

TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ
KHOA SƯ PHẠM TRUNG HỌC

BÁO CÁO KẾT QUẢ
THỰC HIỆN ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC SINH VIÊN

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ TÌM
CỰC TRỊ VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Chủ nhiệm đề tài: ĐOÀN THỊ NA
Lớp: D16 TOÁN
Ngành: SƯ PHẠM TOÁN

NINH BÌNH, 2025

TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ
KHOA SƯ PHẠM TRUNG HỌC

BÁO CÁO KẾT QUẢ
THỰC HIỆN ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC SINH VIÊN

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ TÌM
CỰC TRỊ VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM
SỐ

Chủ nhiệm đề tài: ĐOÀN THỊ NA

Các thành viên: 1. ĐỖ THỊ HUYỀN TRANG

2. NGUYỄN THUỶ LINH

3. ĐẶNG THỊ PHƯƠNG THẢO

4. BÙI TUẤN MINH

Lớp: D16 TOÁN

Người hướng dẫn khoa học: ThS. NGUYỄN HỮU TIẾN

Xác nhận của GV hướng dẫn

Chủ nhiệm đề tài

NINH BÌNH, 2025

LỜI CẢM ƠN

Đầu tiên chúng em gửi lời cảm ơn chân thành đến Trường Đại học Hoa Lư, các thầy cô giáo trong khoa Sư phạm Trung học,...đã tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp đỡ chúng em trong suốt quá trình học tập nghiên cứu và hoàn thiện đề tài nghiên cứu khoa học này. Đặc biệt, chúng em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới giảng viên Thạc sĩ Nguyễn Hữu Tiến người đã trực tiếp hướng dẫn, giúp đỡ chúng em trong thời gian nghiên cứu vừa qua. Trong thời gian nghiên cứu đề tài, chúng em đã có thêm cho mình những kiến thức quý báu, là hành trang để chúng em có thể vững bước sau này.

Bộ môn toán là một bộ môn rất quan trọng, thú vị và bổ ích có tính thực tiễn cao. Đảm bảo cung cấp kiến thức, gắn liền với thực tiễn nhu cầu của con người nhất là đối với giáo viên Toán. Tuy nhiên do vốn kiến thức năng lực của bản thân còn hạn chế nên đề tài nghiên cứu khoa học của chúng em không tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các quý thầy cô, bạn bè để chúng em học tập, bổ sung hoàn thiện kiến thức, để đề tài được hoàn thiện hơn đồng thời giúp chúng em hoàn thiện về phương pháp giảng dạy của mình để trước khi ra trường chúng em được trang bị đầy đủ kiến thức và phương pháp trở thành một giáo viên thực sự.

Em xin chân thành cảm ơn!

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU	1
1. Tổng quan tình hình nghiên cứu	1
2. Tính cấp thiết của đề tài	2
3. Mục tiêu nghiên cứu	3
4. Đối tượng nghiên cứu	3
5. Cách tiếp cận và phương pháp nghiên cứu	3
CHƯƠNG 1: CƠ SỞ LÝ LUẬN	5
1.1. Đạo hàm	5
1.1.1. Định nghĩa và ý nghĩa của đạo hàm	5
1.1.2. Quy tắc tính đạo hàm	7
1.1.3. Đạo hàm của các hàm số sơ cấp	7
1.1.4. Đạo hàm riêng	8
1.2. Cực trị và giá trị lớn nhất, nhỏ nhất	11
1.2.1. Cực trị của hàm số 1 biến	11
1.2.2. Cực trị của hàm số nhiều biến	12
1.2.3. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số một biến	16
1.2.4. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số hai biến	19
KẾT LUẬN CHƯƠNG 1	24
CHƯƠNG 2: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ TÌM CỰC TRỊ HÀM SỐ VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT	25
2.1. Tìm cực trị và giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số một biến	25
2.1.1. Phương pháp khảo sát trực tiếp hàm số	25
2.1.2. Phương pháp đặt ẩn số phụ	28
2.2. Tìm cực trị và giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số hoặc biểu thức nhiều biến	32
2.2.1. Phương pháp khảo sát trực tiếp hàm số	32
2.2.2. Sử dụng phép thế đưa về hàm số một biến	39
2.2.3. Đặt ẩn số phụ đưa về hàm số một biến	44
2.3. Một số bài toán ứng dụng	50
2.3.1. Bài toán cực trị trong hình học	50
2.3.2. Bài toán cực trị trong vật lí	62
2.3.3. Bài toán cực trị trong kinh tế	71
KẾT LUẬN CHƯƠNG 2	79

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ.....	80
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	81

MỞ ĐẦU

1. Tổng quan tình hình nghiên cứu

Sử dụng đạo hàm để tìm cực trị và giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số được các nhà toán học Việt Nam nghiên cứu và viết trong các tài liệu, giáo trình Giải tích (hoặc Toán cao cấp) dành cho sinh viên đại học, cao đẳng. Một số ứng dụng được viết trong các tài liệu, giáo trình thuộc lĩnh vực toán học ứng dụng, tối ưu hóa và kỹ thuật. Các tài liệu này chủ yếu viết đầy đủ theo hệ thống lý thuyết và đưa ra một số ví dụ minh họa.

Về giảng dạy khái niệm đạo hàm trong trường Trung học phổ thông có nhiều tác giả trong nước đã bàn luận. Tác giả Nguyễn Phúc Lộc (2010) cho rằng các khái niệm Giải tích có tính phức tạp nội tại cao; do vậy, chúng rất khó nhận thức đối với học sinh. Riêng đối với khái niệm đạo hàm, Nguyễn Phú Lộc (2010) bằng cách tiếp cận lịch sử và tiếp cận lý thuyết Didactic toán đã chỉ ra rằng có “chướng ngại nhận thức” cho người mới tiếp xúc khái niệm này. Trong nghiên cứu của mình, tác giả Lê Anh Tuấn (2009) tập trung nghiên cứu các ứng dụng của khái niệm đạo hàm, các vấn đề liên quan đến đạo hàm. Nhìn chung các tác giả đều nghiên cứu về đạo hàm một cách tổng thể, khoa học và logic. Một vài tài liệu đáng chú ý về đề tài này như sau:

Tác giả Nguyễn Thừa Hợp, “Giải tích tập 1, tập 2 và tập 3”; sách cung cấp những kiến thức cơ bản và nâng cao về đạo hàm và việc đi tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số. Bao gồm cách tính đạo hàm bằng định nghĩa, tính đạo hàm tại một điểm, phương trình đạo hàm riêng...Cuốn sách này giúp sinh viên nắm vững lý thuyết cơ bản.

“Giáo trình giải tích tập 1” (NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội) của Trần Đức Long - Nguyễn Đình Sang - Hoàng Quốc Toàn, Giáo trình giải tích này là một trong hai phần chủ yếu của môn học “Toán cao cấp cho chương trình A” được viết theo chương trình mới nhất của Đại học Quốc gia Hà Nội được thông qua năm 1999. Giáo trình này trình bày hầu hết các vấn đề quan trọng của giải tích toán học cổ điển về phép tính vi phân và tích phân. Những bài giảng tổng quát hơn so với các giáo trình dành cho những người lần đầu tiên học môn học này, đồng thời để giúp sinh viên thuận lợi hơn trong việc tiếp xúc với toán học hiện đại, trong chương trình và tiếp đó là trong giáo trình đã đưa vào một số cách trình bày mới như: chuẩn trong không gian R^n để dẫn tới R^n là không gian metric, đạo hàm hàm nhiều biến để sau này mở rộng cho ánh xạ khả vi trên không gian Banach...

Cuốn sách “Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi” của tác giả Phan Huy Khải là một trong những tài liệu nổi tiếng và uy tín. Sách cung cấp các nội dung cơ bản về các phương pháp tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: phương pháp bất đẳng thức, phương pháp lượng giác, phương pháp miền giá trị,...Cuốn sách này cung cấp cho học sinh những kiến thức cơ bản và kỹ năng toán học cần thiết giúp học sinh phát triển khả năng tư duy sáng tạo, linh hoạt trong việc giải quyết các bài toán khó.

Tác giả Trần Kiên Minh, Phạm Văn Tuấn, Lê Thị Bạch Liên, “Lý thuyết ba thế giới toán học và vận dụng vào dạy học đạo hàm”, Tạp chí Khoa học giáo dục, Viện khoa học giáo dục Việt Nam 2016 cung cấp một mô hình cho phép phân tích và hiểu biết về sự phát triển nhận thức toán học của học sinh từ thấp đến cao. Trong nghiên cứu, các tác giả đã làm rõ khung lý thuyết này, thiết kế các nhiệm vụ toán thuộc ba thế giới biểu đạt, thao tác khác nhau và xem xét khả năng lập luận của học sinh trong các thế giới đó. Thế giới hiện thân hỗ trợ tốt cho học sinh bước đầu nhận thức về khái niệm đạo hàm, cung cấp nền tảng để tư duy học sinh phát triển đến mức độ cao và phức tạp hơn.

Cuốn sách “Một số phương pháp chọn lọc giải các bài toán sơ cấp” Tập 2 của tác giả Phan Đức Chính là tài liệu dành cho học sinh chuẩn bị thi vào các trường đại học và bồi dưỡng học sinh giỏi toán. Về nội dung nghiên cứu đạo hàm và ứng dụng đạo hàm trong việc tìm cực trị, sách cung cấp các phương pháp giải toán sơ cấp liên quan đến các chủ đề này. Mặc dù không có thông tin chi tiết về các chương mục cụ thể, nhưng với mục tiêu bồi dưỡng học sinh giỏi toán, sách có thể bao gồm các phương pháp và bài tập về đạo hàm và cực trị, giúp học sinh nắm vững kiến thức và kỹ năng cần thiết trong lĩnh vực này.

Nhìn chung, các công trình nghiên cứu đã cho thấy ứng dụng của đạo hàm. Tuy nhiên, các công trình nghiên cứu chưa đi sâu vào công dụng cũng như vai trò của việc ứng dụng đạo hàm trong các bài toán tìm cực trị hàm số một cách hệ thống với chủ đề “Ứng dụng đạo hàm để tìm cực trị và giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số”.

2. Tính cấp thiết của đề tài

Môn Toán cấp trung học phổ thông đóng vai trò quan trọng trong việc cung cấp kiến thức, kỹ năng cũng như rèn luyện tư duy cho học sinh bước vào đời hoặc học lên. Trong đó đạo hàm và ứng dụng của đạo hàm giữ vai trò chủ đạo, là một trong những nội dung quan trọng trong chương trình môn toán. Chương trình giáo dục phổ thông 2018 đề cao việc phát triển phẩm chất và năng lực của người học trong đó có năng lực vận dụng vào thực tiễn. Nội dung ứng

dụng đạo hàm để tìm cực trị, giá trị lớn nhất, nhỏ nhất là một trong những nội dung quan trọng để giúp cho người học phát triển năng lực đó.

Trong các đề thi tốt nghiệp trung học phổ thông, các đề thi học sinh giỏi cấp phổ thông trung học và đề thi Olympic toán sinh viên hàng năm, các bài toán về cực trị, về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất cũng xuất hiện rất nhiều và gây không ít những khó khăn cho thí sinh, phần lớn học sinh, sinh viên đều cho rằng đây là những bài toán khó không giải được.

Trong chương trình môn toán ở đại học, các bài toán tìm cực trị và cực trị có điều kiện của hàm số nhiều biến; tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số nhiều biến và những ứng dụng của nó cũng được đặt ra khá nhiều. Để giải quyết được các bài toán đó thì yêu cầu người học không chỉ nắm vững kiến thức cơ bản mà đòi hỏi còn phải có tư duy toán học, vận dụng toán học ở mức độ cao hơn. Chính vì vậy không ít sinh viên ngành Toán và sư phạm Toán đều gặp khó khăn trong việc giải các bài toán tìm cực trị của hàm nhiều biến.

Là những sinh viên đại học ngành Sư phạm Toán, với mong muốn tìm tòi, nghiên cứu để nâng cao trình độ của bản thân, hơn nữa nhận thấy vấn đề này có sự gắn kết giữa các môn học ở đại học với kiến thức toán học phổ thông mà sau này mình giảng dạy. Vì vậy chúng em đã lựa chọn nghiên cứu đề tài “Ứng dụng đạo hàm để tìm cực trị và giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số”.

3. Mục tiêu nghiên cứu

Nghiên cứu tài liệu, giáo trình liên quan đến đạo hàm và cực trị của hàm số để hệ thống một số dạng toán và phương pháp giải cho một số dạng toán về ứng dụng đạo hàm để tìm cực trị hàm số và giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

4. Đối tượng nghiên cứu

4.1. Đối tượng nghiên cứu

Các bài toán tìm cực trị hàm số, tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một hàm số hoặc một biểu thức và phương pháp giải.

4.2. Phạm vi nghiên cứu

Ứng dụng đạo hàm để tìm cực trị hàm số, tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một hàm số hoặc một biểu thức.

5. Cách tiếp cận và phương pháp nghiên cứu

5.1. Cách tiếp cận

Lí thuyết - Ứng dụng

5.2. Phương pháp nghiên cứu

- Phương pháp nghiên cứu lý luận:

Phân tích, tổng hợp, so sánh, hệ thống hoá các nội dung liên quan đến đề tài nghiên cứu như: Nghiên cứu một số giáo trình giải tích, phương pháp dạy học môn Toán, sách giáo khoa phổ thông,...

- Phương pháp tổng kết kinh nghiệm:

Tổng kết kinh nghiệm qua trao đổi kinh nghiệm với một số giáo viên giỏi bộ môn Toán ở trường trung học phổ thông; xin ý kiến các giảng viên toán. Từ đó xây dựng hệ thống hoá các bài tập và phương pháp.

CHƯƠNG 1: CƠ SỞ LÝ LUẬN

1.1. Đạo hàm

1.1.1. Định nghĩa và ý nghĩa của đạo hàm

1.1.1.1. Đạo hàm

Giả sử cho hàm $f(x)$ xác định trong một khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A, \quad A \in \mathbb{R}$$

thì giới hạn A này được gọi là **đạo hàm** của $f(x)$ tại điểm x_0 và được ký hiệu là $f'(x_0)$.

Nếu $A = \pm\infty$ thì trùng lặp khi đó ta cũng nói $f'(x_0) = \pm\infty$ là **đạo hàm vô hạn**. Nếu không nói gì đặc biệt thì ta hiểu đó là **đạo hàm hữu hạn**.

Nếu đưa vào số gia $\Delta x = x - x_0$ của biến tại x_0 và số gia $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ tương ứng của hàm thì rõ ràng là

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Trị số đạo hàm $f'(x_0)$ tại x_0 của hàm $f(x)$, nếu nó tồn tại thì không những nó phụ thuộc vào hàm $f(x)$ mà còn phụ thuộc vào vị trí của điểm x_0 . Bởi vậy, ta ký hiệu lại điểm x_0 mà tại đó ta xét giá trị của đạo hàm là x , thì đạo hàm tại điểm x của hàm $f(x)$ là một hàm của biến x và được ký hiệu là $f'(x)$.

1.1.1.2. Ý nghĩa của đạo hàm

Giả sử cho hàm $y = f(x)$ có đồ thị là một đường cong C . Gọi M_0 và M là hai điểm trên đường cong C lần lượt có tọa độ $(x_0; f(x_0))$ và $(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$. Gọi P_0 và P lần lượt là hình chiếu của M_0 và M xuống trục Ox và H là giao điểm của mặt phẳng với đường thẳng đi qua M_0M và song song với trục Oz .

Rõ ràng là

$$\overline{M_0H} = \overline{P_0P} = \Delta x, \quad \overline{HM} = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f = \Delta y.$$

Do đó

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\overline{HM}}{\overline{M_0H}} = \tan \theta$$

trong đó $\theta = \widehat{(M_0H, M_0M)}$ là góc lượng giác hợp bởi trục Ox và cát tuyến M_0M .

Khi $\Delta x \rightarrow 0$, điểm M sẽ dần về điểm M_0 và nếu cát tuyến M_0M dần về vị trí giới hạn M_0T thì đường thẳng M_0T được gọi là tiếp tuyến của đường cong C tại M_0 . Khi đó góc $\theta = \widehat{(M_0H, M_0M)}$ sẽ dần về góc $\alpha = \widehat{(M_0H, M_0T)}$, và $\tan \theta$ sẽ dần về $\tan \alpha$.

Vậy

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\tan \theta) = \tan \alpha$$

tức là:

$$f'(x_0) = \tan \alpha.$$

Nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm \infty$$

thì tiếp tuyến của đường cong đó song song với trục Oy . Khi đó, hàm $f(x)$ có tại điểm $x = x_0$ đạo hàm vô hạn.

Nếu đường cong C tạo bởi hai nhánh C_1 và C_2 tụ tại điểm M_0 sao cho tại M_0 , hai nhánh C_1 và C_2 có hai tiếp tuyến M_0T_1 và M_0T_2 không cùng nằm trên một đường thẳng thì điểm M_0 được gọi là một **điểm góc** của đường cong C .

Đặt

$$\alpha_1 = \widehat{(Ox, M_0T_1)}, \alpha_2 = \widehat{(Ox, M_0T_2)}$$

thì dễ dàng nhận thấy rằng hệ số góc của M_0T_1 và M_0T_2 là các đạo hàm một phía của $f(x)$ tại M_0 .

Ta có:

$$f'_+(x_0) = \tan \alpha_1, f'_-(x_0) = \tan \alpha_2.$$

Với hàm

$$f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$$

điểm $O(0;0)$ là một góc của hàm đồ thị $y = f(x)$. Đạo hàm phải của nó bằng 1, đạo hàm trái bằng -1 .

1.1.2. Quy tắc tính đạo hàm

Giả sử f, g là các hàm khả vi tại x_0 . Khi đó các hàm $f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ (với điều kiện $g(x_0) \neq 0$) là khả vi tại x_0 và ta có:

$$1. (f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0).$$

$$2. (cf)'(x_0) = cf'(x_0).$$

$$3. (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

$$4. \left(\frac{f}{g} \right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

1.1.3. Đạo hàm của các hàm số sơ cấp

Dưới đây là bảng đạo hàm của một số hàm sơ cấp thường gặp đã biết trong giáo trình giải tích lớp 12 và trong “Giáo trình giải tích tập 1” (NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội) của Trần Đức Long - Nguyễn Đình Sang - Hoàng Quốc Toàn.

Đạo hàm của $f(x)$ với x là biến số	Đạo hàm của $f(u)$ với u là một hàm số của biến số x
$(C)' = 0$ (C là hằng số)	$(Cu)' = Cu'$ (C là hằng số)
$(kx)' = k$ với $k \in \mathbb{R}$	$(ku)' = ku'$ với $k \in \mathbb{R}$
$(x^n)' = nx^{n-1}$ với $n \in \mathbb{R}$	$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ với $n \in \mathbb{R}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ với $x \neq 0$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ với $u \neq 0$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ với $x > 0$	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ với $u > 0$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \sin u$
$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$(\tan u)' = (1 + \tan^2 u)u' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ với $u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$ với $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$(\cot u)' = -u'(1 + \cot^2 u) = -\frac{u'}{\sin^2 u}$ với $u \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u'e^u$
$(a^x)' = a^x \ln a$ với $a > 0, a \neq 1$	$(a^u)' = u'a^u \ln a$ với $a > 0, a \neq 1$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ với $x > 0$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ với $u > 0$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ với $x > 0, a > 0, a \neq 1$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ với $u > 0, a > 0, a \neq 1$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ với $-1 < x < 1$	$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ với $-1 < u < 1$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ với $-1 < x < 1$	$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ với $-1 < u < 1$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arccot} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$
$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	$(\operatorname{sh} u)' = u' \operatorname{ch} u$
$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$	$(\operatorname{ch} u)' = u' \operatorname{sh} u$
$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ với $\operatorname{ch} x \neq 0$	$(\operatorname{th} u)' = \frac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}$ với $\operatorname{ch} u \neq 0$
$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ với $x \neq 0$	$(\operatorname{cth} u)' = -\frac{u'}{\operatorname{sh}^2 u}$ với $u \neq 0$

1.1.4. Đạo hàm riêng

1.1.4.1. Đạo hàm riêng của hàm số 2 biến

Cho hàm số $u = f(x, y)$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}^2$ và $P(x_0; y_0) \in D$. Cố định $y = y_0$, cho x_0 một số giá Δx đủ nhỏ sao cho $M(x_0 + \Delta x; y_0) \in D$. Khi đó hàm số có số gia tương ứng là $\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$.

Nếu tồn tại giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ thì giới hạn

đó sẽ được gọi là đạo hàm riêng theo biến số x của hàm số $f(x, y)$ tại điểm P và kí hiệu là:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(P) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}(P) = f'_x(P) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x}.$$

Tương tự, nếu tồn tại giới hạn $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$ thì giới hạn đó sẽ được gọi là đạo hàm riêng theo biến số y của hàm số $f(x, y)$ tại điểm P và kí hiệu là:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(P) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}(P) = f'_y(P) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y}.$$

Chú ý:

Qua định nghĩa trên, ta thấy rằng việc tính đạo hàm riêng thực chất là tính đạo hàm của hàm số một biến số (khi ta coi biến số kia là không đổi). Do đó, việc tính đạo hàm riêng không đòi hỏi những quy tắc mới.

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có định nghĩa đạo hàm riêng của hàm ba biến (hoặc nhiều hơn ba biến số): $u = f(x, y, z)$.

$$\text{Chẳng hạn: } \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}.$$

1.1.4.2. Đạo hàm riêng của hàm số hợp

a, Hàm số hợp với một biến độc lập

Giả sử $u = f(x, y)$ là hàm hai biến xác định trong miền mở $D \subset \mathbb{R}^2$, trong đó x và y là các hàm số của t với $t \in (a; b)$ thì $(x, y) \in D$. Khi đó ta có hàm số hợp $u = f(x(t), y(t))$ xác định trong khoảng $(a; b)$. Nếu $u = f(x, y)$ khả vi trong D và các hàm số $x(t), y(t)$ khả vi trong $(a; b)$ thì hàm số hợp $u = f(x(t), y(t))$ khả vi trong $(a; b)$ và $u'(t) = u'_x \cdot x'(t) + u'_y \cdot y'(t)$ hay

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Chú ý: Nếu trong đó y là hàm số x (tức là x giống t) thì công thức trên là:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Ví dụ: Cho $u = f(x, y) = x^2 y$ với $x = t^2 - 3t + 1$, $y = \sin t$. Tính $\frac{du}{dt}$.

Bài giải

Ta có: $\frac{dx}{dt} = 2t - 3, \frac{dy}{dt} = \cos t.$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy, \frac{\partial u}{\partial y} = x^2.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= 2xy(2t - 3) + x^2 \cos t \\ &= 2(t^2 - 3t + 1) \sin t (2t - 3) + (t^2 - 3t + 1)^2 \cos t \\ &= (t^2 - 3t + 1)[2(2t - 3) \sin t + (t^2 - 3t + 1) \cos t] \\ &= (t^2 - 3t + 1)[2(2t - 3) \sin t + (t^2 - 3t + 1) \cos t]. \end{aligned}$$

b, Hàm hợp với hai biến độc lập

Giả sử $u = f(x, y)$ là hàm số của 2 biến số x và y xác định trong miền mở $D \subset \mathbb{R}^2$, trong đó x và y là các hàm số của các biến t, s : $x = x(t, s), y = y(t, s)$ cùng xác định và cùng khả vi trong D' . Nếu $(t, s) \in D'$ thì $(x, y) \in D$. Khi đó ta có hàm số hợp $u = f(x(t, s), y(t, s))$ xác định trong D' . Nếu $u = f(x, y)$ khả vi trong D thì các đạo hàm riêng của hàm số hợp $u = f(x(t, s), y(t, s))$ là:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}. \end{aligned}$$

Hay

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}, \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}. \end{aligned}$$

Công thức trên viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} & \frac{\partial f}{\partial s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix}.$$

Ma trận $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix}$ được gọi là ma trận Jacobi của biến x, y đối với các

biến t, s và định thức của ma trận đó gọi là định thức Jacobi của x, y đối với t, s .

Kí hiệu là:

$$J(t, s) = \frac{D(x, y)}{D(t, s)}.$$

1.2. Cực trị và giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

1.2.1. Cực trị của hàm số 1 biến

1.2.1.1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Điểm x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ nếu tồn tại một lân cận U của điểm x_0 sao cho $f(x) < f(x_0), \forall x \in U, x \neq x_0$. Tương tự, điểm x_0 được gọi là điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ nếu tồn tại một lân cận U của điểm x_0 sao cho $f(x) > f(x_0), \forall x \in U, x \neq x_0$.

1.2.1.2. Quy tắc tìm cực trị hàm số

- **Quy tắc 1:** Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục có đạo hàm trên miền D (có thể trừ điểm x_0) thì điểm x_0 là điểm cực trị của hàm số nếu: $f'(x_0) = 0$ hoặc $f'(x_0)$ không xác định và $f'(x)$ đổi dấu khi x dần qua x_0 .

- + x_0 gọi là điểm cực đại nếu x dần qua x_0 thì $f(x)$ đổi dấu từ dương sang âm (tức là $f'(x) > 0$ nếu $x < x_0$ và $f'(x) < 0$ nếu $x > x_0$ (với x đủ gần x_0)).

- + x_0 gọi là điểm cực tiểu nếu x dần qua x_0 thì $f(x)$ đổi dấu từ âm sang dương (tức là $f'(x) < 0$ nếu $x < x_0$ và $f'(x) > 0$ nếu $x > x_0$ (với x đủ gần x_0)).

- **Quy tắc 2:** Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp hai tại $x_0, f'(x) = 0$ và $f''(x_0) \neq 0$ thì x_0 là điểm cực trị của hàm số và:

- + Nếu $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.

- + Nếu $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

- **Quy tắc 3:** Giả sử n là số tự nhiên nào đó và giả sử hàm $y = f(x)$, trong lân cận nào đó của điểm x có đạo hàm cấp $(n-1)$, còn chính tại điểm có đạo hàm bậc n . Giả sử tại điểm $x = c$ thoả mãn hệ thức sau đây:

$$f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0; f^{(n)}(c) \neq 0.$$

Khi đó

+ Nếu n chẵn thì hàm số $y = f(x)$ có cực đại địa phương tại điểm $x = c$ nếu $f^{(n)}(c) < 0$ và hàm số $y = f(x)$ có cực tiểu địa phương tại điểm $x = c$ nếu $f^{(n)}(c) > 0$.

+ Nếu n lẻ thì $f(x)$ không đạt cực trị tại $x = c$.

1.2.2. Cực trị của hàm số nhiều biến

1.2.2.1. Cực trị địa phương

a, Định nghĩa

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong miền mở D và điểm $M(x_0, y_0) \in D$. Điểm M được gọi là điểm cực đại địa phương của hàm số $z = f(x, y)$ hay hàm số z có cực đại địa phương tại M nếu tồn tại một lân cận của $M : S(M, r) \subset D$ sao cho với mọi điểm $P(x, y) \in S(M, r)$ và $M \neq P$ ta có $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ hay $f(P) < f(M)$.

Định nghĩa tương tự với điểm cực tiểu địa phương.

b, Điều kiện

* Điều kiện cần:

Nếu hàm số $z = f(x, y)$ khả vi tại điểm $M_0(x_0; y_0) \in D$ mà tại đó hàm số đạt cực trị thì

$$f'_x(x_0, y_0) = 0; f'_y(x_0, y_0) = 0. \quad (*)$$

Các điểm thỏa mãn hệ (*) gọi là điểm dừng.

* Điều kiện đủ:

Giả sử $M_0(x_0; y_0)$ là một điểm dừng của hàm số $z = f(x, y)$ và hàm số đó có các đạo hàm riêng đến cấp hai.

Ta gọi $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{M_0}$; $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{M_0}$; $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{M_0}$.

Nếu $\Delta = AC - B^2 > 0$ thì hàm số có cực trị địa phương tại M_0 .

+ Nếu $A > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu địa phương tại M_0 .

+ Nếu $A < 0$ thì hàm số đạt cực đại địa phương tại M_0 .

Nếu $\Delta = AC - B^2 < 0$ thì hàm số không đạt cực trị địa phương tại M_0 .

Nếu $\Delta = AC - B^2 = 0$ thì chưa thể kết luận gì về sự tồn tại cực trị của hàm số tại M_0 .

*** Quy tắc tìm cực trị của hàm số 2 biến:**

Bước 1: Tính đạo hàm riêng cấp 1.

Bước 2: Tìm các điểm dừng bằng cách giải hệ
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Bước 3: Tính giá trị của đạo hàm riêng cấp 2 tại các điểm dừng. Giả sử $M_0(x_0; y_0)$ là một điểm dừng.

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0); \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0); \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0).$$

Nếu $\Delta = AC - B^2 > 0$ thì hàm số có cực trị địa phương tại M_0 .

+ Nếu $A > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu địa phương tại M_0 .

+ Nếu $A < 0$ thì hàm số đạt cực đại địa phương tại M_0 .

Nếu $\Delta = AC - B^2 < 0$ thì hàm số không đạt cực trị địa phương tại M_0 .

Nếu $\Delta = AC - B^2 = 0$ thì chưa thể kết luận gì về sự tồn tại cực trị của hàm số tại M_0 .

Ví dụ: Tìm các điểm cực trị hàm số sau $z = x^3 + y^2 + 12xy + 1$.

Bài giải

Hàm số xác định $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$.

Ta có:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 12y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 12x.$$

Xét hệ

$$\begin{cases} 3x^2 + 12y = 0 \\ 2y + 12x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 12(-6x) = 0 \\ y = -6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 24x = 0, \\ y = -6x. \end{cases}$$

Ta có 2 nghiệm:

- $x = 0, y = 0$.
- $x = 24, y = -144$.

Hàm số có 2 điểm dừng $P(0;0)$ và $Q(24;-144)$.

Ta có:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 12, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

+ Với $P(0;0)$:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(P) = 0; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(P) = 12; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(P) = 2.$$

Ta có:

$$\Delta = AC - B^2 = 0.2 - 12^2 = -144 < 0.$$

Vậy hàm số không đạt cực trị tại $P(0;0)$.

+ Với $Q(24;-144)$:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(Q) = 6.24 = 144; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(Q) = 12; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(Q) = 2.$$

Ta có:

$$\Delta = AC - B^2 = 144.2 - 12^2 = 144 > 0.$$

Mà $A = 144 > 0$.

Vậy hàm số đạt cực tiểu địa phương tại $Q(24;-144)$ và giá trị cực tiểu là

$$z(24, -144) = 24^3 + (-144)^2 + 12.24.(-144) + 1 = -6911.$$

1.2.2.2. Cực trị có điều kiện

a, Bài toán

Tìm cực trị của hàm số $u = f(x, y)$ với điều kiện ràng buộc $g(x, y) = 0$.

Để giải bài toán này, ta sử dụng *phương pháp nhân tử Lagrange*:

Lập hàm

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

trong đó λ là tham số chưa xác định.

b, Điều kiện cần

Nếu $(x_0; y_0)$ là điểm cực trị của hàm số $u = f(x, y)$ với điều kiện ràng buộc $g(x, y) = 0$ thì $(x_0; y_0)$ và λ_0 phải là nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

c, Điều kiện đủ

Giả sử $(x_0; y_0)$ và λ_0 là nghiệm của hệ trên, khi đó với x_0, y_0, λ_0 ta xét:

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2.$$

Trong đó dx, dy thỏa mãn hệ thức $\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy = 0$.

Nếu $d^2F < 0$ thì hàm số $f(x, y)$ đạt cực đại có điều kiện tại $(x_0; y_0)$.

Nếu $d^2F > 0$ thì hàm số $f(x, y)$ đạt cực tiểu có điều kiện tại $(x_0; y_0)$.

Nếu $d^2F = 0$ thì chưa thể kết luận được gì.

d, Ví dụ: Tìm cực trị của hàm $z = xy$ với điều kiện $2x + 3y - 5 = 0$.

Bài giải

Ta có: $F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$.

Hệ phương trình xác định các điểm dừng có điều kiện

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2\lambda = 0, \\ x + 3\lambda = 0, \\ 2x + 3y - 5 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được: $\lambda = -\frac{5}{12}; x = \frac{5}{4}; y = \frac{5}{6}$.

Kiểm tra điều kiện đủ tại $M(\frac{5}{4}; \frac{5}{6})$ với $\lambda = -\frac{5}{12}$.

Để dàng tính được: $d^2u = dx dy$.

Do $2x + 3y - 5 = 0$ suy ra $2dx = -3dy$ hay $dy = -\frac{2}{3}dx$.

Thay vào (*) ta có $d^2u(M, \lambda) = -\frac{2}{3}dx^2 < 0$.

Vậy hàm số đạt cực đại tại $M(\frac{5}{4}; \frac{5}{6})$ và $z_{\max} = \frac{25}{24}$.

1.2.3. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số một biến

1.2.3.1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền D .

- Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu:

$$\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D, \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M. \end{cases}$$

Kí hiệu: $M = \max_{x \in D} f(x)$ hoặc $M = \max_D f(x)$.

- Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu:

$$\begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D, \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m. \end{cases}$$

Kí hiệu: $m = \min_{x \in D} f(x)$ hoặc $m = \min_D f(x)$.

1.2.3.2. Định lý Weierstrass (Định lý giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất)

Nếu $f(x)$ là hàm liên tục trên một đoạn đóng $[a; b]$ thì hàm số đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó. Tức là tồn tại điểm $x_1, x_2 \in [a; b]$ sao cho:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in [a; b].$$

1.2.3.3. Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

- Quy tắc 1 (Sử dụng định nghĩa)**

Giả sử f xác định trên $D \subset \mathbb{R}$. Ta có:

$$M = \max_{x \in D} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D, \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M. \end{cases}$$

$$m = \min_{x \in D} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D, \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m. \end{cases}$$

- Quy tắc 2 (Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số liên tục trên một đoạn)**

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $[a; b]$ ta làm như sau:

Bước 1: Tìm các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ thuộc $(a; b)$ sao cho tại đó hàm số f có đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

Bước 2: Tính $f(x_1); f(x_2); \dots; f(x_n); f(a); f(b)$.

Bước 3: So sánh các giá trị tìm được. Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm f trên đoạn $[a; b]$ và số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $[a; b]$.

*** Một số lưu ý:**

Quy tắc trên chỉ được sử dụng trong các bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn.

Đối với bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một khoảng (nửa khoảng) thì ta phải tính đạo hàm, lập bảng biến thiên của hàm f rồi dựa vào nội dung của bảng biến thiên để suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm f trên khoảng (nửa khoảng) đó.

Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một khoảng (nửa khoảng) có thể không tồn tại.

Với bài toán đặt ẩn phụ ta phải tìm điều kiện của ẩn phụ.

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên đoạn $[-1; 2]$.

Bài giải

Hàm số liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Xét hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên đoạn $[-1; 2]$.

Ta có:

$$y' = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+1) \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Xét tại các điểm:

$$y(-1) = \frac{-1+1}{\sqrt{(-1)^2+1}} = 0; \quad y(1) = \frac{1+1}{\sqrt{1^2+1}} = \sqrt{2}; \quad y(2) = \frac{2+1}{\sqrt{2^2+1}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số y là $\sqrt{2}$ khi $x=1$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số y là 0 khi $x=-1$.

• **Quy tắc 3 (Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một khoảng)**

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $(a; b)$.

* **Phương pháp:**

Bước 1: Tìm các điểm tới hạn $x_i \in (a; b)$, $i = \overline{1, n}$.

Bước 2: Tính các giá trị $f(x_i)$ và $A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$; $B = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$.

Bước 3: Lập bảng biến thiên của hàm số trên $(a; b)$.

Bước 4: Dựa vào bảng biến thiên để kết luận hàm số đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên khoảng $(0; 2)$.

Bài giải

Hàm số liên tục trên khoảng $(0; 2)$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Vì ta đang xét hàm số liên tục trên khoảng $(0; 2)$ nên ta loại giá trị $x = -1$.

Có $y(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$.

Xét bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(0; 2)$

x	0	1	2
y'	-	0	+
y	1	-1	3

Vậy trên khoảng $(0; 2)$ hàm số y đạt giá trị nhỏ nhất là -1 khi $x = 1$. Hàm số y không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; 2)$.

- **Quy tắc 4 (Quy tắc tìm điều kiện của tham số để hàm số có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất thoả mãn điều kiện cho trước)**

Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$.

* **Phương pháp** (Chỉ áp dụng cho một số bài toán dễ dàng tìm được nghiệm của y').

Bước 1: Tìm các điểm tới hạn $x_i \in (a; b)$, $i = \overline{1, n}$.

Bước 2: Tính các giá trị $f(a); f(x_1); f(x_2); \dots; f(x_n); f(b)$.

Bước 3: Lập bảng biến thiên và biện luận theo tham số để tìm được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[a; b]$.

Bước 4: Thay vào điều kiện bài cho để tìm m .

1.2.4. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số hai biến

1.2.4.1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trên tập $D \in \mathbb{R}^2$.

- Giá trị lớn nhất của hàm số trên D là số M sao cho:

$$f(x, y) \leq M; \forall x, y \in D.$$

và tồn tại $(x_0; y_0) \in D$ sao cho $f(x_0, y_0) = M$.

- Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên D là số m sao cho:

$$f(x, y) \geq m; \forall x, y \in D.$$

và tồn tại $(x_0; y_0) \in D$ sao cho $f(x_0, y_0) = m$.

1.2.4.2. Định lý Weierstrass

Nếu hàm số $f(x, y)$ liên tục trên tập đóng và bị chặn $D \in \mathbb{R}^2$ thì f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên D .

1.2.4.3. Tính chất

Hàm số liên tục trên miền đóng và bị chặn D thì chắc chắn có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên miền D . Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất có thể đạt được tại:

- Điểm cực đại, cực tiểu thuộc miền trong của D (nội điểm).
- Hoặc điểm thuộc biên của miền (đường biên hoặc giới hạn).

1.2.4.4. Quy tắc tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số nhiều biến

Quy tắc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số hai biến hoàn toàn tương tự như quy tắc tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số một biến liên tục trên đoạn và có đạo hàm liên tục trong khoảng $(a; b)$.

Cho hàm số $f(x, y)$ liên tục trên tập đóng và bị chặn $D \in \mathbb{R}^2$, khả vi tại mọi điểm thuộc miền trong của D .

Bước 1: Tìm các điểm thuộc miền trong.

- i) Tính các đạo hàm riêng và tìm các điểm tới hạn thuộc miền trong của D .
- ii) Tính giá trị của hàm số tại các điểm đó.

Bước 2: Tìm cực trị trên biên.

Nếu biên là một đường (ví dụ như đường thẳng, đường tròn) dùng phép thế tham số hoặc ràng buộc để đưa về hàm 1 biến rồi tìm cực trị.

Hoặc dùng phương pháp Lagrange nếu có ràng buộc dạng $g(x, y) = 0$.

Bước 3: So sánh tất cả các giá trị tìm được $\rightarrow$ Chọn được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Chú ý: Quy tắc được mở rộng tương tự cho các hàm số 3 biến, hàm số 4 biến,...

Ví dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y \text{ trên miền } D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Bài giải

* Tìm các điểm thuộc miền trong:

Ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2.$$

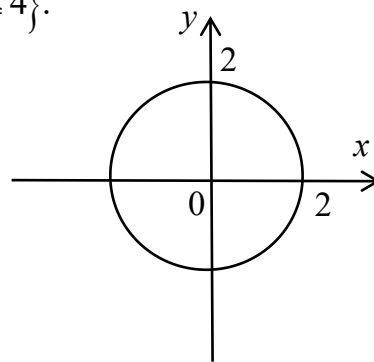
$$\text{Xét hệ: } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$$

Kiểm tra $x^2 + y^2 = 2^2 + (-1)^2 = 5 > 4$ suy ra điểm này không thuộc miền trong của D .

* Tìm cực trị trên biên $x^2 + y^2 = 4$:

Đặt $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ với $t \in [0; 2\pi]$ khi đó:

$$g(t) = f(2\cos t, 2\sin t) = 4 - 8\cos t + 4\sin t, \quad t \in [0; 2\pi].$$



Lại có:

$$g'(t) = 8\sin t + 4\cos t.$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow 8\sin t + 4\cos t = 0 \Leftrightarrow 2\sin t + \cos t = 0 \Leftrightarrow \tan t = -\frac{1}{2}.$$

Các nghiệm (cách nhau π) cho ta 2 điểm trên vòng tròn:

+ Với $t_1 = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right)$:

$$\cos t_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin t_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Vậy } x_1 = 2\cos t_1 = \frac{4}{\sqrt{5}}, y_1 = 2\sin t_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

+ Với $t_2 = t_1 + \pi$:

$$\cos t_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \sin t_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Vậy } x_2 = 2\cos t_2 = -\frac{4}{\sqrt{5}}, y_2 = 2\sin t_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Tính giá trị f tại hai điểm:

$$g(t) = 4 - 8\cos t + 4\sin t.$$

+ Với $\cos t_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin t_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$:

$$f(x_1, y_1) = 4 - 8 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 4 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 4 - 4\sqrt{5}.$$

+ Với $\cos t_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \sin t_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$:

$$f(x_2, y_2) = 4 - 8 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 4 + 4\sqrt{5}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x, y)$ là $4 + 4\sqrt{5}$ tại $\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ và giá trị nhỏ

nhất của hàm số $f(x, y)$ là $4 - 4\sqrt{5}$ tại $\left(\frac{4}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Ví dụ 4: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

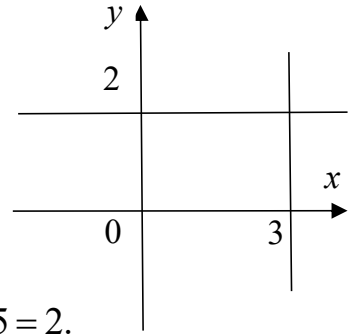
$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 5$ trong miền $D = \{0 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 2\}$.

Bài giải

* Xét trong miền của $D: U = \{0 < x < 3; 0 < y < 2\}$.

Ta có: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 3; \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y - 3.$

Xét hệ: $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$



Hàm số có 1 điểm dừng trong U là:

$$M(1;1) \Rightarrow f(M) = 1^2 + 1 \cdot 1 + 1^2 - 3 - 3 + 5 = 2.$$

* Xét trên biên của D :

+ Biên $x = 0; 0 \leq y \leq 2; f(0, y) = 0 + 0 + y^2 - 0 - 3y + 5 = y^2 - 3y + 5$ thì:

$$f'_y = 2y - 3.$$

$$f'_y = 0 \Leftrightarrow 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}.$$

Xét tại các điểm:

$$f\left(0, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) + 5 = \frac{11}{4}; f(0, 0) = 5; f(0, 2) = 4 - 6 + 5 = 3.$$

+ Biên $x = 3; 0 \leq y \leq 2; f(3, y) = y^2 + 5$ thì:

$$f'_y = 2y.$$

$$f'_y = 0 \Leftrightarrow 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Xét tại các điểm:

$$f(3, 0) = 5; f(3, 2) = 4 + 5 = 9.$$

+ Biên $y = 0; 0 \leq x \leq 3; f(x, 0) = x^2 - 3x + 5$ thì:

$$f'_x = 2x - 3.$$

$$f'_x = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Xét tại các điểm:

$$f\left(\frac{3}{2}, 0\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) + 5 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 5 = \frac{11}{4}; f(0, 0) = 5; f(3, 0) = 5.$$

+ Biên $y = 2; 0 \leq x \leq 3; f(x, 2) = x^2 + 2x + 4 - 3x - 6 + 5 = x^2 - x + 3$ thì:

$$f'_x = 2x - 1.$$

$$f'_x = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Xét tại các điểm:

$$f\left(\frac{1}{2}, 2\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 3 = \frac{11}{4}; f(0, 2) = 3; f(3, 2) = 9.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x, y)$ là 9 tại điểm $(3; 2)$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x, y)$ là 2 tại điểm $(1; 1)$.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 1

Trong chương 1, đã trình bày hệ thống các kiến thức về đạo hàm: định nghĩa, ý nghĩa của đạo hàm của hàm số một biến, đạo hàm riêng của hàm số nhiều biến, các khái niệm về cực trị, giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số một biến và hàm số nhiều biến. Bên cạnh đó, trình bày các định lý, các quy tắc tìm cực trị và giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số một biến và hàm số nhiều biến. Đây là những nội dung liên quan trực tiếp đến mục tiêu và nội dung nghiên cứu của đề tài; là cơ sở để giải quyết các bài toán trong chương 2.

CHƯƠNG 2: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ TÌM CỰC TRỊ HÀM SỐ VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

2.1. Tìm cực trị và giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số một biến

2.1.1. Phương pháp khảo sát trực tiếp hàm số

2.1.1.1. Phương pháp khảo sát hàm số

Là phương pháp giải trực tiếp các hàm số theo lý thuyết đã trình bày ở chương 1. Sau đây là các bài toán phức tạp hơn.

2.1.1.2. Các bài toán

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + \frac{x^2}{4}.$$

Bài giải

Điều kiện xác định: $-1 \leq x \leq 1$.

Ta có:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} + x\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} + x\sqrt{1-x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow x^2(1-x^2) = 2 - 2\sqrt{1-x^2}. \quad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{1-x^2}$ với $0 \leq t \leq 1$.

$$\Rightarrow t^2 = 1-x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1-t^2.$$

Khi đó (1) trở thành:

$$(1-t^2)t^2 = 2-2t$$

$$\Leftrightarrow (1-t^2)t^2 - 2 + 2t = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-t)(1+t)t^2 - 2(1-t) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-t)[(1+t)t^2 - 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-t=0 \\ t^3+t^2-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=1.$$

Xét tại các điểm:

$$y(-1) = \sqrt{2} + \frac{1}{4}; \quad y(0) = 2; \quad y(1) = \sqrt{2} + \frac{1}{4}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số y là 2 khi $x = 0$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số y là $\sqrt{2} + \frac{1}{4}$ khi $x = \pm 1$.

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x-1)e^{\frac{x^2-5x+6}{x-1}}$ trên đoạn $[2;3]$.

Bài giải

Hàm số đã liên tục trên đoạn $[2;3]$.

Ta có:

$$\begin{aligned} y' &= e^{\frac{x^2-5x+6}{x-1}} + \frac{x^2-2x-1}{x-1} e^{\frac{x^2-5x+6}{x-1}} \\ &= \left(1 + \frac{x^2-2x-1}{x-1}\right) e^{\frac{x^2-5x+6}{x-1}} \\ &= \frac{x^2-x-2}{x-1} e^{\frac{x^2-5x+6}{x-1}}. \\ y' = 0 &\Leftrightarrow \frac{x^2-x-2}{x-1} e^{\frac{x^2-5x+6}{x-1}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{x-1} e^{\frac{x^2-5x+6}{x-1}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vì $x = -1 \notin [2;3]$ nên ta loại $x = -1$.

Xét tại các điểm: $y(2) = 1; \quad y(3) = 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số y là 2 khi $x = 3$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số y là 1 khi $x = 2$.

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x|$ trên đoạn $-2 \leq x \leq 1$.

Bài giải

Ta có:

$$y = |x^3 - 3x| = \begin{cases} x^3 - 3x & \text{khi } x^3 - 3x \geq 0, \\ 3x - x^3 & \text{khi } x^3 - 3x < 0. \end{cases}$$

Xét hàm: $y_1 = x^3 - 3x$ với $\begin{cases} -\sqrt{3} \leq x \leq 0, \\ x \geq \sqrt{3}. \end{cases}$

$$y_1' = 3x^2 - 3.$$

$$y_1' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -1. \end{cases}$$

Loại $x = 1$ do $x \notin [-\sqrt{3}; 0] \cup [\sqrt{3}; +\infty)$.

$$y_2 = 3x - x^3 \text{ với } \begin{cases} 0 < x < \sqrt{3}, \\ x < -\sqrt{3}. \end{cases}$$

$$y_2' = 3 - 3x^2.$$

$$y_2' = 0 \Leftrightarrow 3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -1. \end{cases}$$

Loại $x = -1$ do $x \notin (-\infty; -\sqrt{3}) \cup [0; \sqrt{3}]$.

Vậy $y' = 0$ khi $x = 1, x = -1$.

Dễ thấy y' không xác định tại $x = 0, x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$.

Trên khoảng $(-2, 1)$ hàm số có 3 điểm dừng là $x = -\sqrt{3}, x = -1, x = 0$.

Xét tại các điểm:

$$y(-2) = 2; y(-\sqrt{3}) = 0; y(-1) = 2; y(0) = 0; y(1) = 2.$$

Vậy giá trị lớn nhất của y là 2 khi $x = -2, x = -1, x = 1$ và giá trị nhỏ nhất của y là 0 khi $x = 0, x = -\sqrt{3}$.

Bài 4. Tìm cực trị của hàm số $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

Bài giải

Ta có: $f'(x) = 4\sin^3 x \cos x - 4\cos^3 x \sin x = 4\sin x \cos x (\sin^2 - \cos^2 x)$

$$= 4 \cdot \frac{\sin 2x}{2} (-\cos 2x) = -2\sin 2x \cos 2x = -\sin 4x.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$f''(x) = -4\cos 4x.$$

$$\Rightarrow f''\left(\frac{k\pi}{4}\right) = -4(-1)^k.$$

Với k chẵn $\Rightarrow f''(x) < 0$.

Với k lẻ $\Rightarrow f''(x) > 0$.

Với k chẵn $\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) và $f(x) = 1$.

Với k lẻ $\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) và $f(x) = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ là 1 khi $x = \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) và giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$ là $\frac{1}{2}$ khi $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

2.1.1.3. Bài toán tự luyện

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin 5x + \cos 5x$ với $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x+2)e^{\frac{x^2-3x+2}{x-1}}$ trên đoạn $[2;5]$.

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 5x + 6|$ trên đoạn $[3;5]$.

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}$.

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$ trên đoạn $[2;3]$.

2.1.2. Phương pháp đặt ẩn số phụ

Trong nhiều trường hợp, việc tính đạo hàm, tìm các điểm tới hạn, hoặc xét dấu của đạo hàm của hàm số đã cho gây khó khăn trong quá trình làm bài. Khi đó ta có thể đặt ẩn phụ để đưa về bài toán đơn giản hơn.

Quy trình thực hiện được tiến hành qua các bước sau:

Bước 1: Đặt ẩn phụ, điều kiện xác định của ẩn phụ.

Bước 2: Biểu diễn hàm số đã cho theo ẩn phụ.

Bước 3: Giải bài toán tìm cực trị hoặc giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số theo ẩn phụ.

Bước 4: Kết luận về bài toán ban đầu.

2.1.2.1. Các bài toán

Bài 1. Cho hàm số $y = \frac{2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} + 3}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} + 1}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Bài giải

Điều kiện xác định: $-1 \leq x \leq 1$.

Đặt $t = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow 2\sqrt{1-x^4} = t^2 - 2$.

$$t' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1-x^4}}.$$

$$t' = 0 \Leftrightarrow x(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1+x^2}) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Bảng biến thiên

x	-1	0	1
t'	-	0	+
t	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow \sqrt{2} \leq t \leq 2$.

Vậy hàm số đã cho trở thành:

$$y = \frac{t^2 + t + 1}{t + 1} \text{ với } t \in [\sqrt{2}; 2].$$

$$y' = \frac{t^2 + 2t}{(t+1)^2} > 0 \text{ với } t \in [\sqrt{2}; 2].$$

Hàm số luôn tăng trên $[\sqrt{2}; 2]$.

Xét tại các điểm: $y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 1$; $y(2) = \frac{7}{3}$.

Nên giá trị lớn nhất của hàm số y là $\frac{7}{3}$ khi $t = 2$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số

y là $2\sqrt{2} - 1$ khi $t = \sqrt{2}$.

Với $t = 2$ thì $x = 0$.

Với $t = \sqrt{2}$ thì $x = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số y là $\frac{7}{3}$ khi $x=0$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số y là $2\sqrt{2}-1$ khi $x=1$.

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{3-x} - \sqrt{(x+1)(3-x)}$.

Bài giải

Điều kiện xác định: $-1 \leq x \leq 3$.

$$\begin{aligned} \text{Đặt } t &= \sqrt{x+1} - \sqrt{3-x} \Rightarrow t^2 = 4 - 2\sqrt{(x+1)(3-x)} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(3-x)} = \frac{4-t^2}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vì } t^2 &= 4 - 2\sqrt{(x+1)(3-x)} \leq 4, \forall x \in [-1; 3]. \\ \Rightarrow t &\in [-2; 2]. \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó} \quad y = t - \frac{4-t^2}{2} = \frac{t^2}{2} + t - 2.$$

$$\text{Ta có:} \quad y' = t + 1.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Xét tại các điểm:

$$y(-2) = -2; \quad y(-1) = \frac{-5}{2}; \quad y(2) = 2.$$

Nên giá trị lớn nhất của hàm số y là 2 khi $t=2$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số y là $\frac{-5}{2}$ khi $t=-1$.

Với $t=2$ thì $x=3$.

$$\text{Với } t=-1 \text{ thì } x = 1 - \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số y là 2 khi $x=3$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số y là $\frac{-5}{2}$ khi $x = 1 - \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Bài 3: Tính giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số sau:
 $y = |1 + 2\sin 3x| + |1 + 2\cos 3x|.$

Bài giải

Điều kiện xác định $D \subset \mathbb{R}$. Ta có $y \geq 0$ nên y đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất thì y^2 cũng đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } y^2 &= 6 + 4(\sin 3x + \cos 3x) + 2|(1 + 2\sin 3x)(1 + 2\cos 3x)| \\ &= 6 + 4(\sin 3x + \cos 3x) + 2|1 + 2(\sin 3x + \cos 3x) + 2\sin 6x|.\end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = \sin 3x + \cos 3x, -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow t^2 = (\sin 3x + \cos 3x)^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 = \sin^2 3x + 2\sin 3x \cos 3x + \cos^2 3x$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 1 + \sin 6x$$

$$\Leftrightarrow \sin 6x = t^2 - 1.$$

$$\begin{aligned}\text{Lúc đó: } y^2 &= f(t) = 6 + 4t + 2|1 + 2t + 2(t^2 - 1)| \\ &= 6 + 4t + 2|2t^2 + 2t - 1|.\end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } 2t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \\ t = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \end{cases} \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}].$$

$$\begin{aligned}\text{Do đó: } f(t) &= 6 + 4t + 2|2t^2 + 2t - 1| \\ &= \begin{cases} 4t^2 + 8t + 4, t \in \left[-\sqrt{2}; \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3} - 1}{2}; \sqrt{2}\right], \\ -4t^2 + 8, t \in \left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right). \end{cases}\end{aligned}$$

$$\text{Đặt } f_1(t) = 4t^2 + 8t + 4 \text{ với } t \in \left[-\sqrt{2}; \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3} - 1}{2}; \sqrt{2}\right].$$

$$f_1'(t) = 8t + 8.$$

$$f_1'(t) = 0 \Leftrightarrow 8t + 8 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

$$f_2(t) = -4t^2 + 8 \text{ với } t \in \left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right).$$

$$f_2'(t) = -8t.$$

$$f_2'(t) = 0 \Leftrightarrow -8t = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

$$\text{Vậy } f'(t) = 0 \text{ khi } t = -1, t = 0.$$

$$\text{Để thấy } f'(t) \text{ không xác định tại } t = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}, t = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Trên khoảng $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ hàm số có 4 điểm dừng

$$t = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}, t = -1, t = 0, t = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Ta có: $f(-\sqrt{2}) = 12 - 8\sqrt{2}; f\left(\frac{-\sqrt{3} - 1}{2}\right) = 4 - 2\sqrt{3}; f(-1) = 4; f(0) = 8;$

$$f\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right) = 4 + 2\sqrt{3}; f(\sqrt{2}) = 12 + 8\sqrt{2}.$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của $f(t)$ là $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$ và giá trị lớn nhất của $f(t)$ là $12 + 8\sqrt{2} = (2\sqrt{2} + 2)^2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của y^2 là $(\sqrt{3} - 1)^2$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số y là $\sqrt{3} - 1$ và giá trị lớn nhất của y^2 là $(2\sqrt{2} + 2)^2$ nên giá trị lớn nhất của hàm số y là $2\sqrt{2} + 2$.

2.1.2.2. Bài toán tự luyện

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1} + 2\sqrt{3-x} + 1}{2\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} + 1}$.

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x}}{\sqrt{x+2} + 2\sqrt{6-x}}$.

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{3\sqrt{4-x^2} + \sqrt{2+x^2} + \sqrt{2-x^2} + 1}{\sqrt{2+x^2} + \sqrt{2-x^2} + 1}.$$

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x + \frac{1}{\cos x}.$$

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{\sin^4 x |\cos x| + \cos^4 x |\sin x|}{|\sin x| + |\cos x|}.$$

Bài 6. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{x+3} - \sqrt{3-x} - \sqrt{(x+3)(3-x)}.$$

2.2. Tìm cực trị và giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số hoặc biểu thức nhiều biến

2.2.1. Phương pháp khảo sát trực tiếp hàm số

2.2.1.1. Phương pháp khảo sát trực tiếp hàm số

Là phương pháp giải trực tiếp các hàm số theo lý thuyết đã trình bày ở chương 1.

2.2.1.2. Các bài toán

Bài 1. Tìm cực trị địa phương của hàm số $u = f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$.

Bài giải

Ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 30; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 18.$$

$$\text{Xét hệ: } \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 30 = 0 \\ 6xy - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x = \frac{3}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{y^2} + y^2 = 10, \\ x = \frac{3}{y}. \end{cases} \quad (1)$$

Giải (1) ta có:

$$\begin{aligned} \frac{9}{y^2} + y^2 &= 10 \\ \Leftrightarrow 9 + y^4 &= 10y^2 \\ \Leftrightarrow y^4 - 10y^2 + 9 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \Rightarrow x = -3, \\ y = -3 \Rightarrow x = -1, \\ y = 3 \Rightarrow x = 1, \\ y = 1 \Rightarrow x = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hàm số u có 4 điểm dừng $P_1(-3; -1)$, $P_2(-1; -3)$, $P_3(1; 3)$, $P_4(3; 1)$.

Ta có:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x.$$

+ Tại $P_1(-3; -1)$:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_1) = -18; \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_1) = -6; \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_1) = -18.$$

Ta có: $\Delta = AC - B^2 = (-18).(-18) - (-6)^2 = 288 > 0$.

Vì $\Delta > 0, A < 0$ nên hàm số đạt cực đại địa phương tại $P_1(-3; -1)$ và có giá trị cực đại là 72.

+ Tại $P_2(-1; -3)$:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_2) = -6; \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_2) = -18; \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_2) = -6.$$

Ta có: $\Delta = AC - B^2 = (-6) \cdot (-6) - (-18)^2 = -288 < 0.$

Vậy hàm số không đạt cực trị địa phương tại $P_2(-1; -3).$

+ Tại $P_3(1; 3):$

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_3) = 6; \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_3) = 18; \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_3) = 6.$$

Ta có: $\Delta = AC - B^2 = 6 \cdot 6 - 18^2 = -288 < 0.$

Vậy hàm số không đạt cực trị địa phương tại $P_3(1; 3).$

+ Tại $P_4(3; 1):$

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_4) = 18; \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_4) = 6; \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_4) = 18.$$

Ta có: $\Delta = AC - B^2 = 18 \cdot 18 - 6^2 = 288 > 0.$

Vì $\Delta > 0, A > 0$ nên hàm số đạt cực tiểu địa phương tại $P_4(3; 1)$ và có giá trị cực tiểu là $-72.$

Bài 2. Tìm cực trị địa phương của hàm số $u = f(x, y) = x^4 + y^4 + 2(x - y)^2.$

Bài giải

Ta có: $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 4x - 4y; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x + 4y.$

Xét hệ: $\begin{cases} 4x^3 + 4x - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x - y = 0, & (1) \\ y^3 - x + y = 0. & (2) \end{cases}$

Lấy phương trình (1) trừ đi phương trình (2) ta được:

$$x^3 + x - y - y^3 + x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - y^3 + 2x - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) + 2(x - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + xy + y^2 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x, \\ x^2 + xy + y^2 + 2 = 0. \end{cases}$$

Thay $y = x$ vào $x^3 + x - y = 0$ ta được:

$$x^3 + x - x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Với $x = 0$ thì $y = 0$.

Vậy hàm số có 1 điểm dừng $P(0;0)$.

Ta có:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 + 4; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 + 4.$$

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) = 4; \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) = -4; \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) = 4.$$

Vì $\Delta = AC - B^2 = 0$ nên không có sự kết luận gì về sự tồn tại cực trị của hàm số.

Trong lân cận $P(0;0)$ ta thấy $f(x, y) \geq 0$, vậy hàm số đạt cực tiểu tại $P(0;0)$.

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y \text{ trong miền } D = \{x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3\}.$$

Bài giải

+ Xét miền trong của D:

$$U = \{x < 0, y < 0, x + y > -3\}.$$

Ta có: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y + 1; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x + 1.$

Ta xét hệ: $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = -1. \end{cases}$

Vậy hàm số có 1 điểm dừng trong $U: M(-1; -1)$ và $f(M) = -1$.

+ Xét trên biên của D:

Trên đoạn OB: $y = 0, -3 \leq x \leq 0$ thì

$$f(x, y) = x^2 + x.$$

$$f'_x = 2x + 1.$$

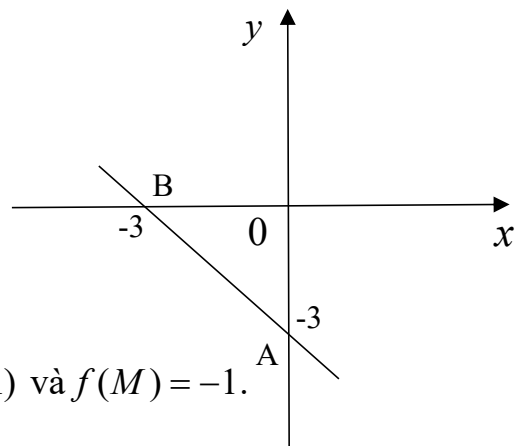
$$f'_x = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Xét tại các điểm:

$$f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}; \quad f(-3, 0) = 6; \quad f(0, 0) = 0.$$

Trên đoạn OA: $x = 0, -3 \leq y \leq 0$ thì

$$f(x, y) = y^2 + y.$$



$$f'_y = 2y + 1.$$

$$f'_y = 0 \Leftrightarrow 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}.$$

Xét tại các điểm:

$$f\left(0, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}; f(0, -3) = 6; f(0, 0) = 0.$$

Trên đoạn AB: $y = -3 - x, -3 \leq x \leq 0$ thì

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + (-3 - x)^2 - x(-3 - x) + x - 3 - x \\ &= 3x^2 + 9x + 6. \end{aligned}$$

$$f'_x = 6x + 9.$$

$$f'_x = 0 \Leftrightarrow 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}.$$

Xét tại các điểm:

$$f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}; f(-3, 0) = 6; f(0, -3) = 6$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x, y)$ là 6 tại các điểm $(-3; 0)$, $(0; -3)$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x, y)$ là -1 tại điểm $(-1; -1)$.

Bài 4: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x, y) = x^3 - y^3 - 3xy$ trong miền $D = \{0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2\}$.

Bài giải

+ Xét miền trong của D:

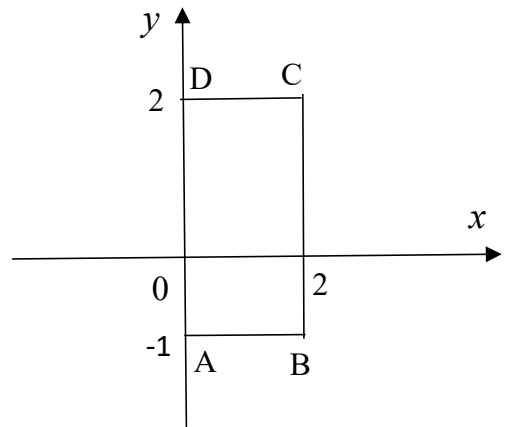
$$U = \{0 < x < 2, -1 < y < 2\}.$$

Ta có: $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y; \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 - 3x.$

Xét hệ:
$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ -3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ -y^2 - x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ -x^4 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = -1 \Rightarrow y = 1 \end{cases} \text{ (Loại vì không thuộc miền trong của } D \text{).}$$



+ Xét trên biên của D:

Trên đoạn AB: $y = -1, 0 \leq x \leq 2$ thì

$$f(x, y) = x^3 + 3x + 1.$$

$$f'_x = 3x^2 + 3.$$

$$f'_x = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \text{ (Vô lí)}.$$

Trên đoạn DC: $y = 2, 0 \leq x \leq 2$ thì

$$f(x, y) = x^3 - 6x - 8.$$

$$f'_x = 3x^2 - 6.$$

$$f'_x = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ x = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Vì $x = -\sqrt{2}$ không thỏa mãn $0 \leq x \leq 2$ nên ta loại $x = -\sqrt{2}$.

Xét tại các điểm:

$$f(\sqrt{2}, 2) = -8 - 4\sqrt{2}; \quad f(0, 2) = -8; \quad f(2, 2) = -12.$$

Trên đoạn AD: $x = 0, -1 \leq y \leq 2$ thì

$$f(x, y) = -y^3.$$

$$f'_y = -3y^2.$$

$$f'_y = 0 \Leftrightarrow -3y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Xét tại các điểm:

$$f(0, 0) = 0; \quad f(0, -1) = 1; \quad f(0, 2) = -8.$$

Trên đoạn BC: $x = 2, -1 \leq y \leq 2$ thì

$$f(x, y) = 8 - y^3 - 6y.$$

$$f'_y = -3y^2 - 6.$$

$$f'_y = 0 \Leftrightarrow -3y^2 - 6 = 0 \Rightarrow y^2 = -2 \text{ (vô lí)}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x, y)$ là 1 tại điểm $(0; -1)$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x, y)$ là $-8 - 4\sqrt{2}$ tại điểm $(\sqrt{2}; 2)$.

Bài 5: Tìm cực trị của hàm số $u = f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1$ với điều kiện $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Bài giải

Ta có: $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 + 2\lambda x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2 + 2\lambda y, \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 4.$$

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} 2x - 2 + 2\lambda x = 0 \\ 2y - 2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1 + \lambda) = 1 \\ y(1 + \lambda) = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{1 + \lambda} \\ y = \frac{1}{1 + \lambda} \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(1 + \lambda)^2} + \frac{1}{(1 + \lambda)^2} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{(1 + \lambda)^2} = 4$$

$$\Leftrightarrow 2 = 4(1 + \lambda)^2$$

$$\Leftrightarrow 2 = 4 + 8\lambda + 4\lambda^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-2 + \sqrt{2}}{2}, \\ \lambda_2 = \frac{-2 - \sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Hệ có nghiệm

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-2 + \sqrt{2}}{2} \\ x_1 = \sqrt{2} \\ y_1 = \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} \lambda_2 = \frac{-2 - \sqrt{2}}{2}, \\ x_2 = -\sqrt{2}, \\ y_2 = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Ta có:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + 2\lambda.$$

$$\Rightarrow d^2 F = (2 + 2\lambda)dx^2 + 0dxdy + (2 + 2\lambda)dy^2.$$

$$g(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2xdx + 2ydy = 0$$

$$\Rightarrow dy = -\frac{xdx}{y}.$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow d^2F &= (2+2\lambda)dx^2 + (2+2\lambda)\frac{x^2dx^2}{y^2} \\ &= (2+2\lambda)\frac{x^2+y^2}{y^2}dx^2.\end{aligned}$$

$$\text{Với } \lambda_1 = \frac{-2+\sqrt{2}}{2} \text{ thì } d^2F\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right) = \left(2+2\cdot\frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right)\frac{2+2}{2}dx^2 = 2\sqrt{2}dx^2 \geq 0.$$

$$\text{Với } \lambda_2 = \frac{-2-\sqrt{2}}{2} \text{ thì } d^2F\left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right) = \left(2+2\cdot\frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right)\frac{2+2}{2}dx^2 = -2\sqrt{2}dx^2 \leq 0.$$

$$\text{Với } \lambda = \frac{-2+\sqrt{2}}{2} \text{ thì } d^2F(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}dx^2 \geq 0 \text{ thì hàm số có điều kiện đạt cực}$$

tiểu tại $M(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ và giá trị cực tiểu là $5-4\sqrt{2}$; với $\lambda = \frac{-2-\sqrt{2}}{2}$ thì

$$d^2F(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}dx^2 \leq 0 \text{ thì hàm số có điều kiện đạt cực đại tại}$$

$N(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ và giá trị cực đại là $5+4\sqrt{2}$.

2.2.1.3. Bài toán tự luyện

Bài 1. Tìm cực trị địa phương của hàm số $u = f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

Bài 2. Tìm cực trị địa phương của hàm số $u = f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy - y - 1$.

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$u = f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y + 3 \text{ trên miền } D = \{(x, y) \in R \mid x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$u = f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 3y - 1 \text{ trên miền } D = \{(x, y) \in R \mid x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Bài 5. Tìm cực trị của hàm số $u = f(x, y) = 6 - 4x - 3y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

2.2.2. Sử dụng phép thế đưa về hàm số một biến

2.2.2.1. Sử dụng phép thế đưa về hàm số một biến

Trong giải tích nhiều biến, việc tìm cực trị và tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số nhiều biến $f(x, y)$ thường phức tạp hơn nhiều so với hàm số một biến. Một trong những kỹ thuật được sử dụng để đơn giản hóa bài toán là

phương pháp thế, tức là từ điều kiện ràng buộc của bài toán đã cho, tính y theo x (hoặc tính x theo y) rồi thay vào hàm số $f(x, y)$ để đưa về hàm một biến. Ta cũng có thể tính x và y theo biến mới t (phương trình tham số) rồi thay vào hàm số $f(x, y)$ để đưa về hàm một biến theo t . Khi đó, bài toán tìm cực trị và tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số nhiều biến được đưa về bài toán tìm cực trị hoặc tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm một biến.

Quy trình thực hiện phương pháp thế được tiến hành qua các bước sau:

Bước 1: Từ mối liên hệ giữa các biến, rút biến này theo biến kia và tìm miền xác định của mỗi biến.

Bước 2: Thế vào hàm số nhiều biến ban đầu để đưa về hàm số 1 biến.

Bước 3: Giải bài toán tìm cực trị hoặc giá trị lớn nhất, nhỏ nhất đối với hàm một biến.

Bước 4: Kết luận đối với hàm nhiều biến ban đầu.

2.2.2.2. Các bài toán

Bài 1. Cho $x \geq 0, y \geq 0$ và $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $u = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$.

Bài giải

Từ $x + y = 1$, ta có $y = 1 - x$ và do $x \geq 0, y \geq 0$ nên suy ra $0 \leq x \leq 1$.

Khi đó

$$\begin{aligned} u &= (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy = [4x^2 + 3(1 - x)][4(1 - x)^2 + 3x] + 25x(1 - x) \\ &= (4x^2 + 3 - 3x)(4 - 8x + 4x^2 + 3x) + 25x - 25x^2 \\ &= 16x^4 - 32x^3 + 18x^2 - 2x + 12. \end{aligned}$$

Ta có:

$$u' = 64x^3 - 96x^2 + 36x - 2.$$

$$u' = 0 \Leftrightarrow 64x^3 - 96x^2 + 36x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ x = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}, \\ x = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}. \end{cases}$$

Xét tại các điểm:

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{2}; u\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{4}\right) = \frac{191}{16}; u\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{4}\right) = \frac{191}{16}; u(0) = 12; u(1) = 12.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số u là $\frac{25}{2}$ khi $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số u là $\frac{191}{16}$ khi $x = \frac{2-\sqrt{3}}{4}, y = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ hoặc $x = \frac{2+\sqrt{3}}{4}, y = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

Bài 2. Cho $x \geq 0, y \geq 0$ và $x + y = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $u = \frac{x^2 + xy + y^2 + x - 3}{3x - xy + 1}$.

Bài giải

Từ $x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x$. Do $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow x \in [0; 2]$.

Khi đó

$$u = \frac{x^2 + x(2-x) + (2-x)^2 + x - 3}{3x - x(2-x) + 1} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

$$u' = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

$$u' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -1. \end{cases}$$

Vì $x = -1 \notin [0; 2]$ nên ta loại $x = -1$.

Xét tại các điểm:

$$u(0) = 1; \quad u(1) = \frac{1}{3}; \quad u(2) = \frac{3}{7}$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số u là 1 khi $x = \frac{2-\sqrt{3}}{4}, y = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số u là $\frac{1}{3}$ khi $x = 0, y = 2$.

Bài 3. Cho $x > 0, y > 0$ và $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $u = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$.

Bài giải

Đặt $x = \cos t, y = \sin t$ với $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Khi đó

$$u = \frac{1}{\cos^3 t} + \frac{1}{\sin^3 t}.$$

$$u' = \frac{3\cos^2 t \sin t}{\cos^6 t} - \frac{3\cos t \sin^2 t}{\sin^6 t} = \frac{3\sin t}{\cos^4 t} - \frac{3\cos t}{\sin^4 t}.$$

Ta có:

$$u' = 0 \Leftrightarrow \frac{3 \sin t}{\cos^4 t} - \frac{3 \cos t}{\sin^4 t} = 0 \Leftrightarrow \frac{3 \sin t}{\cos^4 t} = \frac{3 \cos t}{\sin^4 t} \Leftrightarrow \cos^5 t = \sin^5 t \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
u'	-	0	+
u			

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số u là $4\sqrt{2}$ khi $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 4. Cho $x > 0, y > 0$ và $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $u = y(x + y)$.

Bài giải

Đặt $x = \cos t, y = \sin t$ với $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Khi đó

$$u = \sin t (\cos t + \sin t) = \sin t \cos t + \sin^2 t.$$

Ta có:

$$u' = \cos^2 t - \sin^2 t + 2 \sin t \cos t = \cos 2t + \sin 2t.$$

$$u' = 0 \Leftrightarrow \cos 2t + \sin 2t = 0 \Leftrightarrow \tan 2t = -1 \Leftrightarrow t = \frac{3\pi}{8}.$$

Xét tại điểm:

$$u\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1,208.$$

Bảng biến thiên

t	0	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
u'	-	0	+
u			

Với $t = \frac{3\pi}{8} \Rightarrow x = 0,38; y = 0,92$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số u là 1,208 khi $x = 0,38; y = 0,92$.

Bài 5: Cho $x > 0, y > 0$ và $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $u = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}}$.

Bài giải

Đặt $x = \cos^2 t, y = \sin^2 t$ với $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Khi đó

$$u = \frac{\cos^2 t}{\sqrt{1-\cos^2 t}} + \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{\cos^2 t}{\sin t} + \frac{\sin^2 t}{\cos t}.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} u' &= -2\cos t - \frac{\cos^3 t}{\sin^2 t} + 2\sin t + \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t} \\ u' = 0 &\Leftrightarrow -2\cos t - \frac{\cos^3 t}{\sin^2 t} + 2\sin t + \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t} = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos t + \frac{\cos^3 t}{\sin^2 t} = 2\sin t + \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Xét tại điểm:

$$u\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
u'	-	0	+
u			

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số u là $\sqrt{2}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

2.2.2.3. Bài toán tự luyện

Bài 1. Cho $x + y = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $u = x^4 + y^4$.

Bài 2. Cho $x \geq 0, y \geq 0$ và $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $u = \frac{x^2 + xy + y^2 - x - 4}{2x - xy + 1}$.

Bài 3. Cho 3 số x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $u = x^5 + y^5 + z^5$.

Bài 4. Cho $x > 0, y > 0$ và $x^3 + y^3 \leq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $u = x^2 + y^2$.

Bài 5. Cho $x > 0$, $y > 0$ và $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $u = \frac{1}{x^6} + \frac{1}{y^6}$.

2.2.3. Đặt ẩn số phụ đưa về hàm số một biến

2.2.3.1. Đặt ẩn số phụ đưa về hàm số một biến

Trong quá trình nghiên cứu các bài toán cực trị, nhiều khi biểu thức cần khảo sát có dạng phức tạp, khó áp dụng trực tiếp các quy tắc đạo hàm. Khi đó, **phương pháp đặt ẩn số phụ** được sử dụng nhằm đơn giản hóa biểu thức bằng cách đặt một phần biểu thức bằng một ẩn mới, giúp đưa bài toán về dạng hàm một biến.

Quy trình thực hiện phương pháp đặt ẩn phụ được tiến hành qua các bước sau:

Bước 1: Đặt ẩn phụ, điều kiện xác định của ẩn phụ.

Bước 2: Biểu diễn hàm số theo ẩn phụ.

Bước 3: Giải bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số theo ẩn phụ.

Bước 4: Kết luận theo yêu cầu bài toán.

2.2.3.2. Các bài toán

Bài 1. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x + y \neq -1$ và $x^2 + y^2 + xy = x + y + 1$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $u = \frac{xy}{x + y + 1}$.

Bài giải

Đặt $t = x + y \Rightarrow t \neq -1$.

Ta có: $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = t^2 - 2xy$. (1)

Thay (1) vào phương trình $x^2 + y^2 + xy = x + y + 1$ ta được:

$$t^2 - 2xy + xy = t + 1$$

$$\Leftrightarrow t^2 - xy = t + 1$$

$$\Leftrightarrow xy = t^2 - t - 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$(x + y)^2 \geq 4xy \quad \text{với } \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow t^2 \geq 4(t^2 - t - 1)$$

$$\Rightarrow t^2 \geq 4t^2 - 4t - 4$$

$$\Rightarrow 3t^2 + 4t + 4 \geq 0$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3} \leq t \leq 2.$$

Thay $t = x + y, t^2 - t - 1 = xy$ vào hàm $u = \frac{xy}{x + y + 1}$ ta được:

$$u = f(t) = \frac{t^2 - t - 1}{t + 1} \text{ với } t \in \left[-\frac{2}{3}; 2\right], t \neq -1.$$

$$f'(t) = \frac{(2t-1)(t+1) - (t^2 - t - 1)}{(t+1)^2} = \frac{2t^2 + 2t - t - 1 - t^2 + t + 1}{(t+1)^2} = \frac{t^2 + 2t}{(t+1)^2}.$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2, \\ t = 0. \end{cases}$$

Vì $t = -2 \notin \left[-\frac{2}{3}; 2\right]$ nên ta loại $t = -2$.

Xét tại các điểm :

$$f(0) = -1; \quad f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}; \quad f(2) = \frac{1}{3}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số u là $\frac{1}{3}$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số u là -1 .

Bài 2. Cho các số thực dương x và y thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $u = \frac{1}{x^3 + y^3} + \frac{1}{xy}$.

Bài giải

Ta có $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 1 - 3xy$. Do đó $u = \frac{1}{1 - 3xy} + \frac{1}{xy}$.

Theo bất đẳng thức Côsi ta có: $(x + y)^2 \geq 4xy$, với mọi số dương x, y .

Đặt $t = xy$ vì $(x + y)^2 \geq 4xy$ nên $0 < 4xy \leq 1 \Rightarrow 0 < xy \leq \frac{1}{4}$.

Vậy bài toán trở thành: $u = f(t) = \frac{1}{1 - 3t} + \frac{1}{t}$ với $t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$

$$u' = f'(t) = \frac{3}{(1 - 3t)^2} - \frac{1}{t^2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}.$$

Vì $t = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \notin \left(0; \frac{1}{4}\right]$ nên ta loại $t = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên $t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$.

t	0	$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$+\infty$	$4+2\sqrt{3}$	8

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm $f(t)$ là $4+2\sqrt{3}$ khi $t = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số u là $4+2\sqrt{3}$ khi

$$(x; y) = \left(\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}} \right); \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}} \right) \right) \text{ hoặc}$$

$$(x; y) = \left(\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}} \right); \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}} \right) \right).$$

Bài 3. Cho các số thực dương x và y, z thỏa mãn $x + y + z \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $u = x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Bài giải

Đặt $t = \sqrt[3]{xyz}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương x, y, z ta có:

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3t \quad \text{và} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} = \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} = \frac{3}{t}.$$

Khi đó

$$u = x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3t + \frac{3}{t}.$$

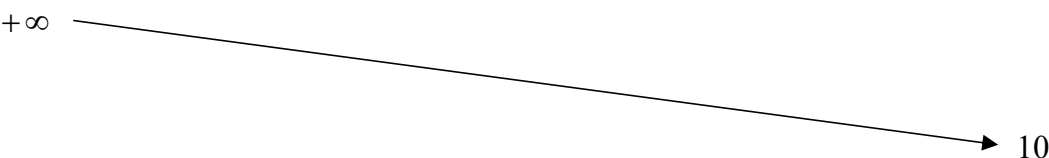
Vì x, y, z là 3 số thực dương và $3t \leq x + y + z \leq 1$ nên $0 < t \leq \frac{1}{3}$.

Xét hàm

$$f(t) = 3t + \frac{3}{t} \quad \text{với } t \in \left(0; \frac{1}{3}\right].$$

$$f'(t) = 3 - \frac{3}{t^2} < 0 \quad \text{với } t \in \left(0; \frac{1}{3}\right].$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(t) = 3t + \frac{3}{t}$ trên nửa khoảng $\left(0; \frac{1}{3}\right]$.

t	0	$\frac{1}{3}$
$f'(t)$	-	
$f(t)$	$+\infty$  10	

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm $f(t)$ là 10 khi $t = \frac{1}{3}$ mà $u \geq f(t) = 10$.

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số u là 10 khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Bài 4. Cho hai số thực khác không x, y và thỏa mãn $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$. Tìm giá trị lớn nhất của $u = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$.

Bài giải

Đặt $\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases}$ với điều kiện: $S^2 - 4P \geq 0$ (*). Từ giả thiết $\Rightarrow S, P \neq 0$.

Ta có: $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy = (x+y)^2 - 3xy$. Thay $\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases}$ vào ta có:

$$SP = S^2 - 3P \Leftrightarrow P = \frac{S^2}{S+3}.$$

Từ điều kiện (*), ta có:

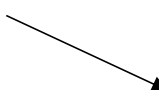
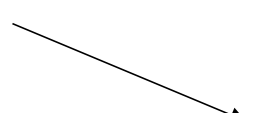
$$\begin{aligned} S^2 - 4P \geq 0 &\Leftrightarrow S^2 - \frac{4S^2}{S+3} \geq 0 \Leftrightarrow S^2 \left(\frac{S-1}{S+3} \right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{S-1}{S+3} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} S < -3 \\ S \geq 1 \end{cases} \quad (1) \quad (\text{với } S \neq 0). \end{aligned}$$

Khi đó, hàm số trở thành :

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{x^3 + y^3}{x^3 y^3} = \frac{(x+y)(x^2 + y^2 - xy)}{x^3 y^3} = \frac{(x+y)^2 xy}{x^3 y^3} = \frac{(x+y)^2}{x^2 y^2} \\ &\Rightarrow u = \frac{S^2}{P^2} = \left(\frac{S+3}{S} \right)^2 = (f(S))^2, \text{ với } S \text{ thỏa điều kiện } \begin{cases} S < -3, \\ S \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có: $f(S) = \frac{S+3}{S} \Rightarrow f'(S) = -\frac{3}{S^2} < 0$ và $\begin{cases} S < -3, \\ S \geq 1. \end{cases}$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f'(t)$	-			-
$f(t)$	1 		4 	

Vậy $0 < f(S) \leq 4$ nên $0 < u \leq 16$.

Do đó giá trị lớn nhất của u là 16 khi và chỉ khi $S = 1, P = \frac{1}{4}$ hay giá trị lớn nhất của u là 16 đạt được khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Bài 5. Cho ba số thực không âm x, y, z và thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của $u = (x^2 - xy + y^2)(y^2 - yz + z^2)(z^2 - zx + x^2)$.

Bài giải

Không giảm tổng quát ta có thể giả sử: $0 \leq x \leq y \leq z \leq 3$.

Ta có: $\begin{cases} x(x-y) \leq 0 \\ x(x-z) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy + y^2 \leq y^2 \\ x^2 - xz + z^2 \leq z^2 \end{cases}$, khi đó suy ra:

$$u \leq y^2 z^2 (y^2 - yz + z^2) = y^2 z^2 [(y+z)^2 - 3yz].$$

Kết hợp với giả thiết $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 0 \leq x \leq y \leq z \leq 3 \end{cases} \Rightarrow y + z \leq x + y + z \Rightarrow y + z \leq 3$.

Mặt khác, theo Bất đẳng thức Côsi, lại có: $2\sqrt{yz} \leq y + z \leq 3$ nên suy ra

$$0 \leq yz \leq \frac{9}{4}. (*)$$

Do đó

$$u \leq y^2 z^2 (9 - 3yz), 0 \leq yz \leq \frac{9}{4}.$$

Đặt $t = yz$.

Xét hàm số $f(t) = 9t^2 - 3t^3, t \in \left[0; \frac{9}{4}\right]$.

$$f'(t) = 18t - 9t^2.$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 18t - 9t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0, \\ t = 2. \end{cases}$$

Xét tại các điểm:

$$f(0) = 0; f(2) = 12; f\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{729}{64} \approx 11,39.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(t)$ là 12 khi $t = 2$ hay giá trị lớn nhất của hàm số u là 12.

Bài 6. Cho các số thực dương x và y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $u = 2(x^3 + y^3) - 3xy$.

Bài giải

Ta có:

$$u = 2(x^3 + y^3) - 3xy = 2(x + y)(x^2 - xy + y^2) - 3xy = 2(x + y)(2 - xy) - 3xy.$$

Ta có: $xy = \frac{(x + y)^2 - 2}{2}$, vì thế sau khi đặt $t = x + y$ thì:

$$u(t) = 2t \left(2 - \frac{t^2 - 2}{2} \right) - 3 \frac{t^2 - 2}{2} = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3.$$

Ta có: $x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2} \Rightarrow (x + y)^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq t \leq 2$.

Xét hàm số $u(t) = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3$ với $-2 \leq t \leq 2$.

Ta có $u'(t) = -3t^2 - 3t + 6$.

$$u'(t) = 0 \Leftrightarrow -3t^2 - 3t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = -2. \end{cases}$$

Xét tại các điểm:

$$u(-2) = -7; u(1) = \frac{13}{2}; u(2) = 1.$$

Với $t = -2$ thì $x = y = -1$.

Với $t = 1$ thì $x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}; y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ hoặc $x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}; y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số u là -7 khi $x = y = -1$ và giá trị lớn nhất của hàm số u là $\frac{13}{2}$ khi $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}; y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ hoặc $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}; y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

2.2.3.3. Bài toán tự luyện

Bài 1. Cho ba số thực x, y, z và thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

Bài 2. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $u = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$.

Bài 3. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $(x + y)^3 + 4xy \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $u = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$.

Bài 4. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $u = x + y + z + xy + yz + zx$.

Bài 5. Cho x, y là các số thực không đồng thời bằng 0 và thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $u = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{y^2 + 1} + \frac{y^2}{x^2 + 1}$.

2.3. Một số bài toán ứng dụng

2.3.1. Bài toán cực trị trong hình học

Các bài toán hình học thường quy về việc biểu diễn một đại lượng hình học (diện tích, thể tích, khoảng cách, độ dài...) dưới dạng hàm số một biến rồi tìm cực trị của hàm này.

2.3.1.1. Các bước giải bài toán hình học bằng đạo hàm

Bước 1: Xác định đại lượng cần tối ưu (diện tích, khoảng cách, thể tích...).

Bước 2: Biểu diễn đại lượng đó dưới dạng hàm số một biến $y = f(x)$ và tìm tập xác định hoặc giới hạn giá trị của biến.

Bước 3: Giải bài toán đối với hàm một biến $y = f(x)$.

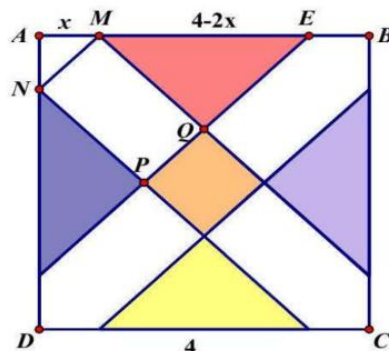
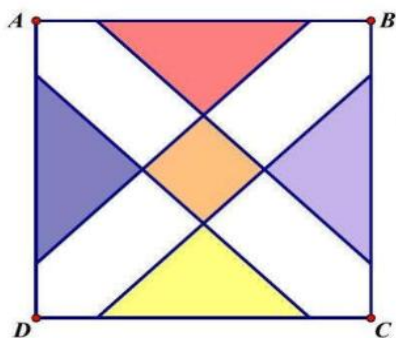
Bước 4: Kết luận.

2.3.1.2. Một số dạng bài toán thường gặp

Bài 1. (THPT Hàm Rồng – Thanh Hoá 2025) Cho hình vuông có cạnh bằng 4 m , chính giữa có một hình vuông đồng tâm với hình vuông (xem hình vẽ). Biết rằng bốn tam giác tô màu trên hình là bốn tam giác cân. Người ta cần sơn cho hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân trên, chi phí là 900 nghìn đồng trên

1 m². Hỏi cần bỏ ra ít nhất bao nhiêu triệu đồng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?

Bài giải



Đặt $AM = x$ ($0 < x < 4$) $\Rightarrow ME = 4 - 2x$; $MN = x\sqrt{2}$; $2MQ^2 = ME^2 = (4 - 2x)^2$.

Gọi S tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ.

$$S = 4 \cdot \frac{MQ^2}{2} + PQ^2 = 2MQ^2 + MN^2 = (4 - 2x)^2 + (x\sqrt{2})^2 = 6x^2 - 16x + 16.$$

$$S' = 12x - 16.$$

$$S' = 0 \Leftrightarrow 12x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}.$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{4}{3}$	4
S'	–	0	+
S			

Từ bảng biến thiên suy ra diện tích nhỏ nhất $S_{\min} = \frac{16}{3}$.

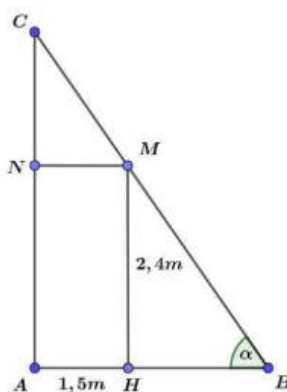
Vậy số tiền tối thiểu là $T = \frac{16}{3} \cdot 0,9 = 4,8$ triệu đồng.

Bài 2. (THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa 2025) Một ông chủ nhà muốn làm một cái thang cứu hộ khi có nguy hiểm xảy ra. Ông ta muốn làm cái thang

để nó đứng dưới đất vươn qua hàng rào tựa vào ngôi nhà (tham khảo hình vẽ). Với hàng rào cao 2,4 mét được đặt song song và cách bức tường của ngôi nhà một khoảng bằng 1,5 mét. Chiều dài ngắn nhất của cây thang bao nhiêu centimet (cm) để nó đứng dưới đất vươn qua hàng rào tựa vào ngôi nhà (làm tròn đến hàng đơn vị)?



Bài giải



Gọi góc hợp bởi thang và mặt đất là $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$.

Chiều dài thang là $BC = BM + MC$.

Tam giác vuông MHB có $BM = \frac{2,4}{\sin \alpha}$. Tam giác vuông MNC có $MC = \frac{1,5}{\cos \alpha}$.

Khi đó $BC = BM + MC = \frac{2,4}{\sin \alpha} + \frac{1,5}{\cos \alpha}$.

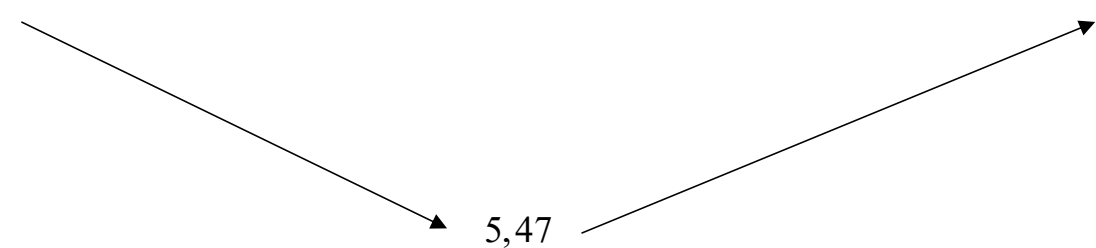
Xét hàm số $y = \frac{2,4}{\sin x} + \frac{1,5}{\cos x}$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$.

$$y' = \frac{-2,4 \cos x}{\sin^2 x} + \frac{1,5 \sin x}{\cos^2 x} = \frac{-2,4 \cos^3 x + 1,5 \sin^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -2,4 \cos^3 x + 1,5 \sin^3 x = 0 \Leftrightarrow \tan^3 x = \frac{2,4}{1,5} \Leftrightarrow \tan x = \sqrt[3]{\frac{8}{5}},$$

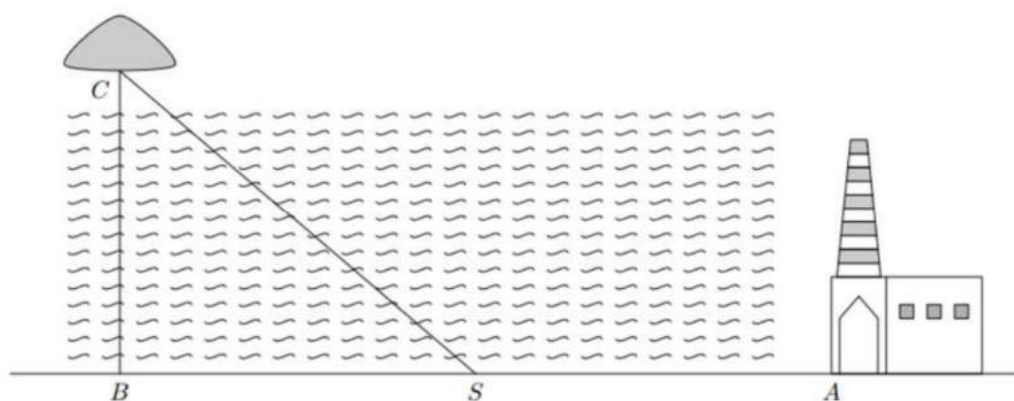
do $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $x \approx 0,863 \text{ rad}$.

Ta có bảng biến thiên

x	0	0,863	$\frac{\pi}{2}$
y'	–	0	+
y			

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy chiều dài thang bé nhất xấp xỉ $5,47 \text{ m}$ hay 547 cm .

Bài 3. (Sở Bắc Ninh 2025) Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A (nằm tại bờ biển là đường thẳng AB) đến một hòn đảo C , khoảng cách ngắn nhất từ đảo về bờ biển là đoạn BC dài 1 km khoảng cách từ B đến A là 4 km được minh họa bằng hình vẽ dưới đây.



Biết rằng mỗi km dây điện đặt dưới nước chi phí mất $5\,000 \text{ USD}$, còn đặt dưới đất chi phí mất $3\,000 \text{ USD}$. Hỏi điểm S trên bờ cách A bao nhiêu để khi mắc dây điện từ A qua S rồi đến C có chi phí là ít nhất?

Bài giải

Đặt $SA = x$ với $0 < x < 4$.

Khi đó $BS = 4 - x$ và $CS = \sqrt{BC^2 + BS^2} = \sqrt{1 + (4 - x)^2}$.

Chi phí lắp đặt dây điện từ A đến S là $P_1 = 3000x$.

Chi phí lắp đặt dây điện từ C đến S là $P_2 = 5000\sqrt{1 + (4 - x)^2}$.

Tổng chi phí lắp đặt dây điện là:

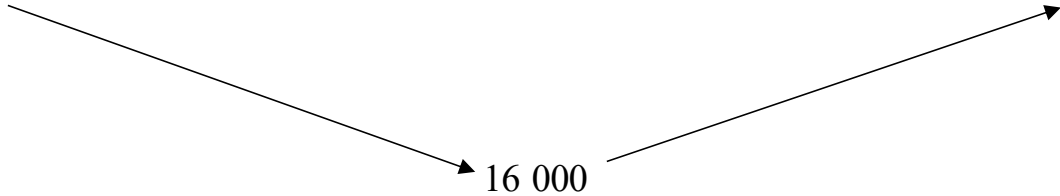
$$P = P_1 + P_2 = 3000x + 5000\sqrt{1 + (4 - x)^2}.$$

Xét hàm số $f(x) = 3000x + 5000\sqrt{1 + (4 - x)^2}$ trên khoảng $(0; 4)$.

Ta có:
$$f'(x) = 3000 - \frac{5000(4 - x)}{\sqrt{x^2 - 8x + 17}}.$$

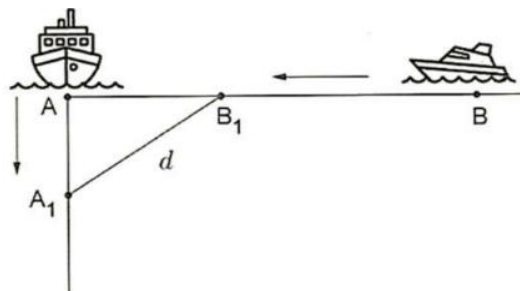
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5(4 - x) = 3\sqrt{x^2 - 8x + 17} \Leftrightarrow x = \frac{13}{4}.$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{13}{4}$	4
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$			

Vậy để chi phí mắc dây điện là ít nhất thì điểm S cách A một khoảng là $\frac{13}{4} = 3,25 \text{ km}$.

Bài 4. (THPT Chuyên Vĩnh Phúc 2025) Hai con tàu A và B đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 6 hải lý. Cả hai tàu đồng thời cùng khởi hành. Tàu A chạy về hướng Nam với vận tốc 5 hải lý/giờ, còn tàu B chạy về vị trí hiện tại của tàu A với vận tốc 7 hải lý/giờ. Hỏi sau bao nhiêu giờ thì khoảng cách giữa hai tàu là bé nhất?



Bài giải

Giả sử ban đầu tàu A ở vị trí A và tàu B ở vị trí B . Sau khoảng thời gian t :

Tàu A di chuyển được quãng đường $5t$ về phía Nam đến vị trí A_1 .

Tàu B di chuyển được quãng đường $7t$ đến vị trí B_1 .

Khoảng cách từ vị trí B_1 đến vị trí A là $6 - 7t$.

Áp dụng định lý Pytago ta có:

$$d = A_1B_1 = f(t) = \sqrt{(6-7t)^2 + (5t)^2} = \sqrt{74t^2 - 84t + 36}.$$

Để khoảng cách giữa hai tàu nhỏ nhất, thì hàm số $g(t) = 74t^2 - 84t + 36$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Xét hàm số $g(t) = 74t^2 - 84t + 36$.

$$g'(t) = 148t - 84.$$

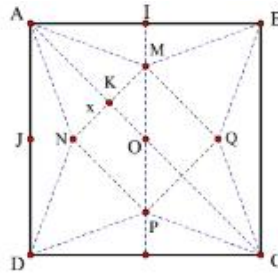
$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow 148t - 84 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{21}{37}.$$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	$\frac{21}{37}$	$+\infty$
$g'(t)$	$-$	0	$+$
$g(t)$			

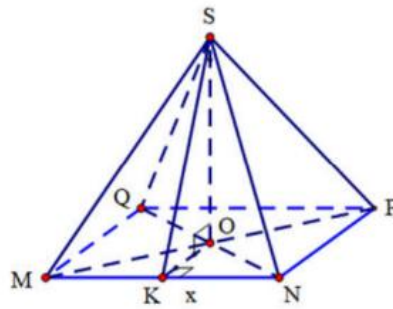
Vậy thời điểm khoảng cách giữa hai tàu bé nhất là $\frac{450}{37}$ khi $t = \frac{21}{37} \approx 0,57$ (giờ).

Bài 5. (THPT Diễn Châu 5 - Nghệ An 2025) Cho một tấm bìa hình vuông có cạnh $2m$. Từ tấm bìa này làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy là các cạnh của hình vuông rồi gấp lên và ghép lại thành một hình chóp tứ giác đều.



Thể tích của mô hình lớn nhất khi cạnh đáy của mô hình bằng $\frac{a\sqrt{2}}{b}(m)$ với $(a, b \in \mathbb{Z}; a, b$ nguyên tố cùng nhau). Tính tổng $a^2 + b^2$?

Bài giải



Gọi độ dài cạnh đáy của hình chóp là $x(cm)$.

Do $MN < IJ = \sqrt{2} \Rightarrow x \in (0; \sqrt{2})$.

Ta có $OK = \frac{x}{2}$; $OA = \frac{AC}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow SK = AK = \sqrt{2} - \frac{x}{2}$.

Do vậy $SO = \sqrt{SK^2 - OK^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2} - \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}x}$.

Khi đó thể tích khối chóp là: $V = \frac{1}{3}x^2\sqrt{2 - \sqrt{2}x}$.

Xét $f(x) = \frac{1}{3}x^2\sqrt{2 - \sqrt{2}x}$ với $x \in (0; \sqrt{2})$.

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left(2x\sqrt{2 - \sqrt{2}x} - x^2 \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}x}} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{4x(2 - \sqrt{2}x) - \sqrt{2}x^2}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}x}} \right) = \frac{8x - 5\sqrt{2}x^2}{3(2\sqrt{2 - \sqrt{2}x})}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x - 5\sqrt{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = \frac{4\sqrt{2}}{5}. \end{cases}$$

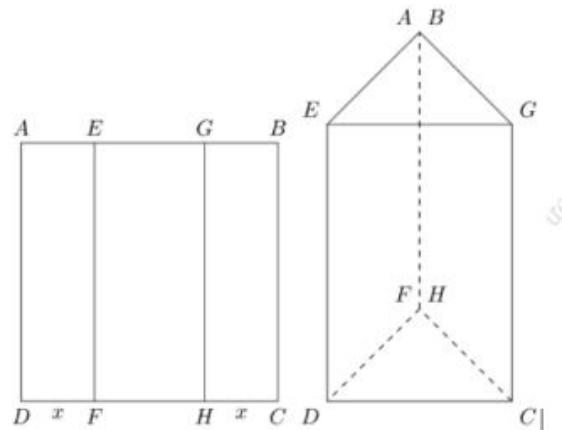
Bảng biến thiên

x	0	$\frac{4\sqrt{2}}{5}$	$\sqrt{2}$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Ta thấy thể tích của mô hình lớn nhất khi cạnh đáy của mô hình là $x = \frac{4\sqrt{2}}{5}$.

Khi đó $a = 4, b = 5 \Rightarrow a^2 + b^2 = 41$.

Bài 6. (THPT Hùng Vương - Bình Thuận 2025) Một tấm kẽm hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 30cm . Người ta gập tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Khi thể tích khối lăng trụ lớn nhất thì khoảng cách từ A đến mặt phẳng $EFGH$ bằng $a\sqrt{b}\text{cm}$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $T = a + 2025b$.



Bài giải

Thể tích khối lăng trụ là $V = BC \cdot S_{ABG} = 30 \cdot S_{AEG}$.

Theo giả thiết ta có $2x < 30 \Rightarrow x < 15$.

Ta có tam giác $\triangle AEG$ có độ dài cạnh là $AE = AG = x\text{ (cm)}$; $EG = 30 - 2x\text{ (cm)}$ nên diện tích là:

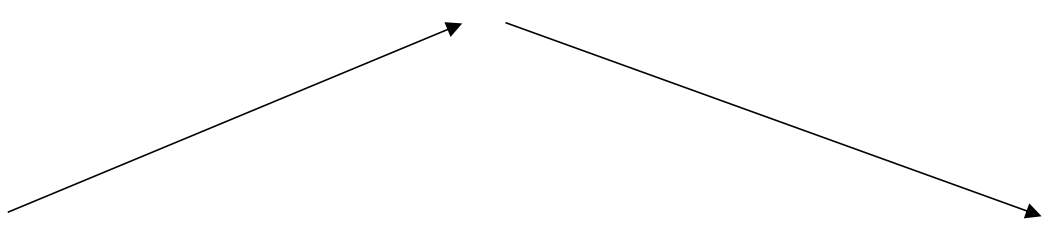
$$\begin{aligned}
 S &= \sqrt{15(15-x) \cdot (15-x) \cdot [15 - (30-2x)]} = \sqrt{15(15-x)^2 \cdot (2x-15)} \\
 &= (15-x) \cdot \sqrt{15(2x-15)} \text{ (cm}^2\text{)}.
 \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = (15 - x)\sqrt{15(2x - 15)}$ với $0 < x < 15$.

$$\text{Có: } f'(x) = -\sqrt{15(2x - 15)} + (15 - x) \frac{15}{\sqrt{15(2x - 15)}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{15(2x - 15)} = (15 - x) \frac{15}{\sqrt{15(2x - 15)}} \Leftrightarrow 2x - 15 = 15 - x \Leftrightarrow x = 10.$$

Bảng biến thiên

x	0	10	15
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Giá trị lớn nhất của thể tích đạt được khi và chỉ khi diện tích S_{AEG} đạt giá trị lớn nhất khi đó $x = 10$.

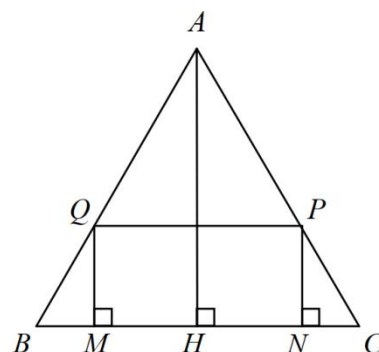
$$\text{Tam giác } AEG \text{ đều cạnh nên } d(A, EG) = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}.$$

Do (AEG) vuông góc với $(EFGH)$ nên khoảng cách từ A đến $(EFGH)$ bằng độ cao kẻ từ A đến EG .

$$\text{Vậy } d(A, EFGH) = 5\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow T = a + 2025b = 6080.$$

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ cạnh a . Người ta dựng một hình chữ nhật $MNPQ$ có cạnh MN nằm trên BC , hai đỉnh P, Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác. Xác định vị trí của điểm M sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất?

Bài giải



Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow BH = CH = \frac{a}{2}$.

Đặt $BM = x \left(0 < x < \frac{a}{2} \right)$.

Ta có: $MN = 2MH = a - 2x$.

$$QM = BM \cdot \tan 60^\circ = x\sqrt{3}.$$

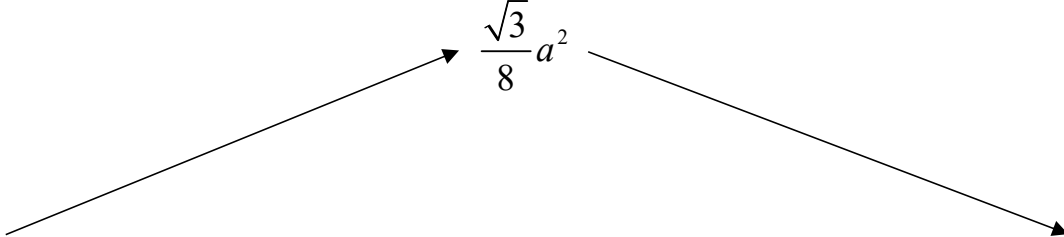
Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là:

$$S(x) = (a - 2x) \cdot x\sqrt{3} = ax\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x^2.$$

$$S'(x) = \sqrt{3}(a - 4x).$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}(a - 4x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4}.$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{2}$
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$			

Vậy vị trí điểm M là $BM = \frac{a}{4}$ thì diện tích hình chữ nhật lớn nhất là $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$ (đơn vị diện tích).

Bài 8. Từ tấm bìa hình vuông cạnh 20 cm người ta cắt ở 4 góc bốn hình vuông cạnh x rồi gấp lên để tạo thành một hộp không nắp. Tìm x để thể tích hộp là lớn nhất.

Bài giải

Khi cắt bốn hình vuông cạnh x (cm) đáy hộp còn lại là hình vuông cạnh $20 - 2x$ (cm) và chiều cao là x (cm).

Khi đó ta tìm được điều kiện của x là: $\begin{cases} x > 0 \\ 20 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 10.$

Thể tích của hộp là:

$$V(x) = x(20 - 2x)^2 = x(400 - 80x + 4x^2) = 4x^3 - 80x^2 + 400x.$$

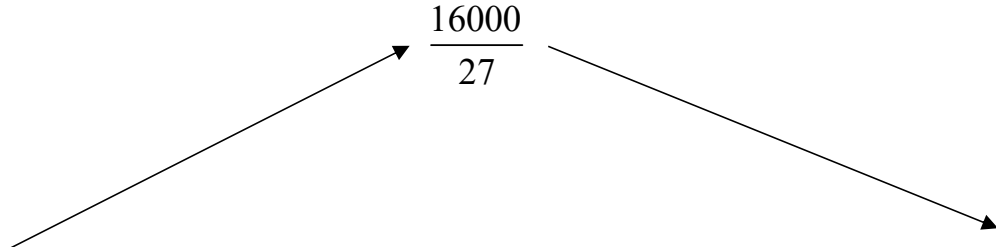
Tính đạo hàm:

$$V'(x) = 12x^2 - 160x + 400.$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 160x + 400 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10, \\ x = \frac{10}{3}. \end{cases}$$

Ta thấy $x = 10$ không thoả mãn điều kiện của x nên ta loại.

Bảng biến thiên

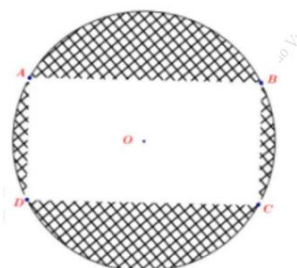
x	0	$\frac{10}{3}$	10
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Vậy thể tích lớn nhất đạt được là $\frac{16000}{27} \text{ cm}^3$ khi $x = \frac{10}{3} \text{ cm}$.

2.3.1.5. Bài toán tự luyện

Bài 1. Từ 1 tấm tôn hình chữ nhật có kích thước là a, b với $a, b > 0$. Người ta cắt bỏ 4 hình vuông ở 4 góc rồi gò thành 1 hình chữ nhật không có nắp. Hỏi cạnh của hình vuông cắt đi phải bằng bao nhiêu để hình hộp có thể tích lớn nhất?

Bài 2. (Cụm Chuyên Môn Đắk Lak 2025) Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 1000 m^2 , người ta muốn mở rộng thêm 4 phần đất sao cho tạo thành hình tròn ngoại tiếp mảnh vườn (Tham khảo hình vẽ). Biết tâm của hình tròn trùng với tâm của hình chữ nhật. Tìm diện tích nhỏ nhất $S_{\min}$ của 4 phần đất mở rộng. (làm tròn đến hàng đơn vị).



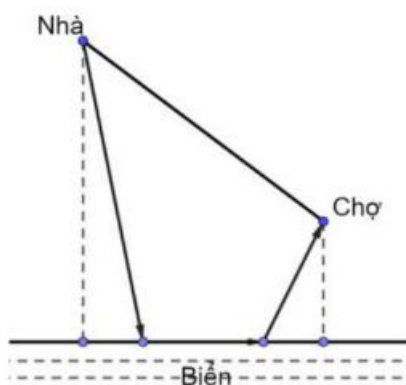
Bài 3. (THPT Lê Xoay - Vĩnh Phúc 2025) Một người cưỡi ngựa xuất phát từ A đi đến C . Điểm A nằm trong vùng đất ướt nên vận tốc của ngựa khi đi trong vùng này là 12 km/h . Điểm C nằm trong vùng đất khô hơn nên vận tốc của ngựa khi đi trong vùng này là 24 km/h . Hai phần đất này giáp nhau bởi một đường thẳng d đi qua trung điểm của AC và khoảng cách từ A và C đến đường thẳng này đều bằng 10 km .



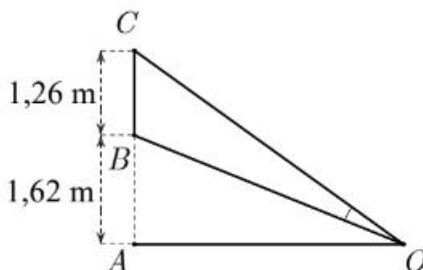
Biết $AC = 5\sqrt{41}\text{ km}$, thời gian ít nhất để đi từ A đến C là $t = \frac{a\sqrt{5}}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}^*$; a, b nguyên tố cùng nhau). Tính $T = 3a + b$?

Bài 4. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 13 cm . Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn cạnh hình vuông bằng nhau mỗi hình vuông có cạnh bằng $a\text{ (cm)}$, rồi gấp tấm nhôm để được một hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

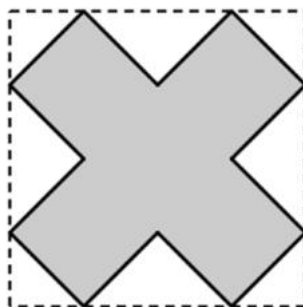
Bài 5. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An 2025) Nhà thầy Hùng cách bờ biển 1 km . Mỗi buổi sáng thầy chạy bộ từ nhà ra bờ biển sau đó chạy dọc bờ biển 500 m , rồi thầy chạy qua chợ hải sản để lấy thức ăn trong ngày, cuối cùng thầy chạy về nhà. Biết chợ hải sản cách bờ biển 400 m và cách nhà thầy Hùng 1 km tính quãng đường ngắn nhất mà thầy Hùng đã chạy trong mỗi buổi sáng (đơn vị m và làm tròn đến hàng đơn vị).



Bài 6. (Sở Bắc Ninh 2025) Hình vẽ bên minh họa một màn hình BC có chiều cao $1,26\text{ m}$ được đặt thẳng đứng và mép dưới của màn hình cách mặt đất một khoảng $BA = 1,62\text{ m}$. Một chiếc đèn quan sát màn hình được đặt ở vị trí O trên mặt đất. Để góc quan sát $\widehat{BOC}$ là lớn nhất thì độ dài OA bằng bao nhiêu mét?



Bài 7. Từ hình vuông có cạnh bằng 6 người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ. Sau đó người ta gấp thành hình hộp chữ nhật không nắp. Thể tích lớn nhất của khối hộp bằng?



Chú ý:

Luôn kiểm tra giới hạn xác định của biến (nhiều bài toán có điều kiện hình học ràng buộc).

Với bài toán trên đoạn $[a;b]$, cần chú ý giá trị tại hai đầu mút.

Cần trả lời bằng hình học sau khi tìm ra cực trị (tọa độ điểm, độ dài, diện tích...).

2.3.2. Bài toán cực trị trong vật lí

Vật lý là môn khoa học thực nghiệm, các định luật, công thức vật lý được xây dựng trên biểu thức toán học cho phù hợp với kết quả đo đạc, thí nghiệm. Để xác định các đại lượng vật lý, giải thích sự thay đổi các đại lượng vật lý, giải thích các hiện tượng vật lý ta cần vận dụng các công thức toán học như các hàm số cao cấp, phép tính đạo hàm, tích phân,...

2.3.2.1. Phương pháp

Bước 1: Tìm hiểu yêu cầu của bài toán vật lí. Xác định hàm và đối số của hàm (ở đây đối số chính là ẩn số yêu cầu của bài toán). Lập luận hàm số $y = f(x)$.

Bước 2: Dùng đạo hàm để giải bài toán đối với hàm số $y = f(x)$.

Bước 3: Kết luận.

2.3.2.2. Các bài toán

Bài 1. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s = -t^3 + 9t^2 + 10t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được là bao nhiêu (m/s)?

Bài giải

Áp dụng công thức tính đạo hàm ta có:

$$v(t) = s'(t) = -3t^2 + 18t + 10.$$

Xét hàm số $f(t) = -3t^2 + 18t + 10$ trên đoạn $[0;10]$.

Ta có: $f'(t) = -6t + 18$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -6t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \in [0;10].$$

Xét tại các điểm:

$$f(0) = 10; \quad f(3) = 37; \quad f(10) = -110.$$

Vậy vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất trong khoảng 10s đầu tiên là 37 m/s.

Bài 2. Một vật phóng thẳng đứng lên trên (bỏ qua sức cản không khí) từ độ cao 5m với vận tốc ban đầu 39,2 m/s. Biết quỹ đạo cao (mét) theo thời gian t (giây) là $h(t) = 5 + 39,2t - 4,9t^2$ với $t \geq 0$. Hỏi vật đạt độ cao lớn nhất là bao nhiêu và lúc đó diễn ra thời điểm t nào?

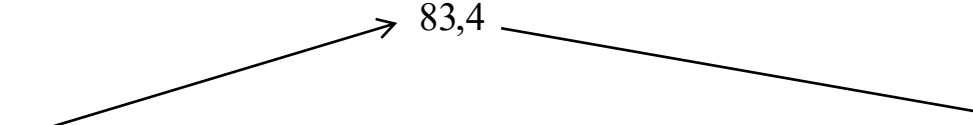
Bài giải

Xét hàm số $h(t) = 5 + 39,2t - 4,9t^2$ với $t \geq 0$.

Ta có: $h'(t) = -9,8t + 39,2$.

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow -9,8t + 39,2 = 0 \Leftrightarrow t = 4.$$

Bảng biến thiên

t	0	4	$+\infty$	
$h'(t)$		+	0	-
$h(t)$				

Vậy vật đạt độ cao lớn nhất là 83,4 m tại thời điểm $t = 4$ s.

Bài 3. Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ:



Hiệu điện thế 2 đầu đoạn mạch AB : $u = 85\sqrt{2} \sin 100\pi t$ V; $R = 70 \, \Omega$; $r = 80 \, \Omega$
 cuộn dây có L thay đổi được, tụ điện có C thay đổi được. Điều chỉnh $L = \frac{3}{2\pi}$ H rồi thay đổi điện dung C . Tìm điện dung C để U_{MB} cực tiểu?

Bài giải

Ta có: $Z_L = \omega L = 100\pi \cdot \frac{3}{2\pi} = 150 \, \Omega$; $U = \frac{85\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 85$ V.

Tổng trở: $Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}$; $Z_{MB} = \sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}$.

Khi đó

$$U_{MB} = I \cdot Z_{MB} = \frac{U}{Z} \cdot Z_{MB} = \frac{U \sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}}{\sqrt{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = U \cdot \sqrt{\frac{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2}}$$

Đặt $x = (Z_L - Z_C)^2$ ($x \geq 0$).

$$y = \frac{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \frac{80^2 + x}{(70+80)^2 + x} = \frac{80^2 + x}{150^2 + x}$$

$$\Rightarrow U_{MB} = U \sqrt{y}$$

$\Rightarrow U_{MB}$ cực tiểu khi y đạt giá trị nhỏ nhất.

Khảo sát hàm $y = \frac{80^2 + x}{150^2 + x}$.

Lấy đạo hàm rồi thu gọn $y' = \frac{150^2 - 80^2}{(150^2 + x)^2} > 0$.

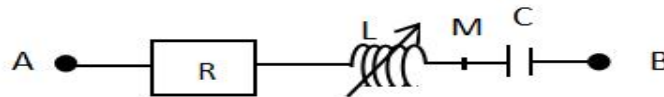
Vì $y'(x) > 0$ với $\forall x \geq 0$, y là hàm tăng theo x . Do đó y đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 0$.

Với $x = 0 \Leftrightarrow (Z_L - Z_C)^2 = 0 \Leftrightarrow Z_L = Z_C = 150 \Omega$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{Z_C \cdot \omega} = \frac{1}{15\pi} 10^{-3} \text{ (F)}.$$

Vậy khi điện dung $C = \frac{1}{15\pi} \cdot 10^{-3} \text{ (F)}$ thì U_{MB} cực tiểu.

Bài 4. Cho mạch điện như hình vẽ:



$U_{AB} = 200\sqrt{2} \cos 100\pi t \text{ V}$; $R = 100 \Omega$; $C = \frac{1}{2\pi} 10^{-4} \text{ F}$. Cuộn dây thuần cảm và có L thay đổi. Tìm độ cảm L để U_{AM} cực đại. Tính giá trị cực đại của U_{AM} ?

Bài giải

Ta có: $Z_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = 200 \Omega$.

+ Tổng trở: $Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}$; $Z_{AM} = \sqrt{R^2 + Z_L^2}$.

+ $I = \frac{U}{Z}$; $U_{AM} = \frac{U}{\sqrt{1 + \frac{Z_C^2 - 2Z_C Z_L}{R^2 + Z_L^2}}}$.

Đặt $y = 1 + \frac{Z_C^2 - 2Z_C Z_L}{R^2 + Z_L^2}$.

$\Rightarrow U_{AM}$ cực đại khi y đạt giá trị nhỏ nhất.

Lấy đạo hàm rồi thu gọn: $y' = \frac{2Z_C(Z_L^2 - Z_C Z_L - R^2)}{(R^2 + Z_L^2)^2}$.

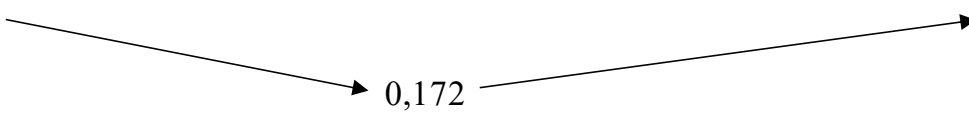
$$y' = 0 \Leftrightarrow Z_L^2 - Z_C Z_L - R^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow Z_L^2 - 200Z_L - 100^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Z_L = 241,42, \\ Z_L = -41,42. \end{cases}$$

Vì $Z_L \geq 0$ nên loại trường hợp $Z_L = -41,42 \Omega$.

Bảng biến thiên

Z_L	0	241,42	$+\infty$
y'	-	0	+
y			

Từ bảng biến thiên: $y_{\min} = 0,172$ khi $Z_L = 241,42 \Omega$.

$$\text{Suy ra: } U_{AM \max} = \frac{U}{\sqrt{y_{\min}}} = \frac{200}{\sqrt{0,172}} = 482,2 \text{ V.}$$

$$L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{241,42}{100\pi} = 0,768 \text{ H.}$$

Vậy khi độ cảm $L = 0,768 \text{ H}$ thì hiệu điện thế đoạn AM có giá trị cực đại là $482,2 \text{ V}$.

Bài 5. Mạch RLC mắc nối tiếp:

Hiệu điện thế 2 đầu đoạn mạch $u = 120\sqrt{2} \cos 100\pi t \text{ V}$; $R = 80 \Omega$; $L = \frac{2}{\pi} \text{ H}$, tụ điện có C thay đổi được. Thay đổi điện dung C để công suất tiêu thụ trên đoạn mạch cực đại. Tìm giá trị cực đại của công suất?

Bài giải

$$\text{Ta có: } Z_L = \omega L = 100\pi \cdot \frac{2}{\pi} = 200 \Omega; \quad U = \frac{120\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 120 \text{ V.}$$

$$\text{Tổng trở: } Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}.$$

Công suất tiêu thụ trên đoạn mạch:

$$P = \frac{U^2 R}{Z^2} = \frac{U^2 R}{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}.$$

$$\text{Đặt } x = Z_C \quad (x > 0).$$

$$y = R^2 + (Z_L - Z_C)^2 = 80^2 + (200 - x)^2 = x^2 - 400x + 46400$$

$$\Rightarrow P = \frac{U^2 R}{y}$$

$\Rightarrow P$ cực đại khi y đạt giá trị nhỏ nhất.

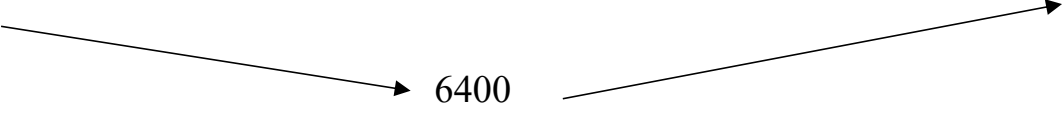
$$\text{Khảo sát: } y = x^2 - 400x + 46400.$$

Lấy đạo hàm : $y' = 2x - 400$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x - 400 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 200.$$

Bảng biến thiên

Z_C	0	200	$+\infty$
y'	-	0	+
y			

Từ bảng biến thiên: $y_{\min} = 6400$ khi $Z_C = 200 \Omega$.

Suy ra: $P_{\max} = \frac{U^2 R}{y_{\min}} = \frac{120^2 \cdot 80}{6400} = 180 \text{ W}.$

$$C = \frac{1}{Z_C \cdot \omega} = \frac{1}{200 \cdot 100\pi} = \frac{1}{2 \cdot 10^4 \pi} \text{ F}.$$

Vậy khi điện dung $C = \frac{1}{2 \cdot 10^4 \pi} \text{ F}$ thì công suất có giá trị cực đại là 180 W.

Bài 6. Một mạch nối tiếp gồm: $R = 30\Omega$, cuộn dây có trở kháng trong $r = 10\Omega$ và độ tự cảm $L = 0,05\text{H}$. Tụ điện có điện dung C thay đổi. Nguồn có $U = 220\text{V}$, $f = 60\text{Hz}$. Điện áp hiệu dụng trên dây U_L đạt giá trị cực đại khi nào? Tính giá trị cực đại của điện áp hiệu dụng trên dây U_L và giá trị điện dung C tương ứng?

Bài giải

Ta có: $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 60 = 120\pi \text{ rad/s}.$

$$Z_L = \omega \cdot L = 120\pi \cdot 0,05 = 6\pi \Omega.$$

Dòng trong mạch: $I = \frac{U}{\sqrt{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2}}.$

Điện áp hiệu dụng trên cuộn dây:

$$U_L = I \sqrt{r^2 + Z_L^2} = \frac{U \sqrt{r^2 + Z_L^2}}{\sqrt{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2}}.$$

Xét hàm theo Z_C : $y_{Z_C} = (R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2$

$$\Rightarrow U_L = \frac{U \sqrt{r^2 + Z_L^2}}{y_{Z_C}}$$

$\Rightarrow U_L$ cực đại khi y_{Z_C} đạt giá trị nhỏ nhất.

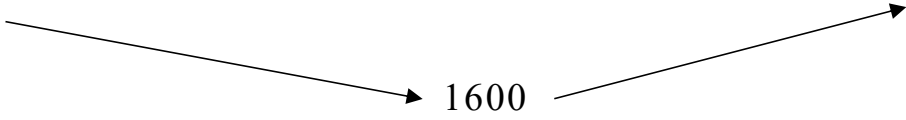
Khảo sát $y_{Z_C} = (R + r)^2 + (Z_L - Z_C)^2$.

Lấy đạo hàm $y' = 2(Z_L - Z_C)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2.(Z_L - Z_C) = 0 \Leftrightarrow Z_L = Z_C = 6\pi \Omega.$$

Vậy điện áp hiệu dụng trên cuộn dây đạt giá trị cực đại khi điều kiện cộng hưởng giữa hai đoạn dây thỏa mãn.

Bảng biến thiên

Z_C	0	6π	$+\infty$
y'	-	0	+
y			

Suy ra: $U_{L_{\max}} = \frac{U \cdot \sqrt{r^2 + Z_L^2}}{\sqrt{y_{Z_C \min}}} = \frac{220 \sqrt{10^2 + (6\pi)^2}}{\sqrt{1600}} = 117,36 \text{ V}.$

$$C = \frac{1}{Z_C \cdot \omega} = \frac{1}{6\pi \cdot 120\pi} = 1,407 \cdot 10^{-4} \text{ F}.$$

Vậy khi điện dung $C = 1,407 \cdot 10^{-4} \text{ F}$ thì điện hiệu dụng trên cuộn dây đạt giá trị cực đại là 117,36 V.

Bài 7. Để giảm nhiệt độ trong phòng từ 28°C , một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị $^\circ\text{C}$) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1; 10]$. Tìm nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động?

Bài giải

Xét hàm số $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $\forall t \in [1; 10]$.

$$T' = -0,024t^2 - 0,16 < 0 \text{ với } \forall t \in [1; 10].$$

Suy ra T nghịch biến trên $[1; 10]$.

Vì T nghịch biến trên đoạn đóng, giá trị lớn nhất xảy ra khi $t = 1$ và nhỏ nhất xảy ra khi $t = 10$.

Xét các giá trị biên:

$$T(1) = -0,008 - 0,16 + 28 = 27,832^\circ\text{C}.$$

$$T(10) = -0,008 \cdot 10^3 - 0,16 \cdot 10 + 28 = 18,4^\circ\text{C}.$$

Vậy nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được là $18,4^\circ\text{C}$ trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động.

Bài 8. Trong vật lý, một giao động điều hòa là dao động có phương trình chuyển động $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ trong đó A là biên độ của dao động, ω (rad/s) là tần số góc, φ (rad) là pha ban đầu. Động năng của một vật là năng lượng nó có được từ chuyển động của nó được xác định bởi công thức $W = \frac{1}{2}mv^2$, $v(t)$ (m/s) là vận tốc tại thời điểm t (giây). Giả sử một vật có khối lượng $m = 200\text{g}$ dao động điều hòa với phương trình chuyển động: $x = 40 \cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right)\text{cm}$. Khi đó động năng vật đó đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu? (Làm tròn đến hàng phần chục).

Bài giải

Để động năng vật đó đạt giá trị lớn nhất thì $v(t)$ (m/s) đạt giá trị lớn nhất.

Khi đó ta có:

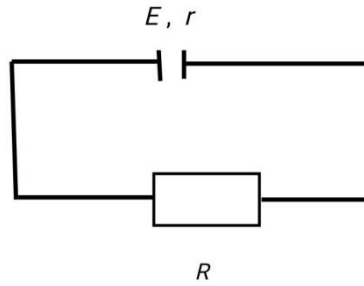
$$v(t) = (x(t))' = \left(40 \cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right)\right)' = -8000\pi \sin\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ cm/s}.$$

Ta có: $-8000\pi \leq v(t) = -8000\pi \sin\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \leq 8000\pi.$

Vậy $v(t)$ (m/s) đạt giá trị lớn nhất bằng 8π (m/s).

Khi đó động năng lớn nhất của vật là: $W = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot (8\pi)^2 \approx 63,2\text{J}.$

Bài 9. Một nguồn điện với suất điện động E và điện trở r được nối với một biến trở R như hình vẽ. Với giá trị nào của biến trở thì công suất tỏa nhiệt trên toàn mạch sẽ đạt cực đại?



Bài giải

Theo công thức công suất tỏa nhiệt ta có: $P = RI^2 = \frac{RE^2}{(R+r)^2}$ với $R > 0$.

Xét hàm số $f(R) = \frac{RE^2}{(R+r)^2}$ với $R > 0$.

Ta có: $f'(R) = E^2 \frac{(R+r)^2 - 2R(R+r)}{(R+r)^4} = E^2 \frac{r-R}{(R+r)^3}$.

$$f'(R) = 0 \Leftrightarrow R = r.$$

Bảng biến thiên

R	0	r	$+\infty$
$f'(R)$	+	0	-
$f(R)$			

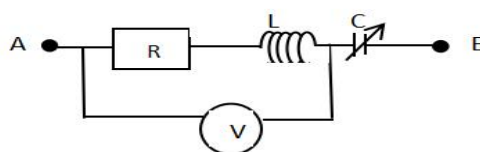
Từ bảng biến thiên suy ra: $f(R)_{\max} = f(r) = \frac{E^2}{4r}$.

Vậy biến trở $R = r$ thì công suất tỏa nhiệt trên đoạn mạch sẽ đạt cực đại.

2.3.2.3. Bài toán tự luyện

Bài 1. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -2t^3 + 12t^2 + 10t - 7$ với t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Bài 2. Cho mạch điện như hình vẽ:



$u_{AB} = 200\sqrt{2} \cos 100\pi t$ V. Điện trở $R = 100\Omega$; cuộn cảm $L = \frac{1}{3\pi}$ H, điện dung

C thay đổi được, vôn kế lý tưởng. Tìm giá trị của điện dung C để vôn kế có số chỉ lớn nhất?

Bài 3. Cho mạch điện không phân nhánh $R = 40\Omega$, cuộn dây có $r = 20\Omega$ và $L = 0,0637$ H, tụ điện có điện dung thay đổi. Đặt vào hai đầu đoạn mạch một điện áp xoay chiều có $f = 50\text{Hz}$ và $U = 120\text{V}$. Điều chỉnh điện dung C để điện áp hiệu dụng hai đầu cuộn dây đạt giá trị cực đại?

Bài 4. Đặt điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng 120V , tần số 50Hz vào hai đầu đoạn mạch mắc nối tiếp gồm điện trở thuần 3Ω ; cuộn cảm thuần có độ tự cảm $\frac{4}{\pi}$ H và tụ điện có điện dung thay đổi được. Điều chỉnh điện dung của tụ điện để điện áp hiệu dụng giữa hai đầu cuộn cảm đạt giá trị cực đại?

Bài 5. Để tăng nhiệt độ trong phòng từ 18°C , người ta sử dụng cái máy sưởi (máy được phép hoạt động trong 9 phút). Gọi T (đơn vị $^\circ\text{C}$) là nhiệt độ phòng ở phút thứ 11 được cho bởi công thức $T = -0,003t^3 + 0,9t + 18$ với $t \in [1;12]$. Tìm nhiệt độ cao nhất trong phòng đạt được trong thời gian 9 phút kể từ khi máy sưởi bắt đầu hoạt động?

Bài 6. Nếu một điện trở R được nối với một ắc-quy có suất điện động E và điện trở trong r thì công suất tiêu thụ trên điện trở R là $P = \frac{RE^2}{(R+r)^2}$, trong đó

R, r được tính bằng ôm (Ω), E được tính bằng vôn (V) và P được tính bằng oát (W). Cho $E = 24\text{V}$ và $r = 4\Omega$, còn R biến thiên thì công suất P đạt giá trị cực đại bằng bao nhiêu W?

2.3.3. Bài toán cực trị trong kinh tế

2.3.3.1. Cơ sở lý thuyết

* Đạo hàm và giá trị biên tế trong kinh tế

Cho mô hình hàm số $y = f(x)$, x và y là các biến kinh tế

x : biến độc lập hay biến đầu vào,

y : biến phụ thuộc hay biến đầu ra.

Trong quản trị kinh doanh, chúng ta quan tâm đến xu hướng thay đổi của y , khi x thay đổi một lượng nhỏ.

Với định nghĩa đạo hàm trong toán cơ bản, ta có: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ khi Δx đủ nhỏ, ta có thể viết:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

Khi $\Delta x = 1 \Rightarrow \Delta y = f'(x_0)$.

Vậy đạo hàm biểu diễn xấp xỉ lượng thay đổi của biến số y khi biến số x tăng thêm một đơn vị.

Với quan hệ hàm $y = f(x)$, để mô tả sự thay đổi của biến kinh tế y , khi biến kinh tế x thay đổi, ta gọi $f'(x_0)$ là giá trị biên tế y tại x_0 (còn gọi là biên tế).

Với mỗi hàm kinh tế, ta có một tên gọi riêng.

Ví dụ:

- Với hàm doanh thu: $TR = p.Q$ thì $\frac{dTR}{dQ}$ được gọi là doanh thu biên tế.
- Với hàm chi phí: $TC = f(x)$, x : sản lượng thì $\frac{dTC}{dx} = \frac{df}{dx}$: chi phí biên tế.
- Với hàm sản xuất: $Q = f(L)$, L : lao động thì $\frac{dQ}{dL} = \frac{df}{dL}$ sản lượng biên tế.

2.3.3.2. Một số bài toán ứng dụng trong sản xuất kinh doanh

****Các bài toán tối đa hóa lợi nhuận:***

Bài 1. Một công ty sản xuất một sản phẩm. Bộ phận tài chính của công ty đưa ra hàm giá bán là $p(x) = 1000 - 25x$, trong đó $p(x)$ (triệu đồng) là giá bán của mỗi sản phẩm mà tại giá bán này có x sản phẩm được bán ra. Tính số doanh thu đạt giá trị lớn nhất, khi đó có bao nhiêu sản phẩm được bán ra?

Bài giải

Theo giả thiết doanh thu của công ty bằng giá bán của mỗi sản phẩm nhân với số sản phẩm được bán ra.

Suy ra hàm doanh thu của công ty là: $f(x) = x.p(x)$.

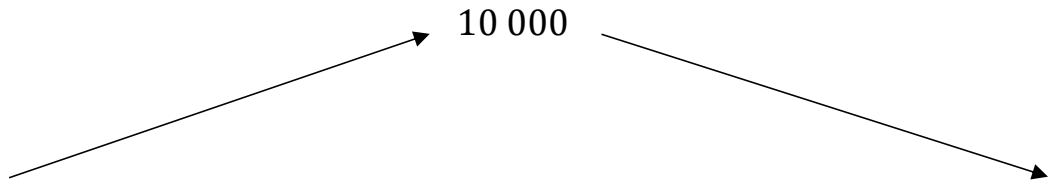
Thay $p(x) = 1000 - 25x$ ta có:

$$f(x) = x.p(x) = x(1000 - 25x) = -25x^2 + 1000x.$$

Suy ra đạo hàm: $f'(x) = -50x + 1000$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -50x + 1000 \Leftrightarrow x = 20.$$

Bảng biến thiên

x	0	20	40
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Ta có $f(x) = -25x^2 + 1000x$ đạt giá trị lớn nhất là 10 000 tại $x = 20$.

Vậy doanh thu đạt giá trị lớn nhất bằng 10 tỷ đồng, khi đó có 20 sản phẩm được bán ra.

Bài 2. Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 000 000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100 000 đồng mỗi tháng thì có thể 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

Bài giải

Gọi x là giá cho thuê thực tế của mỗi căn hộ ($x \geq 2\,000\,000$ đồng).

Số căn hộ cho thuê được ứng với giá cho thuê:

$$50 - \frac{1}{50\,000}(x - 2\,000\,000) = -\frac{1}{50\,000}x + 90.$$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ ($F(x)$: đồng).

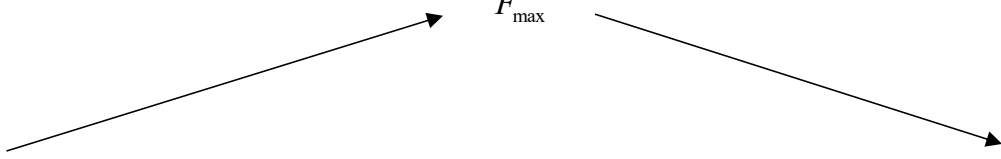
Ta có:
$$F(x) = \left(-\frac{1}{50\,000}x + 90 \right)x = -\frac{1}{50\,000}x^2 + 90x.$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của $F(x) = -\frac{1}{50\,000}x^2 + 90x$ với điều kiện $x \geq 2\,000\,000$.

$$F'(x) = -\frac{1}{25\,000}x + 90.$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{25\,000}x + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 2\,250\,000.$$

Bảng biến thiên

x	2 000 000	2 250 000	$+\infty$
$F'(x)$	+	0	-
$F(x)$			

Suy ra $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2\,250\,000$.

Vậy công ty phải cho thuê với giá 2 250 000 đồng mỗi căn hộ thì được lãi lớn nhất.

Bài 3. Công ty du lịch Star dự định tổ chức một tua xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tua là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tua 100 ngàn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất.

Bài giải

Gọi x (triệu đồng) là giá tua.

Giá đã giảm so với ban đầu là: $2 - x$.

Số người tham gia tăng thêm nếu giá bán x là:

$$\frac{(2-x)20}{0,1} = 400 - 200x.$$

Số người sẽ tham gia nếu bán giá x là:

$$150 + (400 - 200x) = 550 - 200x.$$

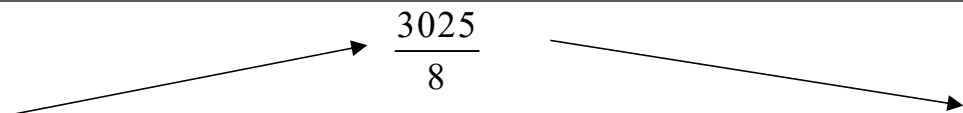
Tổng doanh thu là:

$$f(x) = x(550 - 200x) = -200x^2 + 550x.$$

$$f'(x) = -400x + 550.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -400x + 550 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{8}.$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{11}{8}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{11}{8}$.

Vậy công ty cần đặt giá tua 1 375 000 đồng thì tổng doanh thu sẽ cao nhất là 378 125 000 đồng.

*** Các bài toán đổi đa hóa doanh thu:**

Bài 1. (Đề thi tốt nghiệp THPT 2025) Nếu một doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm trong một tháng ($x \in \mathbb{N}^*; 1 \leq x \leq 4\,500$) thì doanh thu khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = -0,01x^2 + 400x$ (nghìn đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho mỗi sản phẩm là $G(x) = \frac{30\,000}{x} + 270$ (nghìn đồng). Giả sử số sản phẩm sản xuất ra luôn được bán hết thì trong một tháng, doanh nghiệp cần sản xuất ít nhất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được lớn hơn 100 triệu đồng?

Bài giải

Ta có hàm lợi nhuận $P(x)$ với $P(x) > 100$ triệu đồng:

$$\begin{aligned} P(x) &= F(x) - xG(x) = -0,01x^2 + 400x - (30\,000 + 270x) \\ &= -0,01x^2 + 130x - 30\,000. \end{aligned}$$

Xét hàm:

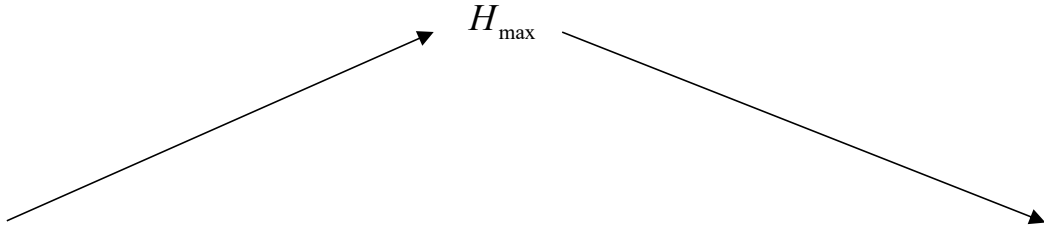
$$H(x) = P(x) - 100\,000 = -0,01x^2 + 130x - 130\,000.$$

Ta cần tìm nhỏ nhất $x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 4\,500$ sao cho $H(x) > 0$.

$$H'(x) = -0,02x + 130.$$

$$H'(x) = 0 \Rightarrow -0,02x + 130 = 0 \Rightarrow x = \frac{130}{0,02} = 6\,500.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	6 500	$+\infty$
$H'(x)$	+	0	-
$H(x)$			

Miền xét $[1; 4500]$ nằm hoàn toàn bên trái 6 500, nên trên $[1; 4500]$ hàm H đồng biến.

Do đó:

Nếu $H(x_0) = 0$ có nghiệm thực nhỏ $x_0 \approx 1091,6731$, thì mọi $x > x_0$ trên miền sẽ thỏa $H(x) > 0$.

Vì x phải là số nguyên, số nguyên nhỏ nhất thỏa là $x = 1092$.

Bài 2. Hãng kẹo K có hàm cầu $M = 100 - P$ (M là sản lượng, P là giá bán) và một hàm chi phí $N = 2M^3 + 37M^2 - 166M + 50$. Xác định M để lợi nhuận tối đa.

Bài giải

Ta có:

$$M = 100 - P \text{ hay } P = 100 - M.$$

Từ đó doanh thu là $T = (100 - M)M$ và hàm lợi nhuận là:

$$\begin{aligned} \alpha = T - N &= M(100 - M) - (2M^3 + 37M^2 - 166M + 50) \\ &= -2M^3 + 36M^2 - 66M - 50. \end{aligned}$$

$$\frac{d\alpha}{dM} = -6M^2 + 72M - 66.$$

$$\frac{d\alpha}{dM} = 0 \Leftrightarrow -6M^2 + 72M - 66 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} M = 1, \\ M = 11. \end{cases}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dM^2} = -12M + 72.$$

$$\frac{d^2\alpha}{dM^2}(1) = -12 \cdot 1 + 72 = 60 > 0.$$

$$\frac{d^2\alpha}{dM^2}(11) = -12 \cdot 11 + 72 = -60 < 0.$$

Từ đó α đạt cực đại khi $M = 11$, $\alpha_{\max} = \alpha(11) = 918$.

Bài 3. Một doanh nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Giả sử khi sản xuất và bán hết x sản phẩm đó ($0 < x \leq 2\,000$), tổng số tiền doanh nghiệp thu được (đơn vị: chục nghìn đồng) là $f(x) = 2000x - x^2$ và tổng chi phí (đơn vị: chục nghìn đồng) doanh nghiệp chi ra là $g(x) = x^2 + 1440x + 50$. Giả sử mức thuế phụ thu trên một đơn vị sản phẩm bán được là t (chục nghìn đồng) ($0 < t < 300$). Mức thuế phụ thu t (trên một đơn vị sản phẩm) sao cho nhà nước

nhận được số tiền thuế phụ thu lớn nhất và doanh nghiệp cũng thu được lợi nhuận lớn nhất theo mức thuế phụ thu đó là bao nhiêu?

Bài giải

Lợi nhuận doanh nghiệp thu được là:

$$h(x) = (2000x - x^2) - (x^2 + 1440x - 50) - tx = -2x^2 = (560 - t)x - 50 \quad \text{với } 0 < x \leq 2000.$$

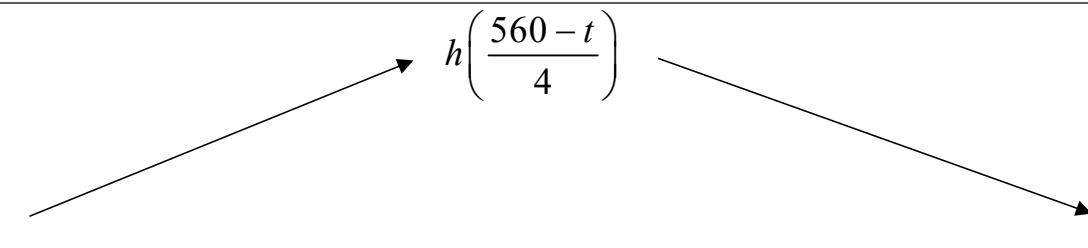
Xét hàm

$$h(x) = -2x^2 + (560 - t)x - 50 \quad \text{với } 0 < x \leq 2000.$$

Ta có

$$h'(x) = -4x + 560 - t = 0 \Leftrightarrow x = \frac{560 - t}{4} \in (0; 2000].$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{560 - t}{4}$	2 000
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$			

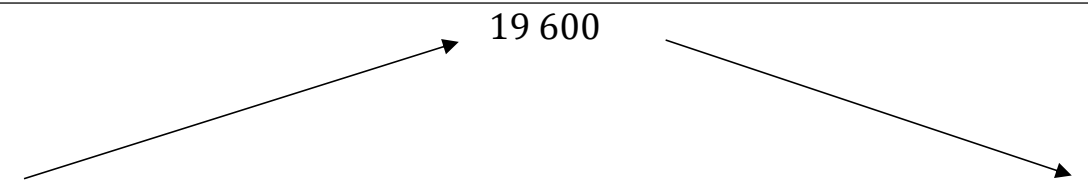
Từ bảng biến thiên ta thấy lợi nhuận doanh nghiệp cao nhất khi:

$$x = \frac{560 - t}{4}.$$

Khi đó số tiền thuế thu được từ doanh nghiệp là:

$$k(t) = \frac{540 - t}{4}t = \frac{-t^2}{4} + \frac{560t}{4} \quad \text{với } 0 < t < 300.$$

Bảng biến thiên

x	0	280	300
$k'(t)$	+	0	-
$k(t)$			

Với $t = 280 \Rightarrow x = 70$.

Từ bảng biến thiên ta thấy mức thuế phụ thu trên một đơn vị sản phẩm bán được là 70 (sản phẩm). Vậy mức thuế phụ thu là 2 800 000 đồng/sản phẩm, doanh nghiệp sản xuất và bán hết 70 sản phẩm.

*** Các bài toán tự luyện:**

Bài 1. Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 40 000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3 500 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 40 000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1 500 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 80 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 25 000. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.

Bài 2. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe Honda F với chi phí mua vào một chiếc là 27 và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.

Bài 3. Gia đình ông Thanh nuôi tôm với diện tích ao nuôi là $100 (m^2)$. Vụ tôm vừa qua ông nuôi với mật độ là $1 (kg / m^2)$ tôm giống và sản lượng tôm khi thu hoạch được khoảng 2 tấn tôm. Với kinh nghiệm nuôi tôm nhiều năm, ông cho biết cứ thả giảm đi $200 (g / m^2)$ tôm giống thì sản lượng tôm thu hoạch được 2,2 tấn tôm. Vậy vụ tới ông phải thả bao nhiêu kg tôm giống để đạt sản lượng tôm cho thu hoạch là lớn nhất? (Giả sử không có dịch bệnh, hao hụt khi nuôi tôm giống).

Bài 4. Một cơ sở sản xuất khăn mặt hiện đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30 000 đồng và trung bình mỗi tháng bán được 3 000 chiếc. Nhằm tăng lợi nhuận, cơ sở dự định tăng giá bán. Qua khảo sát thị trường, người quản lý nhận thấy rằng nếu từ mức giá 30 000 đồng mà mỗi lần tăng thêm 1 000 đồng thì số lượng khăn bán ra mỗi tháng sẽ giảm 100 chiếc. Biết chi phí sản xuất cho mỗi chiếc khăn không thay đổi, bằng 18 000 đồng. Xác định mức tăng giá để lợi nhuận đạt lớn nhất.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 2

Trên cơ sở lý thuyết ở chương 1, chương 2 đã trình bày hệ thống các phương pháp tìm cực trị, giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm một biến và hàm nhiều biến với các bài tập cụ thể hay gặp trong chương trình toán phổ thông và học phân giải tích ở đại học. Các dạng bài toán này thường hay xuất hiện trong các kỳ thi tốt nghiệp phổ thông và thi học sinh giỏi phổ thông. Bên cạnh đó cũng đưa ra một số bài ứng dụng thực tế trong các lĩnh vực: hình học, vật lý, kinh tế.

Trong hình học, cực trị có vai trò quan trọng trong việc giải quyết các bài toán hình học đặc biệt là các bài toán tối ưu hóa độ dài, diện tích, thể tích và xác định các vị trí đặc biệt của đối tượng hình học.

Trong vật lý, đạo hàm là công cụ toán học cơ bản để mô tả các đại lượng biến thiên: Vận tốc tức thời là đạo hàm của quãng đường theo thời gian; gia tốc là đạo hàm của vận tốc. Dùng để xác định tốc độ biến thiên của đại lượng vật lý như nhiệt độ, điện áp, dòng điện, áp suất, tốc độ dòng chảy,... Giải thích động lực học của các hệ vật lý như chuyển động thẳng, rơi tự do, dao động, chuyển động tròn,...

Trong kinh tế, đạo hàm giúp giải quyết những bài toán tối ưu hoá: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của các đại lượng liên quan đến chi phí, lợi nhuận, năng suất,...

Thông qua các bài toán thực tiễn càng thấy rõ hơn vai trò của toán học, đặc biệt của đạo hàm là công cụ toán học hữu hiệu, giúp kết nối lý thuyết với thực tiễn.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Kết luận

Được sự đồng ý của nhà trường, chúng em đã tiến hành nghiên cứu đề tài nghiên cứu khoa học: “Ứng dụng của đạo hàm để tìm cực trị và giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số”. Trong quá trình nghiên cứu, đề tài đã đạt được các kết quả sau:

Hệ thống hóa được các kiến thức về đạo hàm liên quan đến cực trị và giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số một biến và hàm số nhiều biến. Đặc biệt là các định lý, các quy tắc về tìm cực trị và tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số một biến và nhiều biến.

Hệ thống được một số các dạng bài tập và phương pháp giải, hệ thống bài tập đưa ra các phương pháp giải các bài toán cực trị, giá trị lớn nhất, nhỏ nhất. Trình bày một số các ứng dụng trong thực tế về lĩnh vực hình học, vật lý, kinh tế.

Đề tài nghiên cứu đưa ra một cách có hệ thống phong phú các bài toán minh họa cho mỗi dạng toán và các bài tập đề xuất và các ứng dụng rộng rãi của ứng dụng đạo hàm để tìm cực trị và giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số.

Về cơ bản đề tài nghiên cứu khoa học đã đạt được các mục tiêu và hoàn thành các nhiệm vụ đặt ra khi tiến hành nghiên cứu. Đề tài là tài liệu tham khảo giúp các em học sinh, sinh viên rèn luyện kỹ năng làm bài và giải các bài tập về phương pháp đạo hàm, tài liệu tham khảo hữu ích cho sinh viên ngành Sư phạm Toán trường Đại học Hoa Lư khi học các học phần tự chọn. Và cũng chính từ việc nghiên cứu đề tài này đã giúp cho bản thân chúng em rất nhiều trong quá trình học tập và công tác sau này. Tuy nhiên, do là lần đầu nghiên cứu một vấn đề khoa học nên đề tài nghiên cứu khoa học còn có thiếu sót, chúng em mong muốn nhận được các ý kiến đóng góp của các thầy cô để đề tài được hoàn thiện hơn. Chúng em xin chân thành cảm ơn!

2. Kiến nghị

Đưa tài liệu vào sử dụng là tài liệu tham khảo cho sinh viên chuyên ngành Sư phạm Toán trường Đại học Hoa Lư.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] GS Nguyễn Thừa Hợp (2008). *Giải tích tập 1, tập 2, tập 3*, NXB Đại học quốc gia Hà Nội.
- [2] TS Trần Đức Long (2008). *Giáo trình giải tích tập 1*, NXB Đại học quốc gia Hà Nội.
- [3] GS Phan Huy Khải. *Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất*, Nhà xuất bản Đại học quốc gia Hà Nội.
- [4] PTS. Nguyễn Cam (1999). *Giải toán đạo hàm và khảo sát hàm số*, NXB ĐH Quốc Gia Hà Nội.
- [5] Phan Đức Chính (1997). *Một số phương pháp chọn lọc giải các bài toán sơ cấp, tập 2*, NXB BGD.
- [6] Lê Hồng Đức (2000). *Phương pháp giải toán hàm số*, NXB Hà Nội.
- [7] Trần Văn Ki (2002). *Toán chọn lọc giải tích 12*, NXB ĐH Quốc Gia TPHCM.
- [8] Trần Đức Huyền, Lê Mậu Thống, Lê Mậu Thảo (2000). *Phân Loại và phương pháp toán giải tích*, Nhà xuất bản trẻ.
- [9] Trần Kiên Minh, Phạm Văn Tuấn, Lê Thị Bạch Liên (2016). *Lý thuyết ba thế giới toán học và vận dụng vào dạy học đạo hàm*, Tạp chí Khoa học giáo dục, Viện khoa học giáo dục Việt Nam.
- [10] Polya, G. (2010). *Sáng tạo toán học*, NXB Giáo dục Việt Nam.
- [11] *Tạp chí Toán học và tuổi trẻ*.