2}u_{2k+2} = u_{2k+2}^2.
\end{aligned}$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.3.13 *Chứng minh rằng*

a) $u_n^2 + u_{n+1}^2 = u_{2n+1}$ *với* $n \geq 2$.

b) $u_nu_{n+1} + u_{n+1}u_{n+2} = u_{2n+2}$ *với* $n \geq 2$.

Bài giải

a) Ta chứng minh tính chất bằng phương pháp quy nạp toán học.

Bước cơ sở:Với $n = 2$, ta phải chứng minh

$$u_2^2 + u_3^2 = u_5 \text{ (đúng)}.$$

Vậy đẳng thức đúng với $n = 2$.

Bước quy nạp: Giả sử, đẳng thức đúng với $n = k \geq 2$, tức là

$$u_k^2 + u_{k+1}^2 = u_{2k+1}.$$

Ta phải chứng minh đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là

$$u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2 = u_{2k+3}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2 &= u_{k+1}^2 + (u_{k+1} + u_k)^2 \\
&= u_{k+1}^2 + u_{k+1}^2 + u_k^2 + 2u_k u_{k+1} \\
&= u_{k+1}(u_{k+1} + 2u_k) + (u_k^2 + u_{k+1}^2) \\
&= u_{k+1}(u_{k+2} + u_k) + u_{2k+1} \\
&= u_{2k+2} + u_{2k+1} = u_{2k+3}.
\end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, đẳng thức đúng với mọi $n \geq 2$.

b) **Bước cơ sở:** Với $n = 2$, ta phải chứng minh

$$u_2 u_3 + u_3 u_4 = u_6 \text{ (đúng)}.$$

Vậy đẳng thức đúng với $n = 2$.

Bước quy nạp: Giả sử, đẳng thức đúng với $n = k \geq 2$, tức là

$$u_k u_{k+1} + u_{k+1} u_{k+2} = u_{2k+2}.$$

Ta phải chứng minh đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là

$$u_{k+1} u_{k+2} + u_{k+2} u_{k+3} = u_{2k+4}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
u_{k+1} u_{k+2} + u_{k+2} u_{k+3} &= u_{k+1}(u_{k+1} + u_k) + u_{k+2}(u_{k+2} + u_{k+1}) \\
&= u_{k+1}^2 + u_{k+1} u_k + u_{k+2}^2 + u_{k+1} u_{k+2} \\
&= (u_k u_{k+1} + u_{k+2} u_{k+1}) + (u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2) \\
&= u_{2k+2} + u_{2k+3} = u_{2k+4}.
\end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, đẳng thức đúng với mọi $n \geq 2$.

2.3.3 Một số bài toán khác

Ví dụ 2.3.14 *Cho* (u_n) *xác định bởi* $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}, n \geq 1 \end{cases}$

Chứng minh dãy số trên là dãy số giảm và bị chặn dưới.

Bài giải

*) Chứng minh dãy số là giảm.

Ta phải chứng minh

$$u_{n+1} < u_n, \forall n \geq 1$$

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta có:

$$u_2 = \frac{u_1 + 1}{2} = \frac{2+1}{2} < u_1 \text{ (đúng).}$$

Vậy khẳng định đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$u_{k+1} < u_k.$$

Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là

$$u_{k+2} < u_{k+1}.$$

Thật vậy

$$u_{k+2} = \frac{u_{k+1} + 1}{2} < \frac{u_k + 1}{2} = u_{k+1}.$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định đúng với mọi $n \geq 1$.

*) Chứng minh dãy bị chặn dưới.

Ta phải chứng minh $u_n > 1, \forall n \geq 1$.

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta có $u_1 = 2 > 1$.

Vậy mệnh đề đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$u_k > 1.$$

Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là

$$u_{k+1} > 1.$$

Thật vậy

$$u_{k+1} = \frac{u_k + 1}{2} > \frac{1+1}{2} = 1.$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định đúng với mọi $n \geq 1$.

Ví dụ 2.3.15 *Cho dãy số (u_n) xác định như sau*

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}^2 + 2}{u_{n-2}}, n = 3, 4, ... \end{cases}$$

Chứng minh mọi số hạng trong dãy đều là số nguyên.

Bài giải

Đầu tiên, ta chứng minh $u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}, \forall n \geq 3$.

Bước cơ sở: Với $n = 3$, ta có $u_3 = \dfrac{1^2 + 2}{1} = 3 = 4u_2 - u_1$.

Vậy khẳng định trên là đúng với $n = 3$.

Bước quy nạp: Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 3$, tức là ta có

$$u_k = 4u_{k-1} - u_{k-2}.$$

Ta phải chứng minh khằng định đúng với $n = k + 1$, tức là

$$u_{k+1} = 4u_k - u_{k-1}.$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} & u_{k+1} = 4u_k - u_{k-1} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{u_k^2 + 2}{u_{k-1}} = 4u_k - u_{k-1} \\ \Leftrightarrow\ & u_k^2 + 2 = 4u_k u_{k-1} - u_{k-1}^2 \\ \Leftrightarrow\ & (4u_{k-1} - u_{k-2})^2 + 2 = 4(4u_{k-1} - u_{k-2})u_{k-1} - u_{k-1}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ u_{k-2}^2 - 4u_{k-1}u_{k-2} + 2 = -u_{k-1}^2\\
&\Leftrightarrow\ u_{k-1}^2 + 2 = u_{k-2}(4u_{k-1} - u_{k-2})\\
&\Leftrightarrow\ \frac{u_{k-1}^2 + 2}{u_{k-2}} = 4u_{k-1} - u_{k-2}\\
&\Leftrightarrow\ u_k = 4u_{k-1} - u_{k-2}.
\end{aligned}$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có $u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}, \forall n \geq 3$.

Ta đi chứng minh mọi số hạng trong dãy là số nguyên.

Bước cơ sở: Với $n = 1, n = 2$ ta có $u_1 = u_2 = 1$ đều là số nguyên.

Vậy khẳng định đúng với $n = 1, n = 2$.

Bước quy nạp: Giả sử, khẳng định đúng với $n = k - 1$ và $n = k$ $(k \geq 1)$, tức là u_{k-1} và u_k đều là số nguyên.

Ta phải chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$, tức là ta phải chứng minh u_{k+1} cũng là số nguyên.

Thật vậy, ta có $u_{k+1} = 4u_k - u_{k-1}$ (theo cmt).

Mà theo giả thiết quy nạp, u_{k-1} và u_k đều là số nguyên nên suy ra u_{k+1} cũng là số nguyên.

Ví dụ 2.3.16 *Cho dãy* (u_n) *xác định bởi*

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = 2u_{n-2} + u_{n-1}, n \geq 3 \end{cases}$$

Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy số này đều là số lẻ.

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 1, n = 2$, ta có: $u_1 = u_2 = 1$ là số lẻ.

Vậy khẳng định đúng với $n = 1, n = 2$.

Bước quy nạp: Giả sử khẳng định đúng với $n = k-1$ và $n = k (k \geq 2)$, tức là

u_{k-1} và u_k là số lẻ.

Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là

u_{k+1} là số lẻ.

Thật vậy, ta có

$$u_{k+1} = 2u_{k-1} + u_k$$

Mà $2u_{k-1}$ là một số chẵn, u_k là một số lẻ.

$\Rightarrow 2u_{k-1} + u_k$ là một số lẻ $\Rightarrow u_{k+1}$ là một số lẻ.

Vậy khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.3.17 *Cho dãy số (u_n) xác định như sau*

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_n = u_{n-2} + 2u_{n-1}, n \geq 3 \end{cases}$$

Chứng minh rằng

$$u_n \leq \left(\frac{5}{2}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta có $u_1 = 1 \leq \frac{5}{2}$.

Với $n = 2$, ta có$u_2 = 2 \leq \left(\frac{5}{2}\right)^2$.

Vậy khẳng định đúng với $n = 1, n = 2$.

Bước quy nạp: Giả sử khẳng định đúng với $n = k-1$ và $n = k(k \geq 2)$, tức là

$$u_{k-1} \leq \left(\frac{5}{2}\right)^{k-1} \text{ và } u_k \leq \left(\frac{5}{2}\right)^k.$$

Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là

$$u_{k+1} \leq \left(\frac{5}{2}\right)^{k+1}.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_{k-1} + 2u_k \leq \left(\frac{5}{2}\right)^{k-1} + 2\left(\frac{5}{2}\right)^k \\ &= \left(\frac{5}{2}\right)^{k+1} \cdot \left[\left(\frac{5}{2}\right)^{-2} + 2\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}\right] \\ &= \left(\frac{5}{2}\right)^{k+1} \cdot \left(\frac{4}{25} + \frac{4}{5}\right) \\ &= \left(\frac{5}{2}\right)^{k+1} \cdot \frac{24}{25} < \left(\frac{5}{2}\right)^{k+1}. \end{aligned}$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

2.4 Một số bài toán về hình học

Trong mục này trình bày một số bài toán hình học vận dụng phương pháp quy nạp toán học liên quan đến tính góc, tính số đường chéo của một đa giác, một số bài toán về bất đẳng thức trong tam giác.

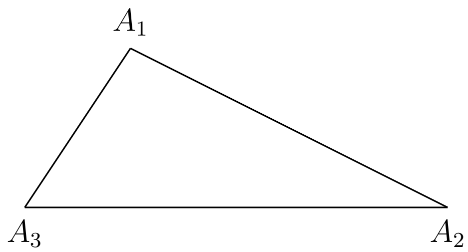
Ví dụ 2.4.1 *Gọi $S(n)$ là tổng các góc trong một đa giác lồi n cạnh . Chứng minh*

$$S(n) = (n-2).180^0, \forall n \geq 3.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 3$, ta phải chứng minh

$$S(3) = (3-2).180^0 = 180^0 \text{ (đúng)}.$$



Hình 2.4.1

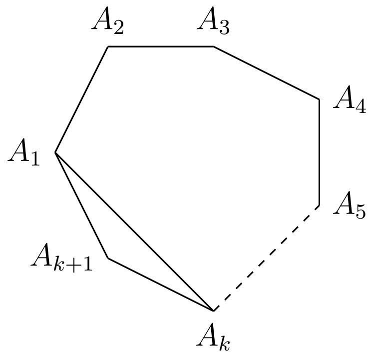
Vậy khẳng định đúng với $n = 3$.

Bước quy nạp: Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 3$, tức là ta có

$$S_k = (k-2).180^0.$$

Ta cần phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k+1$, tức là

$$S_{k+1} = (k-1).180^0.$$



Hình 2.4.2

Thật vậy: Từ đa giác $k+1$ đỉnh $A_1A_2A_3...A_kA_{k+1}$ Ta nối A_1 với A_k, ta được đa giác k đỉnh $A_1A_2...A_k$ và tam giác $A_1A_kA_{k+1}$ nên tổng số góc trong đa giác tăng lên 180^0. Có nghĩa là

$$S_{k+1} = S_k + 180^0 = (k-2).180^0 + 180^0 = (k-1).180^0.$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

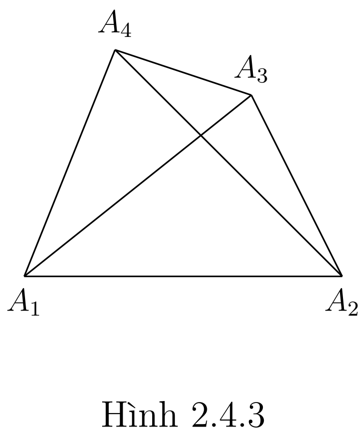
Ví dụ 2.4.2 *Gọi số đường chéo của một đa giác lồi n cạnh là $S_n, n \geq 4$. Chứng minh rằng*

$$S(n) = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 4$, ta thấy tứ giác có 2 đường chéo, thỏa mãn

$$S(4) = \frac{4(4-3)}{2} = 2.$$



Hình 2.4.3

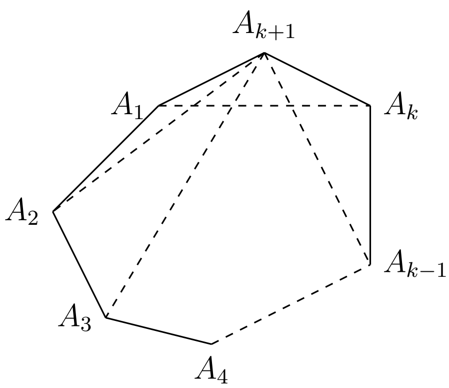
Vậy khẳng định đúng với $n = 4$.

Bước quy nạp: Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 4$, nghĩa là đa giác lồi có k cạnh có số đường chéo là

$$S(k) = \frac{k(k-3)}{2}.$$

Ta phải chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, tức là ta phải chứng minh đa giác lồi $k + 1$ cạnh có số đường chéo là

$$S(k+1) = \frac{(k+1)(k-2)}{2}.$$



Hình 2.4.4

Thật vậy, khi thêm đỉnh thứ $k + 1$ thì có thêm $k - 2$ đường chéo nối từ A_{k+1} đến $A_2, A_3, ..., A_{k-1}$. Ngoài ra, A_1A_k cũng thành đường chéo. Do đó

$$\begin{aligned} S(k+1) &= S(k) + (k-2) + 1 \\ &= \frac{k(k-3)}{2} + (k-2) + 1 \\ &= \frac{k^2 - k - 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k-2)}{2}. \end{aligned}$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.4.3 *Trong mặt phẳng n hình lồi ($n \geq 4$), mà ba hình bất kì trong chúng có điểm chung. Chứng minh rằng cả n hình lồi đã cho có điểm chung.*

Bài giải

Bước cơ sở: Với $n = 4$, xét 4 hình lồi ký hiệu $(H_1), (H_2), (H_3), (H_4)$ và:

$$A_1 \in (H_2) \cap (H_3) \cap (H_4),$$
$$A_2 \in (H_1) \cap (H_3) \cap (H_4),$$
$$A_3 \in (H_1) \cap (H_2) \cap (H_4),$$
$$A_4 \in (H_1) \cap (H_2) \cap (H_3).$$

Có hai khả năng sau:

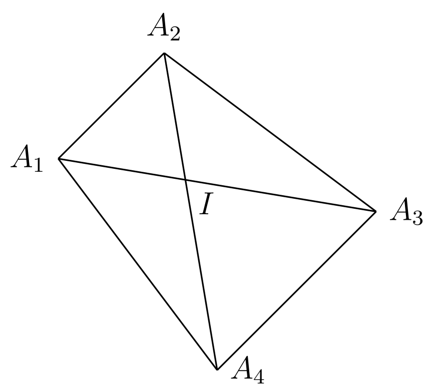
(i) 3 trong 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 thẳng hàng.

Giả sử A_1, A_2, A_3 thẳng hàng và điểm A_2 thuộc đoạn A_1A_3. Ta có (H_2) là hình lồi mà $A_1, A_3 \in (H_2)$ nên đoạn A_1A_3 nằm trong (H_2). Nên $A_2 \in (H_2)$.

Vậy $A_2 \in (H_1) \cap (H_2) \cap (H_3) \cap (H_4)$ hay cả 4 hình có điểm chung.

(ii) Trong 4 điểm không có 3 điểm nào thẳng hàng. Lại có hai khả năng:

+) 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 là 4 đỉnh của một tứ giác lồi. Giả sử đó là tứ giác $A_1A_2A_3A_4$. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo A_1A_3 và A_2A_4. Ta có:



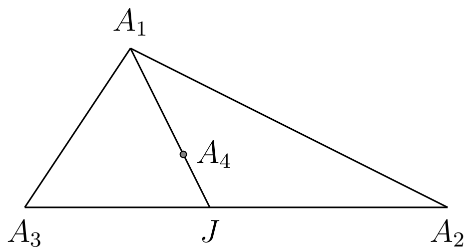
Hình 2.4.5

$A_2, A_4 \in (H_1), (H_3) \Rightarrow$ Đoạn $A_2A_4 \subset (H_1), (H_3) \Rightarrow I \in (H_1), (H_3)$.

$A_1, A_3 \in (H_2), (H_4) \Rightarrow$ Đoạn $A_1A_3 \subset (H_2), (H_4) \Rightarrow I \in (H_2), (H_4)$.

Vậy $I \in (H_1), (H_2), (H_3), (H_4)$ hay cả 4 hình đều có điểm chung.

+) Trong 4 điểm có 3 điểm tạo thành một tam giác, điểm còn lại nằm bên trong tam giác. Giả sử tam giác là $A_1A_2A_3$ chứa A_4. Gọi J là giao điểm của A_2A_3 và A_1A_4.



Hình 2.4.6

Tương tự như trên, ta có:

$$J \in (H_1), (H_2), (H_3), (H_4)$$

Vậy mệnh đề đúng với $n = 4$.

Bước quy nạp: Giả sử, mệnh đề đúng với $n = k \geq 4$, tức là k hình lồi đều có điểm chung.

Ta phải chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$, tức là ta phải chứng minh $k + 1$ hình lồi bất kì $(H_1), (H_2), ..., (H_k), (H_{k+1})$ đều có điểm chung.

Đặt $(H_{k'}) = (H_k) \cap (H_{k+1})$.

Xét k hình lồi $(H_1), (H_2), ..., (H_{k'})$. Theo giả thiết, k hình lồi này đều có điểm chung. Đó cũng là điểm chung của $(k+1)$ hình lồi $(H_1), (H_2), ..., (H_k), (H_{k+1})$.

Vậy khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.4.4 *Cho tam giác ABC vuông tại C. Gọi a, b, c là lần lượt là độ dài các cạnh BC, AC, AB. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2^{n-1}} c^{2n} \leq a^{2n} + b^{2n} \leq c^{2n}, n \geq 1.$$

Bài giải

*) Ta chứng minh

$$a^{2n} + b^{2n} \leq c^{2n}. \tag{2.14}$$

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta phải chứng minh

$$a^2 + b^2 \leq c^2 \text{ (đúng)}.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử, bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, ta có

$$a^{2k} + b^{2k} \leq c^{2k}.$$

Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là

$$a^{2(k+1)} + b^{2(k+1)} \leq c^{2(k+1)}.$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} a^{2(k+1)} + b^{2(k+1)} &= (a^{2k} + b^{2k})(a^2 + b^2) - a^2 b^{2k} - b^2 a^{2k} \\ &< c^{2k} c^2 = c^{2k+1}. \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, bất đẳng thức đúng với mọi n.

*) Ta chứng minh

$$\frac{1}{2^{n-1}} c^{2n} \leq a^{2n} + b^{2n}. \tag{2.15}$$

Áp dụng **Ví dụ 2.2.16**, ta có

$$\begin{aligned} & \frac{a^{2n} + b^{2n}}{2} = \frac{(a^2)^n + (b^2)^n}{2} \geq \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right)^n. \\ \Leftrightarrow \quad & a^{2n} + b^{2n} \geq 2 \frac{c^{2n}}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} c^{2n} \text{ (đpcm)}. \end{aligned}$$

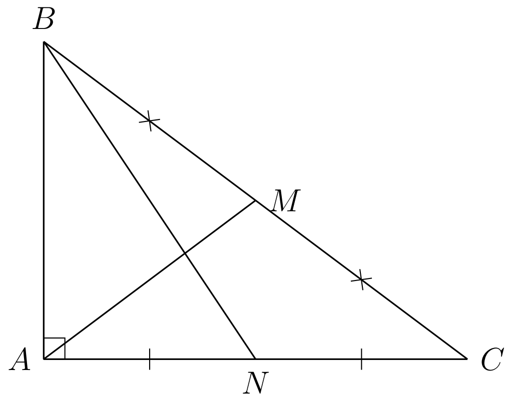
Từ (2.14), (2.15) suy ra

$$\frac{1}{2^{n-1}} c^{2n} \leq a^{2n} + b^{2n} \leq c^{2n}$$

Ví dụ 2.4.5 *Cho tam giác ABC vuông tại A. Đặt $BC = a, AB = c$, $AC = b$. Gọi m_a, m_b lần lượt là độ dài đường trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B của tam giác. Chứng minh rằng*

$$2^{3n-1} \left(m_a^{2n} + m_b^{2n} \right) \geq 5^n . c^{2n}, n \geq 1.$$

Bài giải



Hình 2.4.7

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AC.

$\Rightarrow AM, BN$ là đường trung tuyến xuất phát từ A, B hay $m_a = AM, m_b = BN$.

Ta có:

$$\begin{aligned} m_a^2 + m_b^2 &= AM^2 + BN^2 = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + BN^2 \\ &= \frac{a^2}{4} + c^2 + \frac{b^2}{4} = c^2 + \frac{c^2}{4} = \frac{5}{4}c^2. \end{aligned}$$

Áp dụng **Ví dụ 2.2.17**, ta có

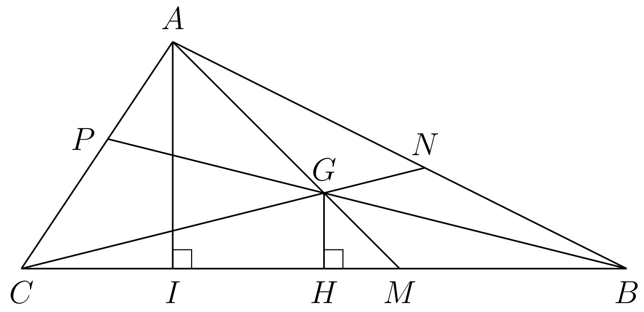
$$\frac{(m_a^2)^n + (m_b^2)^n}{2} \geq \left(\frac{m_a^2 + m_b^2}{2}\right)^n = \left(\frac{5}{8}c^2\right)^n.$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^{3n-1}\left(m_a^{2n} + m_b^{2n}\right) \geq 5^n.c^{2n} \text{ (đpcm)}.$$

Ví dụ 2.4.6 *Cho tam giác ABC có M thuộc cạnh BC, N thuộc cạnh AB, P thuộc cạnh AC sao cho AM, BP, CN đồng quy tại G. Chứng minh rằng với mỗi n nguyên dương, ta có:*

$$\left(\frac{GM}{MA}\right)^n + \left(\frac{GN}{NC}\right)^n + \left(\frac{GP}{PB}\right)^n \geq \frac{1}{3^{n-1}}, n \geq 1.$$

Bài giải



Hình 2.4.8

Gọi I, H lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ A, G xuống BC.

$\Rightarrow AI \parallel GH$.

Áp dụng định lý Talet trong tam giác AIM, ta có

$$\frac{GM}{MA} = \frac{GH}{AI} = \frac{S_{\triangle GCB}}{S_{\triangle ABC}}.$$

Tương tự, ta có

$$\frac{GN}{CN} = \frac{S_{\triangle GAB}}{S_{\triangle ABC}}\ ,\ \frac{GP}{PB} = \frac{S_{\triangle GAC}}{S_{\triangle ABC}}.$$

Suy ra

$$\frac{GM}{MA} + \frac{GN}{CN} + \frac{GP}{PB} = \frac{S_{\triangle GCB}}{S_{\triangle ABC}} + \frac{S_{\triangle GAB}}{S_{\triangle ABC}} + \frac{S_{\triangle GAC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC}} = 1.$$

Áp dụng **Ví dụ 2.2.16**

$$\frac{a^n + b^n + c^n}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n.$$

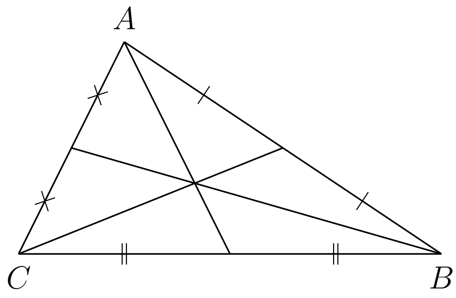
Ta có

$$\left(\frac{GM}{MA}\right)^n + \left(\frac{GN}{NC}\right)^n + \left(\frac{GP}{PB}\right)^n \geq \frac{3}{3^n}\left(\frac{GM}{MA} + \frac{GN}{CN} + \frac{GP}{PB}\right)^n = \frac{1}{3^{n-1}} \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 2.4.7 *Cho* $\triangle\ ABC$ *có* $BC = a, AC = b, AB = c$. *Độ dài đường trung tuyến từ* A, B, C *là* m_a, m_b, m_c. *Chứng minh rằng*

$$m_a^{2n} + m_b^{2n} + m_c^{2n} \geq 3\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}\right)^n, n \geq 1.$$

Bài giải



Hình 2.4.9

Áp dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến, ta có

$$\begin{aligned} m_a^2+m_b^2+m_c^2 &= \left(\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)+\left(\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}\right)+\left(\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}\right)\\ &= \left(\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{a^2+c^2}{2}+\frac{a^2+b^2}{2}\right)-\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}\right)\\ &= (a^2+b^2+c^2)-\frac{a^2+b^2+c^2}{4}=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2). \end{aligned}$$

Áp dụng **Ví dụ 2.2.16**

$$\frac{a^n+b^n+c^n}{3}\ge\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n.$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{m_a^{2n}+m_b^{2n}+m_c^{2n}}{3} &= \frac{(m_a^2)^n+(m_b^2)^n+(m_c^2)^n}{3}\\ &\ge \left(\frac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{3}\right)^n\\ &= \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{4}\right)^n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m_a^{2n}+m_b^{2n}+m_c^{2n}\ge 3\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{4}\right)^n \text{ (đpcm).}$$

Bài tập đề nghị

Bài tập 1. Chứng minh $n^5-n \,\vdots\, 30$ với n nguyên dương.

Bài tập 2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì

$$n^3+3n^2+5n \,\vdots\, 3.$$

Bài tập 3. Chứng minh rằng với n nguyên dương, ta có

$$2^{6n+1} + 3^{2n+2} \vdots 11.$$

Bài tập 4. Chứng minh rằng

$$n(n+1)(n+2)(n+3) \vdots 24, n \geq \mathbb{N}^*.$$

Bài tập 5. Chứng minh rằng

$$20^n - 8^n \vdots 6, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài tập 6. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì

$$(n+1)(n+2)....(n+n) \vdots 2^n.$$

Bài tập 7. Chứng minh rằng $3^{2^n} - 1$ chia hết cho 2^{n+2} với n nguyên dương.

Bài tập 8. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, ta có

$$3(1^5 + 2^5 + ... + n^5) \vdots 1^3 + 2^3 + ... + n^3.$$

Bài tập 9. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta có

$$2 + 5 + ... + (3n-1) = \frac{n(3n+1)}{2}.$$

Bài tập 10. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, ta có

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Bài tập 11. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, ta có

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + ... + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Bài tập 12. Chứng minh rằng với mọi $x \neq k2\pi, n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2sin\frac{x}{2}}.$$

Bài tập 13. Chứng minh rằng, với mọi n nguyên dương, ta có

$$2^{n+2} > 2n + 5.$$

Bài tập 14. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn: $x + y = 1$. Chứng minh rằng

$$x^n + y^n \geq \frac{1}{2^{n-1}}, \forall n \geq 1.$$

Bài tập 15. Cho dãy (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 5 \\ u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}, n = 3, 4, ... \end{cases}.$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy số.

Bài tập 16. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{(n+1)u_n}{3n}, n \geq 1 \end{cases}.$$

Xác định công thức số hạng tổng quát của dãy số.

Bài tập 17. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}, n \geq 1 \end{cases}.$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy số.

Bài tập 18. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2 \\ u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}, n = 2, 3, ... \end{cases}.$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy số.

Bài tập 19. Chứng minh rằng trong dãy Fibonacci, ta có

$$u_2 + u_4 + u_6 + .. + u_{2n} = u_{2n+1} - 1, n \geq 1.$$

Bài tập 20. Chứng minh rằng trong dãy Fibonacci nếu n chia hết cho m, thì u_n chia hết cho u_m.

Bài tập 21. Cho dãy Fibonacci, chứng minh rằng $u_{5n} \vdots 5$ với $n = 1, 2, ...$

Bài tập 22. Cho $x + \frac{1}{x}, x \neq 0$ là một số nguyên. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n,

$$T(n) = x^n + \frac{1}{x^n}$$

cũng là một số nguyên.

Bài tập 23. Số đường chéo của một đa giác lồi là 35. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu đỉnh?

Bài tập 24. Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng

a) $\tan^n A + \tan^n B + \tan^n C \geq 3^{1+\frac{n}{2}}, \forall n \geq \mathbb{N}^*$.

b) $\sqrt[n]{\cos A} + \sqrt[n]{\cos B} + \sqrt[n]{\cos C} \leq \dfrac{3}{\sqrt[n]{2}}, \forall n \geq \mathbb{N}^*$.

KẾT LUẬN

Được sự đồng ý của nhà trường, em đã tiến hành nghiên cứu đề tài Khóa luận tốt nghiệp: "***Ứng dụng của phương pháp quy nạp toán học vào giải toán ở trường trung học phổ thông***". Trong quá trình nghiên cứu, đề tài đã đạt được các kết quả sau:

- Trình bày phép quy nạp, phương pháp quy nạp toán học.
- Nêu được một số hình thức của phương pháp quy nạp toán học.
- Trình này một số ứng dụng của phương pháp quy nạp toán học trong đại số, số học, hình học và đưa ra hệ thống phong phú các ví dụ minh họa cho các ứng dụng.

Về cơ bản Khóa luận đã đạt được các mục tiêu và hoàn thành các nhiệm vụ đặt ra khi tiến hành nghiên cứu. Tuy nhiên, do là lần đầu nghiên cứu một vấn đề khoa học nên chắc chắn Khóa luận còn có thiếu sót, em mong nhận được các ý kiến đóng góp của các thày cô để đề tài được hoàn thiện hơn. Em xin chân thành cảm ơn.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Hữu Điền (2000), *Phương pháp quy nạp toán học*, Nhà xuất bản Giáo dục.

[2] Lê Hồng Đức, Nhóm Cự Môn (2007), *Giải toán Đại số và Giải tích 11*, Nhà xuất bản Hà Nội.

[3] Bùi Huy Hiền, Nguyễn Hữu Hoan (2012), *Bài tập Đại số và Số học*, Nhà xuất bản Đại học Sư Phạm .

[4] Nguyễn Thị Mỹ Lệ (2015), *Phương pháp quy nạp với các bài toán phổ thông*, Đại học Quốc gia Hà Nội.

[5] I.X.Xôminxki, người dịch: Nguyễn Văn Bằng (1962) *Phương pháp quy nạp toán học*, Nhà xuất bản Giáo dục.

[6] Các đề thi olympic.

[7] Một số trang web: *diendantoanhoc.net , mathvn.com.*

Giảng viên hướng dẫn	Sinh viên thực hiện
ThS. Đặng Thị Thu Hiền	**Nguyễn Thị Thu Hoài**

Xác nhận của Giảng viên hướng dẫn	**Xác nhận của thư kí hội đồng**
Đặng Thị Thu Hiền	**Nguyễn Thị Nhàn**