TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ
**KHOA SƯ PHẠM TRUNG HỌC**

**BÁO CÁO KẾT QUẢ**
**THỰC HIỆN ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC SINH VIÊN**

# MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THƯỜNG GẶP TRONG KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN VÀ HỌC SINH

**Chủ nhiệm đề tài: NGUYỄN ĐỨC TUYỂN**
**Lớp: D16 – TOÁN**
**Ngành: SƯ PHẠM TOÁN**

**NINH BÌNH, 2025**

TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ

**KHOA SƯ PHẠM TRUNG HỌC**

**BÁO CÁO KẾT QUẢ**
**THỰC HIỆN ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC SINH VIÊN**

# MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THƯỜNG GẶP TRONG KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN VÀ HỌC SINH

**Chủ nhiệm đề tài: NGUYỄN ĐỨC TUYỂN**
**Các thành viên: TRẦN THU PHƯƠNG**
**VŨ MAI CHI**
**NGUYỄN THỊ HẠNH**
**Lớp: D16 – TOÁN**
**Người hướng dẫn khoa học: ThS. NINH TIẾN NAM**

**Xác nhận của GV hướng dẫn** **Chủ nhiệm đề tài**

**……..** **……**

**NINH BÌNH, 2025**

## LỜI CẢM ƠN

Trước hết, chúng em xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Trường Đại học Hoa Lư, Ban Giám hiệu nhà trường, các thầy cô giáo trong Khoa Sư phạm Trung học cùng toàn thể quý thầy cô đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ chúng em trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thiện đề tài nghiên cứu khoa học này. Đặc biệt, chúng em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới giảng viên Thạc sĩ Ninh Tiến Nam - người đã tận tình hướng dẫn, chỉ bảo, giúp đỡ chúng em trong suốt quá trình thực hiện đề tài *"Một số bài toán liên quan đến hệ phương trình tuyến tính trong kỳ thi Olympic Toán học sinh viên và học sinh"*. Trong quá trình nghiên cứu, chúng em đã có cơ hội củng cố, mở rộng kiến thức chuyên môn về Đại số tuyến tính, rèn luyện tư duy logic và khả năng vận dụng kiến thức vào các bài toán thực tế, đặc biệt là các dạng bài thi Olympic.

Tuy nhiên, do thời gian có hạn và năng lực bản thân còn nhiều hạn chế, đề tài khó tránh khỏi những thiếu sót nhất định. Chúng em rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến quý báu từ quý thầy cô và các bạn để có thể hoàn thiện hơn nữa đề tài, đồng thời giúp chúng em trau dồi thêm kiến thức và phương pháp nghiên cứu, giảng dạy Toán học sau này.

Chúng em xin chân thành cảm ơn!

# MỤC LỤC

**MỞ ĐẦU** ..... **1**
1. Tổng quan tình hình nghiên cứu ..... **1**
2. Tính cấp thiết của đề tài ..... **2**
3. Mục tiêu nghiên cứu ..... **3**
4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu của đề tài ..... **3**
5. Cách tiếp cận và phương pháp nghiên cứu ..... **3**
**NỘI DUNG NGHIÊN CỨU** ..... **5**
**CHƯƠNG 1: CƠ SỞ LÝ LUẬN** ..... **5**
**1.1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH** ..... **5**
1.1.1. Khái niệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính ..... 5
1.1.2. Cấu trúc nghiệm của hệ phương trình tuyến tính ..... 6
**1.2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH** ..... **10**
1.2.1. Phương pháp thế ..... 10
1.2.2. Phương pháp cộng đại số ..... 14
1.2.3. Phương pháp Cramer ..... 17
1.2.4. Phương pháp khử Gauss ..... 27
**Kết luận chương 1** ..... **30**
**CHƯƠNG 2: MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THƯỜNG GẶP TRONG KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN VÀ HỌC SINH** ..... **31**
**2.1. BÀI TOÁN GIẢI VÀ BIỆN LUẬN HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH.** ..... **31**
Dạng 1: Bài toán giải hệ phương trình tuyến tính. ..... 31
Dạng 2. Bài toán giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính chứa tham số ..... 54
**2.2. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH** ..... **82**
**2.3. BÀI TOÁN THỰC TẾ QUY VỀ VIỆC GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH** ..... **91**

**Kết luận chương 2 ..... 112**
**KẾT LUẬN - KIẾN NGHỊ ..... 113**
**TÀI LIỆU THAM KHẢO ..... 114**

# MỞ ĐẦU

## 1. Tổng quan tình hình nghiên cứu

Việc nghiên cứu và giảng dạy các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính đã có từ lâu, gắn liền với sự phát triển của toán học trong giáo dục phổ thông và đại học. Một số tài liệu đáng chú ý:

Trong cuốn "Đại số tuyến tính" của tác giả Nguyễn Hữu Việt Hưng (Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội), xem tài liệu ta thấy sách cung cấp những kiến thức cơ bản và nâng cao về đại số tuyến tính, bao gồm các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính. Sách giải thích chi tiết các phương pháp như phương pháp thế, khử Gauss, định lý Cramer và ứng dụng của chúng trong việc giải các hệ phương trình với nhiều biến. Cuốn sách này giúp sinh viên nắm vững lý thuyết cơ bản.

"Đại số tuyến tính qua các ví dụ và bài tập" của tác giả Lê Tuấn Hoa (Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2006), sách cung cấp kiến thức cơ bản và nâng cao về đại số tuyến tính, bao gồm các chủ đề như ma trận, định thức, không gian véc tơ, và các phép biến đổi hệ phương trình tuyến tính. Những kiến thức này đóng vai trò quan trọng trong việc giải các bài toán hệ phương trình trong các kỳ thi Toán. Cuốn sách đi sâu vào các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính, bao gồm phương pháp khử Gauss, phương pháp Cramer và phương pháp sử dụng ma trận nghịch đảo. Thông qua các ví dụ cụ thể, sách giúp sinh viên nắm vững các bước giải chi tiết và rèn luyện kỹ năng làm bài.

"Đại số tuyến tính" của tác giả Nguyễn Duy Thuận (chủ biên), được xuất bản bởi Nhà xuất bản Đại học Sư phạm (2014), sách trình bày các nội dung cơ bản về đại số tuyến tính như ma trận, định thức, không gian véc tơ, giá trị riêng và véc tơ riêng, cùng các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính bao gồm phương pháp khử Gauss, phương pháp định lý Cramer và các ứng dụng của ma trận nghịch đảo trong việc giải hệ phương trình nhiều biến. Sách cung cấp nhiều bài tập từ cơ bản đến nâng cao, giúp sinh viên rèn luyện kỹ năng và hiểu sâu hơn về các phương pháp giải bài toán đại số tuyến tính.

"Cơ sở Đại số tuyến tính" do tác giả Nguyễn Tiến Quang (chủ biên), được xuất bản bởi Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, sách cung cấp các khái niệm cơ bản trong đại số tuyến tính như ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính, không gian véc tơ, ánh xạ tuyến tính, giá trị riêng và véc tơ riêng. Sách trình bày chi tiết các phương pháp giải như khử Gauss, sử dụng ma trận nghịch đảo và định

lý Cramer bao gồm các ví dụ minh họa kèm lời giải chi tiết, cùng hệ thống bài tập được phân loại từ cơ bản đến nâng cao. Sách không chỉ trình bày lý thuyết mà còn đi sâu vào các ứng dụng của đại số tuyến tính trong các lĩnh vực thực tiễn, như giải bài toán tuyến tính trong kinh tế, cơ học, và khoa học dữ liệu.

Cùng với các giáo trình và tài liệu học thuật khá phong phú về hệ phương trình, thì cuộc thi về học sinh giỏi, Olympic Toán học sinh viên và học sinh Việt Nam…. đã tạo ra một kho đề khá đa dạng và phong phú về hệ phương trình tuyến tính giúp thúc đẩy nghiên cứu các phương pháp giải bài toán hệ phương trình tuyến tính.

Tuy nhiên chưa có nhiều công trình nghiên cứu, hệ thống hóa và đi sâu nghiên cứu các bài toán về hệ phương trình tuyến tính thường gặp trong các kỳ thi Olympic Toán học sinh viên và học sinh - một trong các cuộc thi phong trào thu hút được đông đảo sinh viên toàn quốc yêu thích Toán học.

**2. Tính cấp thiết của đề tài**

Hệ phương trình tuyến tính là một nội dung cổ điển và quan trọng trong Toán học, đóng vai trò then chốt trong việc phát triển các lĩnh vực khác nhau của khoa học. Ngay từ khi được giới thiệu, hệ phương trình tuyến tính đã trở thành một công cụ mạnh mẽ để giải quyết các bài toán từ đơn giản đến phức tạp trong Toán học và ứng dụng. Sự ra đời và phát triển của nó đã để lại dấu ấn sâu sắc trong lịch sử Toán học, tạo cảm hứng cho nhiều nhà toán học lớn và những người yêu thích bộ môn này. Hệ phương trình tuyến tính không chỉ dừng lại ở việc là một bài toán lý thuyết mà còn là một phương tiện để biểu diễn và giải quyết các vấn đề thực tế trong nhiều lĩnh vực như vật lý, kinh tế, kỹ thuật và khoa học máy tính.

Với sức hút mạnh mẽ của mình, hệ phương trình tuyến tính luôn thôi thúc các nhà toán học và học sinh, sinh viên tìm tòi và sáng tạo. Đây không chỉ là một chủ đề thú vị mà còn là một thách thức đòi hỏi sự nhạy bén và khả năng tư duy logic. Trong giáo dục, hệ phương trình thường xuyên xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi, Olympic Toán quốc tế, cũng như trong các kỳ thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng. Bài toán về hệ phương trình tuyến tính không chỉ là một công cụ kiểm tra kiến thức mà còn là thước đo khả năng suy luận, xử lý tình huống và tư duy sáng tạo của học sinh. Những bài toán hệ phương trình tuyến tính phức tạp thường được đánh giá là "bài toán phân loại" dành cho học sinh khá giỏi, vì chúng đòi hỏi người giải phải nắm vững kỹ thuật, phương pháp cũng như khả năng xử lý nhanh và chính xác.

Là sinh viên ngành Sư phạm Toán, chúng tôi nhận thấy việc nghiên cứu chuyên sâu về hệ phương trình tuyến tính nói chung và các bài toán hệ phương trình tuyến tính nói riêng thường gặp trong các kỳ thi Olympic Toán sinh viên không chỉ giúp nâng cao hiểu biết chuyên môn mà còn là cơ hội để rèn luyện kỹ năng giải toán và tư duy toán học, đồng thời chuẩn bị tốt hơn cho sự nghiệp giảng dạy sau này. Là tiền đề để chúng tôi truyền tải kiến thức một cách hiệu quả, khơi gợi niềm yêu thích Toán học cho học sinh. Hơn nữa, việc nghiên cứu và tổng hợp một số bài toán về hệ phương trình tuyến tính cũng là cách để chúng tôi góp phần làm phong phú thêm kho tàng tài liệu giảng dạy, học tập và nghiên cứu Toán học.

Xuất phát từ những lý do trên, chúng tôi quyết định lựa chọn đề tài **"Một số bài toán về hệ phương trình tuyến tính thường gặp trong kỳ thi Olympic Toán học sinh viên và học sinh"** làm đề tài Nghiên cứu khoa học của mình. Chúng tôi hy vọng thông qua quá trình nghiên cứu này, không chỉ hiểu rõ hơn về các bài toán liên quan đến hệ phương trình tuyến tính thường có mặt trong kỳ thi Olympic Toán học sinh viên và học sinh mà còn giúp ích cho việc ôn tập của sinh viên chuẩn bị cho kỳ thi Olympic Toán học sinh viên và học sinh diễn ra hằng năm.

## 3. Mục tiêu nghiên cứu

Phân dạng và giải một số bài toán về hệ phương trình tuyến tính thường gặp trong kỳ thi Olympic Toán học sinh viên và học sinh.

## 4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu của đề tài

### 4.1. Đối tượng nghiên cứu

Các hệ phương trình tuyến tính và một số bài toán liên quan.

### 4.2. Phạm vi nghiên cứu

Các bài toán về hệ phương trình tuyến tính thường gặp trong kỳ thi Olympic Toán sinh viên.

## 5. Cách tiếp cận và phương pháp nghiên cứu

### 5.1. Cách tiếp cận

Nghiên cứu các bài toán về hệ phương trình tuyến tính trong kỳ thi Olympic Toán học sinh viên và học sinh và các tài liệu liên quan từ đó tổng hợp, phân tích và phân dạng chúng.

### 5.2. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu trao đổi ý kiến – lý luận – hỏi ý kiến chuyên gia.

# NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

# CHƯƠNG 1: CƠ SỞ LÝ LUẬN

## 1.1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

### 1.1.1. Khái niệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính

Hệ phương trình tuyến tính gồm $m$ phương trình, $n$ ẩn trên trường $\mathbf{K}$ là hệ có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

trong đó $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các ẩn, $a_{ij}, b_i \in \mathbf{K}\ (1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$ là những hằng số đã cho.

Ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận các hệ số của hệ phương trình (1.1) và ma trận

$$A^{bs} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

được gọi là ma trận bổ sung của (1.1).

Nếu ký hiệu

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ và } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

thì hệ phương trình (1.1) có thể viết dưới dạng ma trận sau:

$$A \cdot X = b. \tag{1.2}$$

Nếu trong không gian $\mathbf{K}^m$ ta xét các véc tơ

$$\vec{a}_j = \left(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}\right) \left(1 \le j \le n\right) \text{ và } \vec{\beta} = \left(b_1, b_2, \ldots, b_m\right).$$

thì hệ phương trình (1.1) có thể viết dưới dạng véc tơ sau:

$$x_1\vec{\alpha}_1 + x_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + x_n\vec{\alpha}_n = \vec{\beta}. \qquad (1.3)$$

Ta gọi là một nghiệm của hệ (1.1) (hay (1.2) hoặc (1.3)) là một bộ

$$\left(c_1, c_2, \ldots, c_n\right) \in K^n$$

sao cho khi thay chúng vào các ẩn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tương ứng thì hai vế của các phương trình của hệ (1.1) trở thành đồng nhất (hay $A \cdot C = b$ hoặc $c_1\vec{\alpha}_1 + c_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + c_n\vec{\alpha}_n = \vec{\beta}\Big)$.

Hệ phương trình (1.1) được gọi là có nghiệm (hay tương thích) nếu tập hợp các nghiệm của nó khác rỗng. Ngược lại nếu tập hợp các nghiệm là tập rỗng thì hệ (1.1) gọi là vô nghiệm.

Hai hệ phương trình tuyến tính gọi là tương đương nếu chúng có cùng số ẩn và cùng tập hợp nghiệm.

### 1.1.2. Cấu trúc nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

***Định lý 1.1:*** *Tập hợp L tất cả các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất* $AX = 0$ *là một không gian véc tơ con của* $\mathbf{K}^n$*, có số chiều thỏa mãn hệ thức* $\dim L = n - rankA$.

*Chứng minh:* Ta xét ánh xạ tuyến tính:

$$\tilde{A}: \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m,$$
$$x \mapsto Ax.$$

Rõ ràng $L = Ker\tilde{A}$ là một không gian véc tơ con của $\mathbf{K}^n$. Hơn nữa vì ánh xạ tuyến tính $\tilde{A}$ có ma trận là A trong cơ sở chính tắc của các không gian véc tơ $\mathbf{K}^n$ và $\mathbf{K}^m$, cho nên

$$\dim L = \dim Ker\tilde{A} = \dim \mathbf{K}^n - \dim Im\tilde{A}$$
$$= n - rankA.$$

***Định lý 1.2:*** *Giả sử L là không gian véc tơ con gồm các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất* $AX = 0$*, và* $x^\circ$ *là một nghiệm của hệ* $AX = \beta$*. Khi đó tập hợp các nghiệm của hệ* $AX = \beta$ *là:*

$$x^o + L = \left\{x^o + \alpha \mid \alpha \in L\right\}.$$

*Chứng minh:* $y^o$ là một nghiệm của hệ $Ax = \beta$ nếu và chỉ nếu $y^o - x^o$ là một nghiệm của hệ $AX = 0$, tức là nếu và chỉ nếu $y° - x° \in L$. Bao hàm thức cuối cùng tương đương với $y^o \in x^o + L$.

***Định nghĩa 1.3:*** Với các giả thiết của định lý trên, $x^o$ được gọi là một nghiệm riêng của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất $AX = \beta$. Còn $x^o + \alpha$, với $\alpha \in L$ được gọi là nghiệm tổng quát của hệ phương trình đó.

**1.1.3. Định lý**

***Định lý 1.4*** (Định lý Kronecker – Capelli): *Điều kiện cần và đủ để hệ (1.1) có nghiệm là hạng của ma trận A các hệ số của (1.1) bằng hạng của ma trận $A^{bs}$ của (1.1).*

*Hệ phương trình tuyến tính tổng quát có nghiệm khi và chỉ khi:*

$$rankA = rank\left(\left[A \mid b\right]\right)\frac{1}{2}.$$

*Nếu* $rank\left(A\right) = rank\left(\left[A \mid b\right]\right) = n$ *thì hệ phương trình tuyến tính có một nghiệm duy nhất.*

*Nếu* $rank\left(A\right) = rank\left(\left[A \mid b\right]\right) < n$ *thì hệ phương trình tuyến tính có vô số nghiệm.*

*Nếu* $rank\left(A\right) \neq rank\left(\left[A \mid b\right]\right)$ *thì hệ phương trình tuyến tính vô nghiệm.*

*Chứng minh:* Ta biết rằng hệ phương trình tuyến tính (1.1) có nghiệm (hay (1.3) có nghiệm ) khi và chỉ khi véc tơ $\vec{\beta} = \left(b_1, b_2, \ldots, b_m\right)$ biểu thị tuyến tính được qua các véc tơ $\left\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n\right\}$ với $\vec{\alpha}_j = \left(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj}\right)$ $\left(1 \le j \le n\right)$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi hai véc tơ: $\left\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n\right\}$ (1.4) và $\left\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n, \vec{\beta}\right\}$ (1.5) là tương đương, tức là mỗi véc tơ của hệ này đều biểu thị tuyến tính qua hệ véc tơ còn lại. Bây giờ ta chứng tỏ rằng hai hệ (1.4) và (1.5) tương đương khi và chỉ khi hạng của chúng bằng nhau.

Thật vậy, nếu (1.4) và (1.5) tương đương thì hạng của chúng bằng nhau.

Ngược lại, nếu hạng của hệ (1.4) bằng hạng của hệ (1.5) thì bộ phận độc lập tuyến tính tối đại của (1.4) cũng là bộ phận độc lập tuyến tính tối đại của (1.5). Vì

(1.4) và (1.5) cùng tương đương với bộ phận độc lập tuyến tính tối đại đó nên (1.4) và (1.5) tương đương.

Cuối cùng chú ý rằng hạng của hệ (1.4) chính là hạng của ma trận $A$ còn hạng của hệ (5) là hạng của ma trận bổ sung $A^{bs}$ của (1.1).

***Định lý 1.5*** (Định lý về nghiệm của hệ phương trình thuần nhất): *Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất* $AX = 0$ *luôn có ít nhất một nghiệm, đó là nghiệm tầm thường* $X = 0$. *Tập nghiệm của hệ này là một không gian véc tơ con của* $\mathbb{R}^n$.

*Chứng minh:*

Giả sử $\det(A) \neq 0$. Khi đó, ma trận $A$ khả nghịch.

Nhân cả hai vế của phương trình $AX = 0$ với $A^{-1}$, ta được:

$$A^{-1}AX = A^{-1}0$$

$$X = 0.$$

Vậy nghiệm duy nhất của hệ phương trình đồng nhất là $X = 0$.

Giả sử $\det(A) = 0$. Khi đó, ma trận $A$ không khả nghịch.

Hệ phương trình đồng nhất $AX = 0$ có vô số nghiệm, bao gồm cả nghiệm không tầm thường.

***Định lý 1.6*** (Định lý về nghiệm tổng quát của hệ phương trình không đồng nhất): *Nếu* $x_o$ *là một nghiệm của hệ phương trình không đồng nhất* $AX = b$, *thì mọi nghiệm khác của hệ có dạng:*

$$X = x_o + x_h$$

*trong đó* $x_o$ *là một nghiệm riêng của hệ phương trình không đồng nhất,* $x_h$ *là nghiệm của hệ phương trình thuần nhất tương ứng* $AX = 0$.

*Chứng minh:*

Giả sử**:**

$x_o$ là một nghiệm của hệ phương trình không đồng nhất, tức là: $Ax_o = b$.

$x_h$ là nghiệm của hệ phương trình đồng nhất tương ứng, tức là: $Ax_h = 0$.

Chứng minh rằng $x_o + x_h$ là nghiệm của hệ phương trình không đồng nhất.

Ta có:

$$A(x_o + x_h) = Ax_o + Ax_h = b + 0 = b.$$

Vậy $x_o + x_h$ là nghiệm của hệ phương trình không đồng nhất.

Chứng minh rằng mọi nghiệm của hệ phương trình không đồng nhất có thể viết dưới dạng $x_o + x_h$.

Giả sử $x_1$ và $x_2$ đều là nghiệm của hệ phương trình không đồng nhất, tức là:

$$Ax_1 = b \text{ và } Ax_2 = b.$$

Xét hiệu $x_1 - x_2$:

$$A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = b - b = 0 \ .$$

Vậy $x_1 - x_2$ là nghiệm của hệ phương trình đồng nhất $AX = 0$ tức là $x_1 - x_2 = x_h$.

Do đó $x_1 = x_2 + x_h$.

Vậy mọi nghiệm của hệ phương trình không đồng nhất có thể viết dưới dạng $x_o + x_h$ trong đó $x_o$ là một nghiệm riêng và $x_h$ là nghiệm của hệ phương trình đồng nhất tương ứng.

***Định lý 1.7*** (Định lý về phép biến đổi sơ cấp và tính tương đương của hệ phương trình): *Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng của ma trận hệ số A (như hoán đổi hai dòng, nhân một dòng với một số khác 0, cộng một bội số của dòng này vào dòng khác) không làm thay đổi tập nghiệm của hệ phương trình tương ứng. Do đó, hai hệ phương trình có cùng tập nghiệm nếu và chỉ nếu chúng có cùng ma trận hệ số sau khi thực hiện các phép biến đổi sơ cấp.*

*Chứng minh:*

Giả sử:

$AX = b$ là hệ phương trình tuyến tính ban đầu.

$A'X = b'$ là hệ phương trình tuyến tính sau khi thực hiện một phép biến đổi sơ cấp.

Chứng minh rằng nếu $AX = b$ có nghiệm, thì $A'X = b'$ cũng có nghiệm.

Giả sử $x_0$ là nghiệm của hệ phương trình $AX = b$, tức là:

$$Ax_o = b.$$

Thực hiện phép biến đổi sơ cấp trên hệ phương trình $AX = b$ để thu được hệ phương trình $A'X = b'$.

Do phép biến đổi sơ cấp không thay đổi tập nghiệm của hệ phương trình, nên $x_o$ cũng là nghiệm của hệ phương trình $A'X = b'$.

Chứng minh rằng nếu $A'X = b'$ có nghiệm, thì $AX = b$ cũng có nghiệm:

Giả sử $x_1$ là nghiệm của hệ phương trình $A'X = b'$, tức là:

$$A'x_1 = b'.$$

Thực hiện phép biến đổi ngược của phép biến đổi sơ cấp đã áp dụng trước đó để chuyển hệ phương trình $A'X = b'$ về hệ phương trình $AX = b$.

Do phép biến đổi sơ cấp không thay đổi tập nghiệm của hệ phương trình, nên $x_1$ cũng là nghiệm của hệ phương trình $AX = b$.

Từ hai chiều chứng minh trên, hai hệ phương trình $AX = b$ và $A'X = b'$ là tương đương nếu và chỉ nếu chúng có cùng một tập nghiệm.

## 1.2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

### 1.2.1. Phương pháp thế

Trong đại số, đặc biệt là trong lĩnh vực giải hệ phương trình tuyến tính hai ẩn hoặc nhiều ẩn, phương pháp thế được xem là một trong những phương pháp cơ bản và thường được sử dụng rộng rãi nhờ vào tính trực quan và hiệu quả của nó trong nhiều trường hợp. Nguyên tắc cốt lõi của phương pháp này là sử dụng mối quan hệ giữa các biến trong một phương trình của hệ để biểu diễn một biến theo biến còn lại (hoặc theo một biểu thức chứa các biến khác), sau đó thay biểu thức này vào phương trình thứ hai (hoặc các phương trình còn lại trong hệ), từ đó làm giảm số lượng ẩn cần giải trong từng bước.

Cụ thể, khi áp dụng phương pháp thế, người giải sẽ chọn một phương trình trong hệ - thường là phương trình đơn giản hoặc có hệ số thuận lợi để rút một biến theo biến khác. Biểu thức thu được sau đó sẽ được thế vào phương trình còn lại nhằm tạo ra một phương trình chỉ còn một ẩn duy nhất. Việc giải phương trình một ẩn này thường dễ dàng hơn nhiều so với giải trực tiếp hệ phương trình ban đầu. Sau khi tìm được giá trị của ẩn đó, ta có thể quay lại biểu thức đã rút để tìm giá trị của ẩn còn lại.

Một trong những ưu điểm nổi bật của phương pháp thế là nó cung cấp cách tiếp cận rõ ràng, đặc biệt hữu dụng khi hệ phương trình có các hệ số dễ tính toán, hoặc khi một trong hai phương trình đã gần ở dạng chuẩn để rút biến. Tuy nhiên, cũng cần lưu ý rằng trong những hệ có cấu trúc phức tạp hoặc chứa nhiều ẩn và hệ số không thuận lợi, việc áp dụng phương pháp thế có thể dẫn đến các biểu thức dài dòng và khó xử lý, từ đó ảnh hưởng đến độ chính xác cũng như tốc độ giải.

Mặc dù vậy, phương pháp thế vẫn giữ vai trò quan trọng trong chương trình học cơ bản về đại số, không chỉ vì tính hiệu quả mà còn vì nó giúp người học hiểu rõ hơn về bản chất của mối quan hệ giữa các ẩn trong hệ phương trình. Việc nắm vững phương pháp này là nền tảng cho việc tiếp cận các phương pháp giải nâng cao hơn như phương pháp cộng đại số, phương pháp ma trận, hay phương pháp Gauss trong các hệ phương trình tuyến tính có nhiều biến.

**VÍ DỤ MINH HỌA**

**Ví dụ 1.** Giải hệ phương trình tuyến tính ba ẩn sau:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 & (1) \\ 2x - y + z = 3 & (2) \\ 3x + 2y - z = 4. & (3) \end{cases}$$

**Lời giải**

Từ phương trình (1), ta rút $x$ theo $y, z$:

$$x = 6 - y - z. \quad (4)$$

Thay $x = 6 - y - z$ vào phương trình (2).

$$2(6 - y - z) - y + z = 3$$
$$12 - 2y - 2z - y + z = 3$$
$$-3y - z = -9.$$

Thay $x = 6 - y - z$ vào phương trình (3).

$$3(6 - y - z) + 2y - z = 4$$
$$18 - 3y - 3z + 2y - z = 4$$
$$-y - 4z = -14.$$

Giải hệ phương trình hai ẩn $y, z$

$$\begin{cases} -3y - z = -9 & (5) \\ -y - 4z = -14. & (6) \end{cases}$$

Từ phương trình (5) ta rút $z$ theo $y$: $z = 9 - 3y$.

Thay $z = 9 - 3y$ vào phương trình (6) ta được:

$$-y-4(9-3y)=-14$$
$$-y-36+12y=-14$$
$$11y=22$$
$$y=2.$$

Thay $y=2$ vào phương trình (5) ta được:

$$-3.2-z=-9$$
$$z=3.$$

Thay $y=2, z=3$ vào biểu thức (4) ta được:

$$x=6-2-3=1.$$

*Kết luận:* Vậy hệ phương trình có nghiệm: $x=1, y=2, z=3.$

**Ví dụ 2.** Giải và biện luận hệ phương trình với tham số.

$$\begin{cases} x+y+z=3 & (1) \\ 2x-y+z=a & (2) \\ 3x+y+az=4. & (3) \end{cases}$$

**Lời giải**

Rút $x$ từ phương trình (1)

$$x=3-y-z. \quad (4)$$

Thế $x=3-y-z$ vào phương trình (2), (3).

Thay $x=3-y-z$ vào phương trình (2)

$$2(3-y-z)-y+z=a$$
$$6-2y-2z-y+z=a$$
$$6-3y-z=a.$$

Thay $x=3-y-z$ vào phương trình (3)

$$3(3-y-z)+y+az=4$$
$$9-3y-3z+y+az=4$$
$$9-2y+(a-3)z=4.$$

Giải hệ phương trình hai ẩn $y, z$

$$\begin{cases} 6-3y-z=a & (5) \\ 9-2y+(a-3)z=4. & (6) \end{cases}$$

Từ phương trình (5) ta rút $z$ theo $y,a$: $z=6-3y-a.$ $(7)$

Thay $z=6-3y-a$ vào phương trình (6) ta được:

$$9-2y+(a-3)(6-3y-a)=4$$

$$9-2y+6a-3ay-a^2-18+9y+3a=4$$

$$(7-3a)y+9a-a^2=13\ .\quad (8)$$

Biện luận theo $a$.

TH1: $7-3a\neq 0\Rightarrow a\neq\frac{7}{3}$

Giải (8) theo $y$: $y=\frac{13-9a+a^2}{7-3a}$

Thay $y=\frac{13-9a+a^2}{7-3a}$ vào (7) ta được:

$$z=6-3.\frac{13-9a+a^2}{7-3a}-a$$

$$z=\frac{42-18a-39+27a-3a^2-7a+3a^2}{7-3a}$$

$$z=\frac{2a+3}{7-3a}.$$

Thay $y=\frac{13-9a+a^2}{7-3a}, z=\frac{2a+3}{7-3a}$ vào (4) ta được:

$$x=3-\frac{13-9a+a^2}{7-3a}-\frac{2a+3}{7-3a}$$

$$x=\frac{21-9a-13+9a-a^2-2a-3}{7-3a}$$

$$x=\frac{5-2a-a^2}{7-3a}.$$

Vậy với $a\neq\frac{7}{3}$, hệ có nghiệm duy nhất.

TH2: $7-3a=0\Rightarrow a=\frac{7}{3}$

Thay $a=\frac{7}{3}$ vào phương trình (8) ta được:

$$(7-3.\frac{7}{3})y+9.\frac{7}{3}-\left(\frac{7}{3}\right)^2=13$$

$$0y+21-\frac{49}{9}=13$$

$$21-\frac{49}{9}=13$$

$$\frac{140}{9}\neq 13.$$

Vậy với $a=\frac{7}{3}$, hệ phương trình vô nghiệm.

### 1.2.2. Phương pháp cộng đại số

Trong quá trình giải hệ phương trình tuyến tính, bên cạnh phương pháp thế, phương pháp cộng đại số là một kỹ thuật được sử dụng rộng rãi nhờ vào tính trực tiếp và khả năng xử lý tốt các hệ phương trình có cấu trúc đơn giản. Nguyên lý cơ bản của phương pháp này là thực hiện các phép biến đổi đại số bao gồm cộng, trừ, nhân hoặc chia trên hai (hoặc nhiều) phương trình trong hệ nhằm khử đi một ẩn số, từ đó làm giảm số lượng ẩn và đơn giản hóa hệ phương trình ban đầu.

Cụ thể, người giải sẽ tìm cách nhân một hoặc cả hai phương trình với các hệ số thích hợp sao cho khi cộng hoặc trừ các phương trình lại với nhau, một trong các ẩn bị triệt tiêu. Kết quả thu được là một phương trình mới chỉ còn chứa một ẩn, từ đó dễ dàng giải được giá trị của ẩn đó. Sau đó, quay trở lại thay vào một trong các phương trình ban đầu để tìm giá trị của ẩn còn lại.

Phương pháp cộng đại số đặc biệt hiệu quả trong các trường hợp mà hệ phương trình có hệ số của một ẩn nào đó đối xứng (hoặc có thể dễ dàng đưa về đối xứng thông qua phép nhân). Hơn nữa, so với phương pháp thế, phương pháp cộng thường tránh được việc phải xử lý những biểu thức phân thức phức tạp trong quá trình rút ẩn, do đó dễ thao tác hơn trong một số tình huống.

Tuy nhiên, cần lưu ý rằng để áp dụng phương pháp này hiệu quả, người học cần có kỹ năng quan sát và lựa chọn hệ số một cách hợp lý nhằm triệt tiêu ẩn một cách tối ưu. Trong những hệ có hệ số phức tạp hoặc không thể đưa về dạng thuận

lợi, việc áp dụng phương pháp cộng có thể đòi hỏi nhiều bước biến đổi và tính toán cẩn thận.

**VÍ DỤ MINH HỌA**

**Ví dụ 1.** Giải hệ phương trình tuyến tính ba ẩn sau:

$$\begin{cases} x+2y-z=1 & (1) \\ 2x-y+3z=9 & (2) \\ 3x+y+2z=13. & (3) \end{cases}$$

**Lời giải**

Khử một ẩn giữa hai phương trình.

Nhân cả hai vế của phương trình (1) với 2 rồi trừ đi phương trình (2) ta được:

$$2(x+2y-z)-(2x-y+3z)=2.1-9$$
$$2x+4y-2z-2x+y-3z=-7$$
$$5y-5z=-7. \quad (4)$$

Nhân cả hai vế của phương trình (1) với 3 rồi trừ đi phương trình (3) ta được:

$$3(x+2y-z)-(3x+y+2z)=3.1-13$$
$$3x+6y-3z-3x-y-2z=-10$$
$$5y-5z=-10. \quad (5)$$

Giải hệ phương trình hai ẩn $y,z$.

$$\begin{cases} 5y-5z=-7 & (4) \\ 5y-5z=-10. & (5) \end{cases}$$

Lấy phương trình (4) trừ đi phương trình (5) ta được: $0=3$ (vô lí).

*Kết luận:* Hệ phương trình vô nghiệm.

**Ví dụ 2.** Giải và biện luận hệ phương trình với tham số *a.*

$$\begin{cases} x+y+z=3 & (1) \\ 2x-y+z=4 & (2) \\ ax+y-z=1. & (3) \end{cases}$$

**Lời giải**

Khử một ẩn giữa hai phương trình.

Lấy phương trình (2) trừ đi phương trình (1) ta được:

$$(2x-y+z)-(x+y+z)=4-3$$
$$2x-y+z-x-y-z=1$$
$$x-2y=1. \quad (4)$$

Lấy phương trình (1) cộng với phương trình (3) ta được:

$$(x+y+z)+(ax+y-z)=3+1$$
$$x+y+z+ax+y-z=4$$
$$(a+1)x+2y=4. \quad (5)$$

Giải hệ phương trình hai ẩn $y,z$:

$$\begin{cases} x-2y=1 & (4) \\ (a+1)x+2y=4. & (5) \end{cases}$$

Lấy phương trình (4) cộng với phương trình (5) ta được:

$$(x-2y)+\left[(a+1)x+2y\right]=1+4$$
$$x-2y+(a+1)x+2y=5$$
$$(a+2)x=5. \quad (6)$$

Biện luận nghiệm theo *a:*

TH1: $a+2\neq 0\Rightarrow a\neq -2$

Giải (8) theo *x*: $x=\dfrac{5}{a+2}$.

Thay $x=\dfrac{5}{a+2}$ vào phương trình (4) ta được:

$$\frac{5}{a+2}-2y=1$$
$$2y=\frac{5}{a+2}-1$$
$$2y=\frac{5-a-2}{a+2}$$
$$y=\frac{3-a}{2a+4}.$$

Thay $x=\dfrac{5}{a+2}, y=\dfrac{3-a}{2a+4}$ vào phương trình (1) ta được:

$$\frac{5}{a+2}+\frac{3-a}{2a+4}+z=3$$

$$z=3-\frac{5}{a+2}-\frac{3-a}{2a+4}$$

$$z=\frac{6a+12-10-3+a}{2a+4}$$

$$z=\frac{7a-1}{2a+4}.$$

Vậy với $a\neq -2$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

TH2: $a+2=0\Rightarrow a=-2$

Thay $a=-2$ vào phương trình (6) ta được:

$$(-2+2)x=5$$

$$0x=5$$

$$0\neq 5.$$

Vậy với $a=-2$, hệ phương trình vô nghiệm.

*Kết luận:*

Với $a\neq -2$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

$$x=\frac{5}{a+2}, y=\frac{3-a}{2a+4}, z=\frac{7a-1}{2a+4}.$$

Với $a=-2$, hệ phương trình vô nghiệm.

### 1.2.3. Phương pháp Cramer

Phương pháp Cramer là một trong những phương pháp cổ điển quan trọng trong đại số tuyến tính, được sử dụng để giải hệ phương trình tuyến tính vuông (số phương trình bằng số ẩn). Phương pháp này được phát triển bởi nhà toán học Gabriel Cramer vào thế kỷ XVIII và dựa trên việc sử dụng định thức ma trận.

Phương pháp Cramer hoạt động dựa trên việc sử dụng định thức của ma trận hệ số và các ma trận con được tạo ra bằng cách thay thế từng cột trong ma trận hệ số bằng véc tơ hằng số. Mỗi ẩn số trong hệ phương trình sẽ được tính trực tiếp bằng tỉ số giữa định thức của ma trận đã thay cột và định thức của ma trận gốc. Phương pháp này chỉ áp dụng được trong trường hợp hệ phương trình có số phương trình bằng số ẩn và định thức của ma trận hệ số khác không.

Mục tiêu của phương pháp Cramer là cung cấp một cách biểu diễn nghiệm rõ ràng và trực tiếp thông qua các định thức, đồng thời giúp xác định điều kiện

tồn tại nghiệm duy nhất của hệ phương trình. Ưu điểm của phương pháp là tính đơn giản, rõ ràng về mặt lý thuyết và thuận tiện để kiểm tra tính khả nghịch của ma trận hệ số. Phương pháp này rất hiệu quả khi giải các hệ nhỏ hoặc trong các bài toán lý thuyết.

Ưu điểm của phương pháp là tính đơn giản, rõ ràng về mặt lý thuyết và thuận tiện để kiểm tra tính khả nghịch của ma trận hệ số. Phương pháp này rất hiệu quả khi giải các hệ nhỏ hoặc trong các bài toán lý thuyết. Tuy nhiên, phương pháp Cramer không thích hợp cho các hệ lớn vì việc tính định thức ma trận lớn rất phức tạp và tốn nhiều thời gian tính toán.

Phương pháp Cramer giữ vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu đại số tuyến tính, giúp hiểu sâu hơn về mối liên hệ giữa định thức và nghiệm của hệ phương trình tuyến tính.

**Bổ đề:** *Nếu một hệ phương trình tuyến tính có nghiệm thì nó tương đương với hệ phương trình sau:*

$$\begin{cases} a_{1i_1}x_{i_1} + \cdots + a_{1i_k}x_{i_k} + \sum\limits_{j\notin\{i_1,\ldots,i_k\}} a_{1j}x_j = b_{1'} \\ \cdots \\ a_{ki_1x_{i_1}} + \cdots + a_{ki_k}x_{i_k} + \sum\limits_{j\notin\{i_1,\ldots,i_k\}} a_{kj}x_j = b_{k'} \end{cases} \quad (1.6)$$

*trong đó định thức của ma trận* $\left(a_{pi_q}\right)$ *khác* $0$.

Để nhận được hệ phương trình $(1.6)$, ta chỉ việc chọn định thức con cấp cao nhất khác 0 của ma trận liên kết $A$ của $(1.1)$ rồi bỏ đi tất cả các dòng của hệ không chứa các dòng của định thức đó. Các chỉ số $i_1 < \ldots < i_k$ ở trên chính là số thứ tự của các cột của định thức con. Xem $x_j, j \notin \{i_1,\ldots,i_k\}$ là các biến tự do, rồi chuyển sang vế phải và đổi tên biến ta chỉ còn phải giải hệ phương trình dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_{1'} \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_{n'} \end{cases} \quad (1.7)$$

trong đó $|A| \neq 0$.

**Định nghĩa:** Ta nói hệ phương trình tuyến tính $n$ ẩn và $n$ phương trình $(1.7)$ là không suy biến nếu $|A| \neq 0$, và là suy biến nếu $|A| = 0$.

**Định lý** (Quy tắc Cramer): *Cho hệ phương trình tuyến tính không suy biến* $(1.7)$. *Kí hiệu* $D = |A|$ *và* $D_i$ *là định thức nhận được từ* $D$ *bằng cách thay cột thứ* $i$ *bởi cột hệ số tự do của* $A$. *Khi đó hệ này có nghiệm duy nhất và được tính bởi công thức sau:*

$$x_i = \frac{D_i}{D};\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

*Hệ Cramer dạng $AX = B$.

**VÍ DỤ MINH HỌA**

**Ví dụ 1.** Giải hệ phương trình sau:

$a)$ $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + y = 2. \end{cases}$

**Lời giải**

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \ \Rightarrow \text{Hệ có nghiệm duy nhất.}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7,\ D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Vậy nghiệm của hệ là: $x = \frac{D_1}{D} = \frac{7}{5},\ y = \frac{D_2}{D} = \frac{3}{5}.$

$b)$ $\begin{cases} -2x + y - 3z = 1 \\ 3x - 4y + 2z = 3 \\ 5x + 2y + z = -2. \end{cases}$

**Lời giải**

Hệ phương trình có ma trận hệ số $A$ và cột số hạng tự do $B$ như sau:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -3\\ 3 & -4 & 2\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ -2\end{pmatrix}.$$

Ta có:

$$D=|A|=\begin{vmatrix}-2 & 1 & -3\\ 3 & -4 & 2\\ 5 & 2 & 1\end{vmatrix}=-55\neq 0$$

$\Rightarrow$ Hệ có nghiệm duy nhất.

Thay cột thứ nhất của $D$ bằng cột $B$ ta được:

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & 1 & -3\\ 3 & -4 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{vmatrix}=-9.$$

Thay cột thứ hai của $D$ bằng cột $B$ ta được:

$$D_2=\begin{vmatrix}-2 & 1 & -3\\ 3 & 3 & 2\\ 5 & -2 & 1\end{vmatrix}=56.$$

Thay cột thứ ba của $D$ bằng cột $B$ ta được:

$$D_3=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 3 & -4 & 3\\ 5 & 2 & -2\end{vmatrix}=43.$$

Theo quy tắc Cramer ta tìm được nghiệm duy nhất của hệ phương trình đã cho:

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{9}{55},y=\frac{D_2}{D}=-\frac{56}{55},z=-\frac{43}{55}.$$

**Ví dụ 2.** Giải hệ phương trình tuyến tính 3 ẩn số $x, y, z$ cho biết ma trận mở rộng.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & 4 & 2\\ 3 & 2 & 5 & 0\\ 5 & 6 & 9 & -1\end{array}\right).$$

**Lời giải**

Chú ý rằng ba cột đầu của ma trận mở rộng $\overline{A}$ là các cột của ma trận hệ số $A$, còn cột cuối là cột số hạng tự do $B$ do đó:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Hệ có nghiệm duy nhất.}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -31,\ D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & -1 & 9 \end{vmatrix} = -6,\ D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 21.$$

Theo quy tắc Cramer ta tìm được nghiệm duy nhất của hệ phương trình đã cho:

$$x = \frac{D_1}{D} = -\frac{31}{2}, y = \frac{D_2}{D} = -3, z = \frac{D_3}{D} = \frac{21}{2}.$$

**Ví dụ 3.** Tìm $m$ để hệ phương trình có 1 nghiệm.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = m \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 2m \\ -x_1 - x_2 + \left(m^2 - m\right)x_3 = 0. \end{cases}$$

**Lời giải**

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -1 & m^2 - m \end{vmatrix} = m^2 - m.$$

Hệ phương trình có 1 nghiệm:

$$\Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1. \end{cases}$$

**Ví dụ 4.** Với giá trị nào của m hệ sau có duy nhất 1 nghiệm. Tìm nghiệm đó.

$$\begin{cases} (m-1)x + y + z = 1 \\ 3x - y - 2z = 1 \\ 2mx + y + 3z = 2. \end{cases}$$

**Lời giải**

Hệ phương trình có ma trận hệ số $A$ và cột số hạng tự do $B$ như sau:

$$A=\begin{pmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2m & 1 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ta có:

$$D=\begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2m & 1 & 3 \end{vmatrix}=-3(m-1)+4m+3+2m-9-2(m-1)=m-1.$$

Để hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \det \mathrm{A}\neq 0\Leftrightarrow m\neq 1.$

Thay cột thứ nhất của $D$ bằng cột $B$ ta được:

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2m & 1 & 3 \end{vmatrix}=-1.$$

Thay cột thứ hai của $D$ bằng cột $B$ ta được:

$$D_2=\begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2m & 2 & 3 \end{vmatrix}=m-2.$$

Thay cột thứ ba của $D$ bằng cột $B$ ta được:

$$D_3=\begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2m & 1 & 2 \end{vmatrix}=m.$$

Vậy nghiệm duy nhất của hệ: $x=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-1}{m-1}, y=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{m-2}{m-1}, z=\dfrac{D_3}{D}=\dfrac{m}{m-1}.$

**Ví dụ 5.** Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số $m$.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=0 \\ -2x_1+(m-2)x_2+(m-5)x_3=2 \\ mx_1+x_2+(m+1)x_3=-2. \end{cases}$$

**Lời giải**

Ta có:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ -2 & m-2 & m-5\\ m & 1 & m+1\end{vmatrix}=(m-1)(m-3).$$

Thay cột thứ nhất của $D$ bằng cột $B$ ta được:

$$D_1=\begin{vmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & m-2 & m-5\\ -2 & 1 & m+1\end{vmatrix}=-4m+12.$$

Thay cột thứ hai của $D$ bằng cột $B$ ta được:

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 2 & m-5\\ m & -2 & m+1\end{vmatrix}=0.$$

Thay cột thứ ba của $D$ bằng cột $B$ ta được:

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & m-2 & 2\\ m & 1 & -2\end{vmatrix}=2m-6.$$

- Nếu $D\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 1\\ m\neq 3\end{cases}$ hệ có nghiệm duy nhất với

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{4}{m-1};x_2=\frac{D_2}{D}=0;x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{2}{m-1}.$$

- Nếu $D=0\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\ m=3\end{cases}$

Với $m=1\Rightarrow D_1=8\neq 0$ hệ vô nghiệm.

Với $m=3\Rightarrow D_1=D_2=D_3=0$ thay vào hệ phương trình, ma trận hoá hệ phương trình ta có:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 2 & 0\\ -2 & 1 & -2 & 2\\ 3 & 1 & 4 & -2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[h_3 \to h_1.(-3)+h_3]{h_2 \to h_1.2+h_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_3 \to h_2+h_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_3 = \dfrac{-4-6t}{5} \\ x_2 = \dfrac{2-2t}{5} \\ x_3 = t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hệ phương trình vô số nghiệm.

Vậy với $m \neq 1, m \neq 3$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

với $m = 1$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

với $m = 3$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm.

**Ví dụ 6.** Một công ty sản xuất 3 loại sản phẩm A, B, C.

- Mỗi sản phẩm A cần 2 đơn vị nguyên liệu X và 1 đơn vị nguyên liệu Y.
- Mỗi sản phẩm B cần 1 đơn vị nguyên liệu X và 3 đơn vị nguyên liệu Y.
- Mỗi sản phẩm C cần 3 đơn vị nguyên liệu X và 2 đơn vị nguyên liệu Y.

Công ty có tổng cộng 100 đơn vị nguyên liệu X và 120 đơn vị nguyên liệu Y. Giả sử công ty muốn sản xuất đủ số lượng sản phẩm A, B, C sao cho sử dụng hết nguyên liệu. Ngoài ra, công ty muốn sản xuất số lượng sản phẩm B gấp đôi số lượng sản phẩm A. Tìm số lượng sản phẩm A, B, C.

**Lời giải**

Gọi số lượng sản phẩm A, B, C lần lượt là $x$, $y$, $z$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 100 & (1) \\ x + 3y + 2z = 120 & (2) \\ y = 2x & (3) \end{cases}$$

trong đó: $(1)$, $(2)$, $(3)$ lần lượt là: nguyên liệu X, nguyên liệu Y và nguyên liệu sản xuất.

Hệ phương trình trên có ma trận hệ số $A$ và cột số hạng tự do $B$ như sau:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ta có:

$$D = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 13 \neq 0 .$$

$\Rightarrow$ Hệ có nghiệm duy nhất.

Thay cột thứ nhất của $D$ bằng cột $B$ ta được:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 100 & 1 & 3 \\ 120 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 160.$$

Thay cột thứ hai của $D$ bằng cột $B$ ta được:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 100 & 3 \\ 1 & 120 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 32.$$

Thay cột thứ ba của $D$ bằng cột $B$ ta được:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 100 \\ 1 & 3 & 120 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 220.$$

Theo quy tắc Cramer ta tìm được nghiệm duy nhất của hệ phương trình đã cho:

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{160}{13}, y=\frac{D_2}{D}=\frac{320}{13}, z=\frac{D_3}{D}=\frac{220}{13}.$$

Vậy số lượng sản phẩm A, B, C mà công ty sản xuất là $\frac{160}{13}$, $\frac{320}{13}$, $\frac{220}{13}$.

**Ví dụ 7.** Một học sinh đến hiệu sách mua 3 loại sách: Sách Toán giá 25 000 đồng/quyển, sách Văn giá 20 000 đồng/quyển, sách Tiếng Anh giá 15 000 đồng/quyển. Học sinh mua tổng cộng 20 quyển, hết 400 000 đồng. Biết rằng số sách Văn gấp đôi số sách Tiếng Anh. Hỏi học sinh đã mua bao nhiêu quyển mỗi loại?

**Lời giải**

Gọi số sách Toán, Văn, Tiếng Anh lần lượt là $x, y, z$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+z=20 \\ 25x+20y+15z=400 \\ y-2z=0. \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có ma trận hệ số $A$ và cột số hạng tự do $B$ như sau:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 25 & 20 & 15 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 20 \\ 400 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ta có:

$$D=|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 25 & 20 & 15 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=1.\begin{vmatrix} 20 & 15 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}-1.\begin{vmatrix} 25 & 15 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}+1.\begin{vmatrix} 25 & 20 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=20\neq 0.$$

$\Rightarrow$ Hệ có nghiệm duy nhất.

Thay cột thứ nhất của $D$ bằng cột $B$ ta được:

$$D_1=\begin{vmatrix} 20 & 1 & 1 \\ 400 & 20 & 15 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=100.$$

Thay cột thứ hai của $D$ bằng cột $B$ ta được:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 20 & 1 \\ 25 & 400 & 15 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 200.$$

Thay cột thứ ba của $D$ bằng cột $B$ ta được:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 20 \\ 25 & 20 & 400 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 100.$$

Theo quy tắc Cramer ta tìm được nghiệm duy nhất của hệ phương trình đã cho:

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{100}{20} = 5, y = \frac{D_2}{D} = \frac{200}{20} = 10, z = \frac{D_3}{D} = \frac{100}{20} = 5.$$

Vậy số sách Toán, Văn, Tiếng Anh mà học sinh đã mua lần lượt 5 quyển sách Toán, 10 quyển sách Văn và 5 quyển sách Tiếng Anh.

### 1.2.4. Phương pháp khử Gauss

Gồm các bước như sau:

**Bước 1:**

**1.** Chọn chỉ số $i_1$ nhỏ nhất sao cho véc tơ cột hệ số của $x_{i_1}$ khác 0. Đổi chỗ các phương trình cho nhau ta có thể đưa về trường hợp $a_{1i_1} \neq 0$. Chia 2 vế của phương trình thứ nhất cho $a_{1i_1}$.

**2.** Từ phương trình thứ $j \geq 2$ lần lượt trừ đi phương trình thứ nhất nhân với $a_{ji_1}$.

Cuối bước 1 ta sẽ nhận được hệ phương trình dạng sau đây:

$$\begin{cases} x_{i_1} + a_{1(i_1+1)}x_{i_1+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{2(i_1+1)}x_{i_1+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m(i_1+1)}x_{i_1+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1.8)$$

**Bước** $(k+1) \geq 2$ **:**

A) Nếu tồn tại $i_{k+1}$ bé nhất để véc tơ cột hệ số của hệ gồm $(m-k)$ phương trình cuối cùng khác 0 thì lập lại bước 1 đối với hệ này, rồi chuyển sang bước thứ $k+2$ .

B) Nếu không thì có nghĩa là ta nhận được hệ phương trình như sau:

$$\begin{cases} x_{i1} + a_{1i_2}x_{i_2} + \ldots + a_{1i_k}x_{i_k} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_{i_2} + \ldots + a_{2i_k}x_{i_k} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ x_{i_k} + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \\ 0 = b_{k+1}, \\ \ldots \\ 0 = b_m. \end{cases} \quad (1.9)$$

B1) Nếu có $b_i \neq 0$ với $i \geq k+1$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

B2) Nếu $b_{k+1} = \ldots = b_m = 0$ thì ta cho $x_j, j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$ là các biến (tham số ) tự do, rồi từ phương trình thứ $k$ của hệ (1.12) ta tìm được:

$$x_{ik} = b_k - a_{k(i_k+1)}x_{i_k+1} - \ldots - a_{kn}x_n.$$

Thay vào phương trình thứ $k-1$ của hệ (1.12) ta tìm được $x_{i_k-1}$,… Cho đến phương trình đầu tiên ta sẽ tìm được $x_{i_1}$.

* Nếu hệ ban đầu là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất thì cho $\left(x_j, j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}\right)$ lần lượt nhận các giá trị của các véc tơ trong một cơ sở của $K^{n-k}$ ( chẳng hạn $(1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)$ ) ta sẽ được một hệ nghiệm cơ sở.

**VÍ DỤ MINH HỌA**

**Ví dụ 1.** Giải hệ phương trình.

$$a) \begin{cases} x + 2y - 4z + 3t - u = 0 \\ x + 2y - 2z + 2t + u = 0 \\ 2x + 4y - 2z + 3t + 4u = 0. \end{cases}$$

**Lời giải**

Thực hiện thuật toán Gauss, ta được các hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y - 4z + 3t - u = 0 \\ 2z - t + 2u = 0 \\ 6z - 3t + 6u = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y - 4z + 3t - u = 0 \\ z - \frac{1}{2}t + u = 0. \end{cases}$$

Như vậy nghiệm tổng quát $z=\frac{1}{2}t-u$ , $x=-2y-t-3u$, trong đó $y$, $t$, $u$ là các biến tự do. Lần lượt cho $(y,\ t,\ u)$ nhận các giá trị $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ ta được hệ nghiệm cơ sở sau:

$$v_1=(-2,1,0,0,0),v_2=(-1,0,\frac{1}{2},1,0),v_3=(-3,0,-1,0,1).$$

$b)$ $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=4 \\ 2x_1+x_2-x_3=0 \\ -x_1+x_2+x_3=-1. \end{cases}$

**Lời giải**

Thực hiện thuật toán Gauss, ta được các hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=4 \\ 5x_2-3x_3=-8 \\ -x_2+2x_3=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1-2x_2+x_3=4 \\ 5x_2-3x_3=-8 \\ \frac{7}{5}x_3=\frac{7}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-1 \\ x_3=1. \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $x_1=1$ , $x_2=-1$ , $x_3=1$.

$c)$ $\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3+2x_4=2 \\ 3x_1-2x_2+7x_3+2x_4=1 \\ 5x_1-3x_2+7x_3+6x_4=5. \end{cases}$

**Lời giải**

Thực hiện thuật toán Gauss, ta được các hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3+2x_4=2 \\ -x_2+2x_3-2x_4=-4 \\ -x_2-6x_3+2x_4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3+2x_4=2 \\ -x_2+2x_3-2x_4=-4 \\ -8x_3+4x_4=4 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1=1+\frac{1}{2}x_2-2x_3-x_4 \\ x_2=4+2x_3-2x_4 \\ x_4=1+2x_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1=1-5x_3 \\ x_2=2-2x_3 \\ x_4=1+2x_3 \\ x_3 \text{ tùy ý} \end{cases}$$

Vậy $x_1 = 1 - 5x_3$ , $x_2 = 2 - 2x_3$ , $x_3 = x_3$ , $x_4 = 1 + 2x_3$.

## Kết luận chương 1

Trong chương 1 đã trình bày những cơ sở lý luận quan trọng về hệ phương trình tuyến tính, bao gồm khái niệm, cấu trúc nghiệm và các định lý nền tảng như Kronecker–Capelli, Cramer, cùng các phép biến đổi sơ cấp. Bên cạnh đó, chương cũng giới thiệu và minh họa các phương pháp giải cơ bản như phương pháp thế, cộng đại số, Cramer và khử Gauss. Những nội dung này tạo nền tảng lý thuyết vững chắc cho việc nghiên cứu, vận dụng và phát triển các bài toán hệ phương trình tuyến tính trong kỳ thi olympic toán học sinh viên và học sinh.

# CHƯƠNG 2: MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THƯỜNG GẶP TRONG KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN VÀ HỌC SINH

## 2.1. BÀI TOÁN GIẢI VÀ BIỆN LUẬN HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH.

### Dạng 1: Bài toán giải hệ phương trình tuyến tính.

Ở dạng bài này, mục đích chính là vận dụng các phương pháp đã trình bày để tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính bằng nhiều cách tiếp cận khác nhau. Để minh họa rõ hơn, phần dưới đây giới thiệu một số bài toán tiêu biểu, qua đó giúp người học củng cố kiến thức, rèn luyện kỹ năng giải hệ và hiểu sâu hơn về bản chất của từng phương pháp.

**Bài 1.** (*Kỷ yếu Olympic 2005*). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = \dfrac{a}{2004} \\ \qquad x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = \dfrac{a + x_1}{2005^2 - 1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad x_n = \dfrac{a + x_1 + \ldots + x_{n-1}}{2005^n - 1}. \end{cases}$$

**Lời giải**

Cộng thêm biểu thức $x_1 + x_2 + \ldots + x_{i-1}$ vào cả hai vế phương trình thứ $i$ $(i \geq 2)$ của hệ đã cho. Với $i = 2,3,\ldots,n$, ta có:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{i-1} + x_i + \ldots + x_n = \frac{a + x_1 + x_2 + \ldots + x_{i-1}}{2005^i - 1} + x_1 + x_2 + \ldots + x_{i-1}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2004} = \frac{a}{2005^i - 1} + \left(x_1 + x_2 + \ldots + x_{i-1}\right)\left(1 + \frac{1}{2005^i - 1}\right)$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + \ldots + x_{i-1} = \frac{a}{2005^i}\left(\frac{2005^i - 2005}{2004}\right).$$

Vậy, với $i = 2,3,\ldots,n$

$$x_i = \left(x_1 + x_2 + \ldots + x_i\right) - \left(x_1 + x_2 + \ldots + x_{i-1}\right)$$

$$= \frac{a}{2005^{i+1}}\left(\frac{2005^{i+1} - 2005}{2004}\right) - \frac{a}{2005^i}\left(\frac{2005^i - 2005}{2004}\right) = \frac{a}{2005^i}.$$

Lấy phương trình thứ nhất trừ đi phương trình thứ hai ta được $x_1 = \frac{a}{2005}$.

Vậy $x_i = \frac{a}{2005^i}\ (i = 1,2,\ldots,n-1);\ x_n = \frac{a}{2004.2005^{n-1}}$.

**Bài 2.** (*Kỷ yếu Olympic 2014*). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ldots + 2014x_{2014} = 1 \\ x_2 + 2x_3 + \ldots + 2014x_1 = 2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{2014} + 2x_1 + \ldots + 2014x_{2013} = 2014. \end{cases}$$

**Lời giải**

Gọi $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_{2014}$. Cộng vế trái của tất cả 2014 phương trình ta được:

$(1 + 2 + \ldots + 2014)(x_1 + x_2 + \ldots + x_{2014}) = \left(\frac{2014.2015}{2}\right)S$.

Vế phải là tổng $1 + 2 + \ldots + 2014 = \frac{2014.2015}{2}$.

Vậy $\left(\frac{2014.2015}{2}\right)S = \frac{2014.2015}{2} \Rightarrow S = x_1 + x_2 + \ldots + x_{2014} = 1.$

Trừ phương trình thứ $k$ cho phương trình thứ $k+1$ $(k < 2014)$, ta được:

$$(x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_{k+2013}) - 2014x_k = k - (k+1) = -1 \ (1)$$

Mà ta thấy $x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_{k+2013} = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2014}$.

Vậy $(1) \Leftrightarrow (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2014}) - 2014x_k = -1$

$$\Rightarrow (S - 2014x_k) = -1 \Rightarrow 1 - 2014x_k = -1 \Rightarrow x_k = \frac{2}{2014}\ (k < 2014).$$

$$\sum_{k<2014} x_k = 2013 \times \frac{2}{2014} = \frac{4026}{2014}$$

Và $x_{2014} = S - \sum_{k<2014} x_k = 1 - \frac{4026}{2014} = -\frac{2012}{2014}$.

**Bài 3.** (*Kỷ yếu Olympic 1999*). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n &= 1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \ldots + nx_1 &= 2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n + 2x_1 + 3x_2 + \ldots + nx_{n-1} &= n. \end{cases}$$

**Lời giải**

Gọi $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ . Cộng vế trái của tất cả n phương trình ta được: $(1 + 2 + \ldots + n)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \dfrac{n(n+1)}{2} S$ .

Vế phải là tổng $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ .

Vậy $\left( \dfrac{n(n+1)}{2} \right) S = \dfrac{n(n+1)}{2} \Rightarrow S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$ .

Trừ phương trình thứ $k$ cho phương trình thứ $k+1$ $(k < n)$, ta được:

$(x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_{k+n-1}) - nx_k = k - (k+1) = -1$. (1)

Mà ta thấy

.

Vậy (1) $\Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n - nx_k = -1$

$\Rightarrow 1 - nx_k = -1 \Rightarrow x_k = \dfrac{2}{n}$ $(k < n)$

$\sum_{k<n} x_k = (n-1) \times \dfrac{2}{n} = \dfrac{2(n-1)}{n}$ và $x_n = S - \sum_{k<n} x_k = 1 - \dfrac{2(n-1)}{n} = -\dfrac{n-2}{n}$ .

***Nhận xét:*** Bài 1 đến bài 3 là bài toán hệ phương trình tuyến tính đặc biệt, có cấu trúc gần đối xứng giữa các phương trình.

Phương pháp giải là cộng tổng $S = \sum x_i$ vào hai vế của các phương trình từ $i = 2$ trở đi để đưa vế trái về cùng đại lượng $S$ .Việc này giúp xác định được công thức tổng quát của $S$ theo chỉ số phương trình $i$ .

Cuối cùng, bằng cách trừ các phương trình liên tiếp, ta dễ dàng khử $S$ và tìm ra mối quan hệ đơn giản giữa các ẩn $i$ , từ đó suy ra nghiệm một cách ngắn gọn và hiệu quả.

**Bài 4.** (*Kỷ yếu Olympic 2014*). Cho các số thực $a_{ij}+a_{ji}=0$, với $i,j=1,2,\ldots,2014.$ Hãy giải hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} (a_{11}+2014)x_1+a_{12}x_2 & +\ldots+a_{1,2014}x_{2014} & =0 \\ a_{21}x_1 & +(a_{22}+2014)x_2+\ldots+a_{2,2014}x_{2014} & =0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{2014,1}x_1 & +a_{2014,2}x_2 & +\ldots+(a_{2014,2014}+2014)x_{2014}=0. \end{cases}$$

**Lời giải**

Đặt:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Hệ đã cho trở thành $(A+2014E)X=0$. Lấy chuyển vị hai vế ta được $X^t(A+2014X)^t=0$. Dẫn đến $X^t(-A+2014E)=0$, hay $-X^tA+2014X^tE=0.$ Từ đây suy ra $-X^tAX+2014X^tEX=0$.

Ta có $AX+2014X=0\Leftrightarrow AX=-2014X$. Kết hợp lại, ta được:

$$X^t(-2014X)+2014X^tX=0\Leftrightarrow X^tX+X^tX=0\Leftrightarrow X^tX=0.$$

Như vậy:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_{2014} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_{2014} \end{pmatrix}=0\Leftrightarrow x_1^2+\ldots+x_{2014}^2=0\Leftrightarrow x_1=\ldots=x_{2014}=0.$$

***Nhận xét:*** Bài 4 là bài toán hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với ma trận hệ số $(A+2014I)$, trong đó $A$ là ma trận với $a_{ij}=-a_{ji}$.

**Bài 5.** (*Kỷ yếu Olympic 2019*). Giải hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2x_{2018} - 3x_{2019} + x_{2020} = 1. \end{cases}$$

**Lời giải**

Nhận xét rằng hệ đã cho có 2018 phương trình và 2020 ẩn và hạng của ma trận các hệ số bằng 2018. Do đó số chiều của không gian nghiệm của hệ thuần nhất bằng 2. Hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2x_2 - x_3 \\ 2x_2 - x_3 = 2x_3 - x_4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2x_{2018} - x_{2019} = 2x_{2019} - x_{2020}. \end{cases}$$

Đặt $2x_1 - x_2 = u$. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_1 - u = 2(x_1 - u) + u \\ x_3 &= 2x_2 - u = 2^2(x_1 - u) + u \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{2020} &= 2^{2019}(x_1 - u) + u. \end{aligned}$$

Do đó hệ nghiệm cơ bản của hệ đã cho là $\left\{(1;\ 1;\ \ldots;1),\ \left(1;\ 2;\ 2^2;\ \ldots;\ 2^{2019}\right)\right\}$.

Nghiệm riêng của hệ đã cho là $(-2;\ -3;\ -4;\ \ldots;\ -2020;\ -2021)$.

Do đó nghiệm của hệ phương trình đã cho là $a(1;\ 1;\ \ldots;\ 1) + b\left(1;\ 2;\ 2^2;\ \ldots;\ 2^{2019}\right) + (-2;\ -3;\ -4;\ \ldots;\ -2020;\ -2021),\ \forall a,\ b \in \mathbb{R}$.

***Nhận xét:*** Bài 5 là bài toán hệ phương trình không thuần nhất với số ẩn lớn hơn số phương trình.

Phương pháp giải là biến đổi hệ về dạng thuần nhất tương đương để thấy rõ mối liên hệ lặp lại, sau đó đặt ẩn phụ $2x_i - x_{i+1} = u$ để đơn giản hóa mối quan hệ thành một công thức truy hồi tuyến tính. Cuối cùng, dựa trên lý thuyết Đại số Tuyến tính, nghiệm của hệ không thuần nhất được tìm bằng cách kết hợp nghiệm cơ sở (của hệ thuần nhất) và một nghiệm riêng (của hệ không thuần nhất), từ đó viết ra công thức nghiệm tổng quát.

**Bài 6.** (*Kỷ yếu Olympic 2014*). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2013 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2013 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2013 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 2013 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{2011} + x_{2012} + x_{2013} = 2013 \\ x_{2012} + x_{2013} + x_{2014} = 2013 \\ x_{2013} + x_{2014} + x_1 = 2013 \\ x_{2014} + x_1 + x_2 = 2013. \end{cases}$$

**Lời giải**

Bằng cách đặt $y_i = x_i - 671 \left(i = 1,2,\ldots,2014\right)$, hệ đã cho thành:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_2 + y_3 + y_4 = 0 \\ y_3 + y_4 + y_5 = 0 \\ y_4 + y_5 + y_6 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{2011} + y_{2012} + y_{2013} = 0 \\ y_{2012} + y_{2013} + y_{2014} = 0 \\ y_{2013} + y_{2014} + y_1 = 0 \\ y_{2014} + y_1 + y_2 = 0. \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất và thứ hai suy ra $y_1 = y_4$.

Từ phương trình thứ tư và thứ năm suy ra: $y_4 = y_7$.

Tiếp tục quá trình này cuối cùng ta được: $y_1 = y_4 = y_7 = \ldots = y_{2014}$.

Bằng lập luận tương tự, ta được: $y_2 = y_5 = y_8 = \ldots = y_{2012}$, $y_3 = y_6 = y_9 = \ldots = y_{2013}$

Từ hai phương trình cuối cùng ta thu được $y_2 = y_{2013}$.

Từ phương trình đầu tiên và phương trình cuối cùng ta thu được $y_3 = y_{2014}$.

Kết hợp các khẳng định trên suy ra $y_1 = y_2 = y_3 = \ldots = y_{2014}$.

Thay vào hệ ta được $y_1 = y_2 = y_3 = \ldots = y_{2014} = 0$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{2014} = 671$.

*Chú ý:* Ta có thể thay số 2014 bởi số tự nhiên $n$ bất kỳ.

**Bài 7.** (*Kỷ yếu Olympic 2016*). Giải hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-2} + 2x_{n-1} + 3x_n = 4 \\ x_{n-1} + 2x_n + 3x_1 = 4 \\ x_n + 2x_1 + 3x_2 = 4. \end{cases}$$

**Lời giải**

Lấy phương trình thứ $k+1$ trừ cho phương trình thứ $k$, $k = 1,2,\ldots,n-1$ và lấy phương trình đầu trừ phương trình cuối, ta được hệ phương trình hệ quả:

$$\begin{cases} (x_1 - x_n) + 2(x_2 - x_1) + 3(x_3 - x_2) = 0 \\ (x_2 - x_1) + 2(x_3 - x_2) + 3(x_4 - x_3) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_{n-1} - x_{n-2}) + 2(x_n - x_{n-1}) + 3(x_1 - x_n) = 0 \\ (x_n - x_{n-1}) + 2(x_1 - x_n) + 3(x_2 - x_1) = 0. \end{cases}$$

Đặt $y_1 = x_1 - x_n, y_2 = x_2 - x_1, y_3 = x_3 - x_2, \ldots, y_n = x_n - x_{n-1}$, ta được hệ:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 0 \\ y_2 + 2y_3 + 3y_4 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1} + 2y_n + 3y_1 = 0 \\ y_n + 2y_1 + 3y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + \alpha y_2 + (2-\alpha)(y_2 + \alpha y_3) = 0 \\ y_2 + \alpha y_3 + (2-\alpha)(y_3 + \alpha y_4) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1} + \alpha y_n + (2-\alpha)(y_n + \alpha y_1) = 0 \\ y_n + \alpha y_1 + (2-\alpha)(y_1 + \alpha y_2) = 0. \end{cases}$$

Trong đó $\alpha$ là số phức thỏa mãn $\alpha(2-\alpha) = 3 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 3 = 0.$

Đặt $y_1 + \alpha y_2 = z_1, y_2 + \alpha y_3 = z_2, \ldots, y_{n-1} + \alpha y_n = z_{n-1}, y_n + \alpha y_1 = z_n$, hệ phương trình hệ quả được viết lại thành:

$$\begin{cases} z_1 + (2-\alpha)z_2 = 0 \\ z_2 + (2-\alpha)z_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{n-1} + (2-\alpha)z_n = 0 \\ z_n + (2-\alpha)z_1 = 0. \end{cases}$$

Suy ra:

$$z_1 = (\alpha-2)z_2 = (\alpha-2)^2 z_3 = \ldots = (\alpha-2)^n z_1 \Rightarrow z_1 = 0.$$

Từ đó ta có $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$. Vậy

$$y_1 = -\alpha y_2 = \ldots = (-\alpha)^{n-1} y_n = (-\alpha)^n y_1 \Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow y_i = 0 \ \forall i = 1,2,\ldots,n.$$

Do đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{2}{3}.$$

***Nhận xét:*** Bài 6 và bài 7 các ví dụ điển hình về việc giải hệ phương trình tuyến tính có cấu trúc lặp.

Phương pháp giải hiệu quả là sử dụng phép trừ liên tiếp. Lấy phương trình thứ $k+1$ trừ phương trình thứ $k$. Thao tác này giúp loại bỏ hằng số và tìm ra một mối liên hệ truy hồi (ví dụ: $x_i = x_{i+3}$ ở bài 6, hoặc $x_i - x_{i-1} = 0$ ở bài 7 sau khi biến đổi).

**Bài 8.** (*Kỷ yếu Olympic 2014*). Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a_1 \\ x_2 + x_3 = 2a_2 \\ x_3 + x_4 = 2a_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} + x_n = 2a_{n-1} \\ x_n + x_1 = 2a_n. \end{cases}$$

a. Giải hệ phương trình với $n = 4,\ n = 5$.

b. Giải hệ phương trình với mọi $n \in \mathbb{N}$.

**Lời giải**

Ký hiệu $S$ là tập hợp nghiệm của hệ phương trình. Lần lượt tính các ẩn theo $x_1$, tách các trường hợp chỉ số chẵn, lẻ của ẩn.

a. Với $n=4$ hệ phương trình vô nghiệm, nếu $a_4-a_3+a_2-a_1\neq 0$.

Nếu $a_4-a_3+a_2-a_1=0$, thì hệ phương trình có vô số nghiệm. Không giảm tổng quát:

$$\begin{aligned}
&x_1\in\mathbb{R}\\
&x_2=2a_1-x_1\\
&x_3=2a_2-2a_1+x_1\\
&x_4=2a_3-2a_2+2a_1-x_1\\
&x_5=2a_4-2a_3+2a_2-2a_1+x_1.
\end{aligned}$$

Với $n=5$, ta có nghiệm của hệ là:

$$\begin{aligned}
&x_1=a_5-a_4+a_3-a_2+a_1\\
&x_2=-a_5+a_4-a_3+a_2-a_1\\
&x_3=a_5-a_4+a_3-a_2+a_1\\
&x_4=-a_5+a_4-a_3+a_2-a_1\\
&x_5=a_5-a_4+a_3-a_2+a_1.
\end{aligned}$$

b. Trường hợp tổng quát:

(1). Nếu $n$ chẵn, $n=2k,\ k\in\mathbb{N}^*$ thì:

$S=\varnothing$, nếu $a_{2k}-a_{2k-1}+\ldots+a_2-a_1\neq 0$;

$S=\left\{x_1,\ 2a_1-x_1,\ 2\left(a_2-a_1\right)+x_1,\ \ldots,\ 2\left(a_{2k-1}-a_{2k-2}+\ldots+a_1\right)-x_1\right\},\ x_1\in\mathbb{R},$ nếu $a_{2k}-a_{2k-1}+\ldots+a_2-a_1=0$.

(2). Nếu $n$ lẻ, $n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}^*$ thì:

$$\begin{aligned}
&x_1=a_{2k+1}-a_{2k}+\ldots+a_3-a_2+a_1\\
&x_{2i+1}=a_{2k+1}-a_{2k}+\ldots-a_{2i+2}+a_{2i+1}-a_{2i}+\ldots+a_3-a_2+a_1\\
&x_{2i}=-a_{2k+1}+a_{2k}-\ldots+a_{2i}-a_{2i-1}+a_{2i-2}-\ldots-a_3+a_2-a_1\\
&i\in\{1,2,\ldots,k\}.
\end{aligned}$$

**Bài 9.** (*Kỷ yếu Olympic 2019*). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ \dots \\ x_{n-1} + x_n = n-1 \\ x_n + x_1 = n. \end{cases}$$

**Lời giải**

TH1: $n$ chẵn.

Cộng vế theo vế các phương trình chẵn và phương trình lẻ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (n-1) \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 2 + 4 + 6 + \ldots + n \end{cases} \Rightarrow \text{Hệ vô nghiệm.}$$

TH2: $n$ lẻ: $n = 2k+1$.

Lấy phương trình thứ $(i+1)$ trừ đi phương trình thứ $i$, ta có:

$$\begin{cases} x_{2k+1} - x_{2k-1} = x_{2k-1} - x_{2k-3} = \ldots = x_3 - x_1 = 1 \\ x_{2k} - x_{2k-2} = x_{2k-2} - x_{2k-4} = \ldots = x_4 - x_2 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \{x_{2k}\}_k$ và $\{x_{2k+1}\}_k$ là cấp số cộng có công sai $d = 1$.

Từ phương trình (1) và $(n)$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_1 + k = 2k + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{k+1}{2} \Rightarrow x_{2i+1} = \dfrac{k+1}{2} + i, \qquad i = \overline{0,k}, \\ x_2 = \dfrac{1-k}{2} \Rightarrow x_{2j} = \dfrac{1-k}{2} + j - 1, \quad j = \overline{1,k}. \end{cases}$$

***Nhận xét:*** Bài 8 và bài 9 là hai bài toán hệ phương trình tuyến tính đặc biệt và cần phải phân tích trường hợp theo tính chẵn lẻ của số ẩn $n$.

Phương pháp giải là cộng hoặc trừ các phương trình liên tiếp để tìm ra mối liên hệ giữa các ẩn có cùng tính chẵn lẻ.

**Bài 10.** (*Kỷ yếu Olympic 2015*). Giải hệ phương trình sau trên $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} x + y + z & = 1 \\ xyz & = 1 \\ |x| = |y| = |z| & = 1. \end{cases}$$

**Lời giải**

Điều kiện $|x|=|y|=|z|=1$ suy ra $\overline{x}=\frac{1}{x},\ \overline{y}=\frac{1}{y}$ và $\overline{z}=\frac{1}{z}$.

Từ đó lấy liên hợp phương trình đầu ta được $\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}=\overline{x+y+z}=\overline{1}=1$.

Thay $\overline{x}=\frac{1}{x},\ \overline{y}=\frac{1}{y},\ \overline{z}=\frac{1}{z}$ ra $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\Rightarrow\frac{xy+yz+zx}{xyz}=1$.

$\Rightarrow xy+yz+zx=xyz=1$.

Vậy từ hai phương trình đầu và điều kiện mô-đun ta đã thu được hệ:

$$\begin{cases}x+y+z=1\\xy+yz+zx=1\\xyz=1.\end{cases}$$

Theo Định lý Viet, $x,y,z$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba: $t^3-S_1t^2+S_2t-S_3=0$.

Trong đó $S_1=x+y+z,\ S_2=xy+yz+zx,\ S_3=xyz$.

Từ hệ trên suy ra $S_1=1,\ S_2=1,\ S_3=1$.

Nên đa thức tương ứng là $t^3-t^2+t-1=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=\pm i.\end{array}\right.$

Phương trình này có ba nghiệm là 1 và $\pm i$ nên $x=1,y=i,z=-i$ và các hoán vị của chúng.

***Nhận xét:*** Bài 10 là một hệ phương trình với ba ẩn số phức $(x,y,z)$, đòi hỏi sự kết hợp giữa số phức và đa thức.

Phương pháp giải là sử dụng phép liên hợp phức và thay thế, từ đó suy ra phương trình thứ ba $(xy+yz+zx)=1$. Với ba phương trình, ta áp dụng định lý Vi-ét đảo để kết luận $x,y,z$ là nghiệm của một phương trình đa thức bậc ba dễ dàng giải được.

**Bài 11.** (*Kỷ yếu Olympic 2016*). Giải phương trình:

$$\begin{vmatrix}1 & x & x^3 & x^4\\1 & 13 & 13^3 & 13^4\\1 & 17 & 17^3 & 17^4\\1 & 19 & 19^3 & 19^4\end{vmatrix}=0.$$

**Lời giải**

Đặt $\begin{cases} a=13 \\ b=17 \\ c=19 \end{cases}$ ta có:

$$D_x=\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 & x^4 \\ 1 & a & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^3 & c^4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 & x^4 \\ 0 & a-x & a^3-x^3 & a^4-x^4 \\ 0 & b-x & b^3-x^3 & b^4-x^4 \\ 0 & c-x & c^3-x^3 & c^4-x^4 \end{vmatrix}$$

$$=(a-x)(b-x)(c-x)\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 & x^4 \\ 0 & 1 & a^2+ax+x^2 & a^3+a^2x+ax^2+x^3 \\ 0 & 1 & b^2+bx+x^2 & b^3+b^2x+bx^2+x^3 \\ 0 & 1 & c^2+cx+x^2 & c^3+c^2x+cx^2+x^3 \end{vmatrix}$$

$$=(a-x)(b-x)(c-x)\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 & x^4 \\ 0 & 1 & a^2+ax+x^2 & a^3+a^2x+ax^2+x^3 \\ 0 & 0 & b^2-a^2+(b-a)x & b^3-a^3+(b^2-a^2)x+(b-a)x^2 \\ 0 & 0 & c^2-a^2+(c-a)x & c^3-a^3+(c^2-a^2)x+(c-a)x^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a-x)(b-x)(c-x)(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 & x^4 \\ 0 & 1 & a^2+ax+x^2 & a^3+a^2x+ax^2+x^3 \\ 0 & 0 & b+a+x & b^2+ba+a^2+(b+a)x+x^2 \\ 0 & 0 & c+a+x & c^2+ca+a^2+(c+a)x+x^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a-x)(b-x)(c-x)(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 & x^4 \\ 0 & 1 & a^2+ax+x^2 & a^3+a^2x+ax^2+x^3 \\ 0 & 0 & b+a+x & b^2+ba+a^2+(b+a)x+x^2 \\ 0 & 0 & c-b & c^2-b^2+(c-b)a+(c-b)x \end{vmatrix}$$

$$=(a-x)(b-x)(c-x)(b-a)(c-a)(c-b)\begin{vmatrix}1 & x & x^3 & x^4\\ 0 & 1 & a^2+ax+x^2 & a^3+a^2x+ax^2+x^3\\ 0 & 0 & b+a+x & b^2+ba+a^2+(b+a)x+x^2\\ 0 & 0 & 1 & c+b+a+x\end{vmatrix}$$

$$=(a-x)(b-x)(c-x)(b-a)(c-a)(c-b)\left[(a+b+c)x+ab+bc+ca\right].$$

Suy ra nghiệm của $D_x=0$ là $\begin{bmatrix}x=a\\ x=b\\ x=c\\ x=-\dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=13\\ x=17\\ x=19\\ x=-\dfrac{791}{49}.\end{bmatrix}$

***Nhận xét:*** Bài 11 là một phương trình đại số có dạng định thức bằng không $\left(\det(D)=0\right)$.

Phương pháp giải là biến đổi sơ cấp ma trận thông qua phép trừ các hàng để xuất hiện các nhân tử $(13-x),(17-x),(19-x)$.Việc này giúp phân tích định thức và hạ bậc ma trận, từ đó tìm ra đa thức bậc nhất còn lại $P(x)=0$.Giải phương trình $P(x)=0$ sẽ xác định được nghiệm thứ tư.

**Bài 12.** (*Kỷ yếu Olympic 2014*). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}x_1+2x_2 \quad +\ldots+2014x_{2014} & =\dfrac{1}{2014}x_1\\ x_1+2^2x_2 \quad +\ldots+2014^2x_{2014} & =\dfrac{1}{2014}x_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x_1+2^{2014}x_2+\ldots+2014^{2014}x_{2014} & =\dfrac{1}{2014}x_{2014}.\end{cases}$$

**Lời giải**

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}(2014-1)x_1+2.2014x_2 & +\ldots+2014^2x_{2014} & =0\\ 2014x_1 & +(2^2.2014-1)x_2+\ldots+2014^3x_{2014} & =0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ 2014x_1 & +2^{2014}.2014x_2 & +\ldots+(2014^{2015}-1)x_{2014}=0.\end{cases}$$

Ta có:

$$\det\begin{bmatrix}2014-1 & 2.2014 & \ldots & 2014^2\\ 2014 & 2^2.2014-1 & \ldots & 2014^3\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 2014 & 2^{2014}.2014 & \ldots & 2014^{2015}-1\end{bmatrix}\overset{\text{mod }2}{\equiv}\det\begin{bmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{bmatrix}$$

$$=1\overset{\text{mod }2}{\equiv}1.$$

Suy ra:

$$\det\begin{bmatrix}2014-1 & 2.2014 & \ldots & 2014^2\\ 2014 & 2^2.2014-1 & \ldots & 2014^3\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 2014 & 2^{2014}.2014 & \ldots & 2014^{2015}-1\end{bmatrix}\neq 0.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm tầm thường $x_1=x_2=x_3=\ldots=x_{2014}=0.$

**Bài 13.** (*Kỷ yếu Olympic 2015*). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}x_1 & +2^2x_2 & +\ldots+2014^{2014}x_{2014} & =\dfrac{1}{14}x_1\\ 2x_1 & +3^2x_2 & +\ldots+2015^{2014}x_{2014} & =\dfrac{1}{14}x_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ 2014x_1 & +2015^2x_2 & +\ldots+4027^{2014}x_{2014} & =\dfrac{1}{14}x_{2014}.\end{cases}$$

**Lời giải**

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} (14-1)x_1 + 14.2^2 x_2 + \ldots + 14.2014^{2014} x_{2014} = 0 \\ 14.2x_1 + (14.3^2-1)x_2 + \ldots + 14.2015^{2014} x_{2014} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 14.2014x_1 + 14.2015^2 x_2 + \ldots + (14.4027^{2014}-1)x_{2014} = 0. \end{cases}$$

Ta có:

$$\det\begin{bmatrix} 14-1 & 14.2^2 & \ldots & 14.2014^{2014} \\ 14.2 & 14.3^2-1 & \ldots & 14.2015^{2014} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 14.2014 & 14.2015^2 & \ldots & 14.4027^{2014}-1 \end{bmatrix} \overset{\text{mod }2}{\equiv} \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \overset{\text{mod }2}{\equiv} 1.$$

Suy ra:

$$\det\begin{bmatrix} 14-1 & 14.2^2 & \ldots & 14.2014^{2014} \\ 14.2 & 14.3^2-1 & \ldots & 14.2015^{2014} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 14.2014 & 14.2015^2 & \ldots & 14.4027^{2014}-1 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm tầm thường $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{2014} = 0.$

**Bài 14.** (*Kỷ yếu Olympic 2016*). Cho $a_{ij}$ là các số nguyên $(i, j = 1, 2, \ldots n)$. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \dfrac{1}{2^2}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{1}{2^n}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{cases}$$

**Lời giải**

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}(2a_{11}-1)x_1+2a_{12}x_2+\ldots+2a_{1n}x_n=0\\ 2^2a_{21}x_1+(2^2a_{22}-1)x_2+\ldots+2^2a_{2n}x_n=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ 2^na_{n1}x_1+2^na_{n2}x_2+\ldots+(2^na_{nn}-1)x_n=0.\end{cases}$$

Ta có:

$$\det\begin{bmatrix}2a_{11}-1 & 2a_{12} & \ldots & 2a_{1n}\\ 2^2a_{21} & 2^2a_{22}-1 & \ldots & 2^2a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 2^na_{n1} & 2^na_{n2} & \ldots & 2^na_{nn}-1\end{bmatrix}\overset{\bmod 2}{\equiv}\det\begin{bmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{bmatrix}$$

$$=1\overset{\bmod 2016}{\equiv}1.$$

Suy ra:

$$\det\begin{bmatrix}2a_{11}-1 & 2a_{12} & \ldots & 2a_{1n}\\ 2^2a_{21} & 2^2a_{22}-1 & \ldots & 2^2a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 2^na_{n1} & 2^na_{n2} & \ldots & 2^na_{nn}-1\end{bmatrix}\neq 0.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm tầm thường $x_1=x_2=x_3=\ldots=x_n=0.$

**Bài 15.** (*Kỷ yếu Olympic 2016*). Cho các số nguyên $a_{ij}$, $(i, j=1, 2, \ldots n)$. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=\dfrac{1}{2016}x_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=\dfrac{1}{2016}x_2\\ \ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=\dfrac{1}{2016}x_n.\end{cases}$$

**Lời giải**

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} (2016a_{11}-1)x_1 + 2016a_{12}x_2 + \ldots + 2016a_{1n}x_n = 0 \\ 2016a_{21}x_1 + (2016a_{22}-1)x_2 + \ldots + 2016a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2016a_{n1}x_1 + 2016a_{n2}x_2 + \ldots + (2016a_{nn}-1)x_n = 0. \end{cases}$$

Ta có:

$$\det\begin{bmatrix} 2016a_{11}-1 & 2016a_{12} & \ldots & 2016a_{1n} \\ 2016a_{21} & 2016a_{22}-1 & \ldots & 2016a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2016a_{n1} & 2016a_{n2} & \ldots & 2016a_{nn}-1 \end{bmatrix} \overset{\text{mod } 2016}{\equiv} \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \overset{\text{mod } 2016}{\equiv} 1.$$

Suy ra:

$$\det\begin{bmatrix} 2016a_{11}-1 & 2016a_{12} & \ldots & 2016a_{1n} \\ 2016a_{21} & 2016a_{22}-1 & \ldots & 2016a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2016a_{n1} & 2016a_{n2} & \ldots & 2016a_{nn}-1 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm tầm thường $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$.

**Bài 16.** (*Kỷ yếu Olympic 2017*). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \frac{1}{2}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{2}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

trong đó $a_{ij}$ các số nguyên.

**Lời giải**

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} (2a_{11}-1)x_1 + 2a_{12}x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_n = 0 \\ 2a_{21}x_1 + (2a_{22}-1)x_2 + \ldots + 2a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2a_{n1}x_1 + 2a_{n2}x_2 + \ldots + (2a_{nn}-1)x_n = 0. \end{cases}$$

Ta có:

$$\det\begin{bmatrix} 2a_{11}-1 & 2a_{12} & \ldots & 2a_{1n} \\ 2a_{21} & 2a_{22}-1 & \ldots & 2a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2a_{n1} & 20162016 & \ldots & 2a_{nn}-1 \end{bmatrix} \overset{\text{mod } 2}{\equiv} \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \overset{\text{mod } 2}{\equiv} 1.$$

Suy ra:

$$\det\begin{bmatrix} 2a_{11}-1 & 2a_{12} & \ldots & 2a_{1n} \\ 2a_{21} & 2a_{22}-1 & \ldots & 2a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2a_{n1} & 20162016 & \ldots & 2a_{nn}-1 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm tầm thường $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0.$

**Bài 17.** (*Kỷ yếu Olympic 2018*). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 20172017x + 20172017y + 20182018z + 20172017t = 0 \\ 20172017x + 20162016y + 20192019z + 20162016t = 0 \\ 20192019x + 20152015y + 20182018z + 20172017t = 0 \\ 20202020x + 20162016y + 20202020z + 20192019t = 0. \end{cases}$$

**Lời giải**

Ta có:

$$\det\begin{bmatrix} 20172017 & 20172017 & 20182018 & 20172017 \\ 20172017 & 20162016 & 20192019 & 20162016 \\ 20192019 & 20152015 & 20182018 & 20172017 \\ 20202020 & 20162016 & 20202020 & 20192019 \end{bmatrix} \overset{\text{mod } 5}{\equiv} \det\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= 46 \overset{\text{mod } 5}{\equiv} 1.$$

Suy ra:

$$\det\begin{bmatrix} 20172017 & 20172017 & 20182018 & 20172017 \\ 20172017 & 20162016 & 20192019 & 20162016 \\ 20192019 & 20152015 & 20182018 & 20172017 \\ 20202020 & 20162016 & 20202020 & 20192019 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm tầm thường $x = y = z = t = 0$.

***Nhận xét:*** Bài 12 đến bài 17 là các bài toán hệ phương trình có nhiều ẩn và hệ số theo quy luật.

Cách giải chung là đưa hệ về dạng ma trận rồi xét định thức để biết hệ có nghiệm hay không. Việc dùng mô đun giúp tính toán nhanh và dễ chứng minh định thức khác 0. Khi định thức khác 0, hệ chỉ có nghiệm duy nhất là nghiệm tầm thường.

Dạng bài này thường nhận ra nhờ các hệ số có quy luật lặp lại hoặc tăng dần theo chỉ số.

**Bài 18.** (*Kỷ yếu Olympic 2009*). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + 2x_6 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 = 1. \end{cases}$$

**Lời giải**

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 1 \ (1) \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 1 \ (2) \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 1 \ (3) \\ -2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 1 \ (4) \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + 2x_6 = 1 \ (5) \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 = 1. \ (6) \end{cases}$$

Lấy phương trình (1) trừ phương trình (2): $3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$ suy ra $3x_1 - x_2 = 3x_3 - x_4$. (A)

Lấy phương trình (3) trừ phương trình (4): $3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$ suy ra $3x_1 - x_2 = x_4 - 3x_3$. (B)

Từ (A) và (B) có $3x_3 - x_4 = x_4 - 3x_3$. Vậy $3x_1 - x_2 = 0$ (*)

Lấy phương trình (1) trừ phương trình (3): $x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$ suy ra $x_1 + 3x_2 = 3x_3 - x_4$. (C)

Lấy phương trình (2) trừ phương trình (4): $x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$ suy ra $x_1 + 3x_2 = x_4 - 3x_3$. (D)

Từ (C) và (D) có $3x_3 - x_4 = x_4 - 3x_3 \Rightarrow x_4 = 3x_3$. Vậy $x_1 + 3x_2 = 0$. (**)

Từ (*) và (**) suy ra $x_1 = x_2 = 0$.

Chúng ta đã thấy: $x_4 = 3x_3$.

Thay vào các phương trình (1), (5) và (6) để tìm $x_3$, $x_5$, $x_6$.

$$\begin{cases} -2x_3 + x_5 + 2x_6 = 1 \\ -2x_3 + 2x_5 + x_6 = 1 \\ 5x_3 + x_5 - x_6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_5 = \dfrac{1}{3} \\ x_6 = 1 \end{cases}$$

Khi đó $x_4 = 3x_3 = 1$.

**Bài 19.** (*Kỷ yếu Olympic 2019*). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 6 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 7 \\ 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 - 5x_5 = 8. \end{cases}$$

**Lời giải**

Ta có:

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & -2 & 6 \\ 4 & 2 & -2 & 3 & 4 & 7 \\ 5 & 4 & 4 & 6 & -5 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_4\to d_4-4d_1\\ d_5\to d_5-5d_1}]{\substack{d_2\to d_2-2d_1\\ d_3\to d_3-3d_1}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 9 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -5 & 11 & -2 & -8 & -3 \\ 0 & -6 & 10 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & -6 & 19 & 1 & -15 & -7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_4\to d_4+6.(-1)d_2\\ d_5\to d_5+6.(-1)d_2}]{\substack{d_2\to(-1)d_2\\ d_3\to d_3+5.(-1)d_2}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -9 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -34 & -2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -44 & -1 & 14 & 1 \\ 0 & 0 & -35 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_4\to 34d_4-44.(-1)d_3\\ d_5\to 34d_5-35.(-1)d_3}]{d_3\to(-1)d_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -9 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 34 & 2 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -122 & 784 & 122 \\ 0 & 0 & 0 & -36 & 347 & 36 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_5\to 122d_5-36d_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -9 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 34 & 2 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -122 & 784 & 122 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14110 & 0 \end{array}\right).$$

Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+x_4+2x_5=3 \\ x_2-9x_3+3x_5=1 \\ 34x_3+2x_4-7x_5=-2 \\ -122x_4+784x_5=122 \\ 14100x_5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=1 \\ x_3=0 \\ x_4=-1 \\ x_5=0. \end{cases}$$

Do đó nghiệm của hệ phương trình đã cho là $x_1=2, x_2=1, x_3=0, x_4=-1, x_5=0.$

***Nhận xét:*** Bài 18 và bài 19 là các bài toán giải hệ phương trình tuyến tính có nhiều ẩn số.

Phương pháp giải chủ yếu là biến đổi hệ về dạng đơn giản hơn, sử dụng phương pháp Gauss để đưa ma trận về dạng bậc thang, sử dụng phương pháp cộng, trừ đại số và thế để tận dụng các mối quan hệ đặc biệt giữa các phương trình.

Cần chú ý quan sát quy luật giữa các hệ số và mối quan hệ giữa các ẩn nhằm rút gọn hệ và tìm nghiệm nhanh, chính xác.

**BÀI TẬP LUYỆN TẬP**

**Bài 1.** Giải hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} x_1 = 2\left(4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4\right) \\ x_2 = 3\left(x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4\right) \\ x_3 = 4\left(2x_1 + 1x_2 + 4x_3 + 3x_4\right) \\ x_4 = 5\left(3x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 4x_4\right). \end{cases}$$

**Bài 2.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + \ldots + 2x_n = 2^2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + \ldots + 3x_n = 3^2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + \ldots + 4x_n = 4^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + \ldots + nx_n = n^2. \end{cases}$$

**Bài 3.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n = 1 \\ x_1 + 2^2x_2 + 2^2x_3 + 2^2x_4 + \ldots + 2^2x_n = 2^4 \\ x_1 + 2^2x_2 + 3^2x_3 + 3^2x_4 + \ldots + 3^2x_n = 3^4 \\ x_1 + 2^2x_2 + 3^2x_3 + 4^2x_4 + \ldots + 4^2x_n = 4^4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + 2^2x_2 + 3^2x_3 + 4^2x_4 + \ldots + n^2x_n = n^4. \end{cases}$$

**Bài 4.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 + \ldots + \quad x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + \ldots + 2^{n-1}x_n = 1 \\ x_1 + 3x_2 + \ldots + 3^{n-1}x_n = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + nx_2 + \ldots + n^{n-1}x_n = 1. \end{cases}$$

**Bài 5.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x + \ y - 2z + \ t - \ u = 1 \\ 2x - \ y + 7z - 3t + 5u = 2 \\ \ x + 3y - 2z + 5t - 7u = 3 \\ 3x - 2y + 7z - 5t + 8u = 3. \end{cases}$$

**Bài 6.** Giải hệ phương trình thuần nhất sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_8 + x_9 + x_{10} = 0 \\ x_9 + x_{10} + x_1 = 0 \\ x_{10} + x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

**Bài 7.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \dfrac{1}{3}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{1}{3}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{cases}$$

Trong đó $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ với mọi $i, j = 1, 2, \ldots, n.$

**Bài 8.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ldots + 2013x_{2013} = \dfrac{2012}{2013}x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 + \ldots + 2014x_{2013} = \dfrac{2012}{2013}x_2 \\ \ldots \\ 2013x_1 + 2014x_2 + \ldots + 4025x_{2013} = \dfrac{2012}{2013}x_{2013}. \end{cases}$$

**Bài 9.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$$

**Dạng 2. Bài toán giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính chứa tham số**

Ở dạng bài này, mục đích là vận dụng các kiến thức và phương pháp đã học để giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính có chứa tham số. Thông qua việc phân tích các điều kiện của tham số, người học có thể xác định được số nghiệm, bản chất của nghiệm cũng như các trường hợp đặc biệt của hệ. Dưới đây là một số bài toán minh họa tiêu biểu giúp làm rõ cách biện luận và tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính chứa tham số.

**Bài 1.** (*Kỷ yếu Olympic 1995*). Cho các số $a_{ij}\left(i, j = 1,2,\ldots,n\right)$ thoả mãn các điều kiện:

$$a_{ij} + a_{ji} = 0, \left(\forall i, j = 1,2,\ldots,n\right); n \text{ lẻ}$$

Chứng minh rằng hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

có nghiệm không tầm thường.

**Lời giải**

Đặt $A = \left(a_{ij}\right)$. Dễ thấy $A^T = -A.$ Như vậy thì

$$|A| = |A^T| = |-A| = (-1)^n |A| = -|A|.$$

Do đó $|A| = 0$. Từ đó suy ra hệ phương trình đã cho có nghiệm không tầm thường.

***Nhận xét:*** Ma trận $A = (a_{ij})$ thỏa $a_{ij} + a_{ji} = 0$ nghĩa là $a_{ij} = -a_{ji}$ với mọi $i, j$. Vậy $A$ là ma trận phản đối xứng: $A^T = -A$. Từ đó suy ra định thức bằng 0 khi $n$ lẻ, nên hệ $Ax = 0$ có nghiệm không tầm thường.

**Bài 2.** (*Kỷ yếu Olympic 1996*). Chứng minh rằng nếu $a \neq 0$ thì hệ:

$$\begin{cases} ax + (1-b)y + cz + (1-d)t = a \\ (b-1)x + ay + (d-1)z + ct = b \\ -cx + (1-d)y + az + (b-1)t = c \\ (d-1)x - cy + (1-b)z + at = d. \end{cases}$$

Luôn luôn có nghiệm $\forall b, c, d \in \mathbb{R}$.

**Lời giải**

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{pmatrix} a & 1-b & c & 1-d \\ b-1 & a & d-1 & c \\ -c & 1-d & a & b-1 \\ d-1 & -c & 1-b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-b & c & 1-d \\ b-1 & a & d-1 & c \\ -c & 1-d & a & b-1 \\ d-1 & -c & 1-b & a \end{pmatrix}; A^t = \begin{pmatrix} a & b-1 & -c & d-1 \\ 1-b & a & 1-d & -c \\ c & d-1 & a & 1-b \\ 1-d & c & b-1 & a \end{pmatrix}.$$

Suy ra:

$$A^t.A = \begin{pmatrix} a & 1-b & c & 1-d \\ b-1 & a & d-1 & c \\ -c & 1-d & a & b-1 \\ d-1 & -c & 1-b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b-1 & -c & d-1 \\ 1-b & a & 1-d & -c \\ c & d-1 & a & 1-b \\ 1-d & c & b-1 & a \end{pmatrix}.$$

Đặt $a^2 + (1-b)^2 + c^2 + (1-d)^2 = \beta$, suy ra:

$$A^t.A=\begin{pmatrix}\beta & 0 & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & 0 & \beta\end{pmatrix}.$$

Ta có $\left|A^tA\right|=\left|A^t\right|.\left|A\right|=\left|A^2\right|=\beta^4$.

Vì $a\neq 0$ nên $\left|A\right|=\beta^2=\left[a^2+\left(1-b\right)^2+c^2+\left(1-d\right)^2\right]^2>0,\forall b,c,d$.

Suy ra hệ luôn có nghiệm với mọi $b,c,d\in\mathbb{R}$.

***Nhận xét:***

Đưa hệ về dạng ma trận $Ax=b$, rồi tính $A^TA$ và thu được $A^TA=\beta I$ với $\beta=a^2+\left(1-b\right)^2+c^2+\left(1-d\right)^2$.

Từ đó suy ra $\left|A^tA\right|=\left|A^2\right|=\beta^4$ và $\left|A\right|=\beta^2$.

**Bài 3.** (*Kỷ yếu Olympic 2013*). Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases}x_5+x_2=mx_1\\ x_1+x_3=mx_2\\ x_2+x_4=mx_3\\ x_3+x_5=mx_4\\ x_4+x_1=mx_5.\end{cases}$$

trong đó $m$ là tham số.

**Lời giải**

Ma trận bổ sung của hệ:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c}-m & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -m & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -m & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -m & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & -m & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{h_3\to h_2\\ h_4\to h_3\\ h_5\to h_4\\ h_1\to h_5}]{h_2\to h_1}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -m & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -m & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -m & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & -m & 0\\ -m & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[h_5+mh_1\to h_5]{h_4-h_1\to h_4}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -m & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -m & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -m & 1 & 0\\ 0 & m & -1 & 1 & -m & 0\\ 0 & 1-m^2 & m & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[h_5-\left(1-m^2\right)h_2\to h_5]{h_4-mh_2\to h_4}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -m & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -m & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -m & 1 & 0\\ 0 & 0 & m^2-1 & -m+1 & -m & 0\\ 0 & 0 & -m^3+2m & m^2-1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[h_5-\left(-m^3+2m\right)h_3\to h_5]{h_4-\left(m^2-1\right)h_3\to h_4}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -m & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -m & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -m & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & m^3-2m+1 & -m^2-m+1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -m^4+3m^2-1 & m^3-2m+1 & 0 \end{array}\right).$$

Với $m^3-2m+1\neq 0$ thì $m\neq 1;\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Khi đó:

$$\xrightarrow{h_5-\left(\frac{-m^2+m+1}{m-1}\right)h_4\to h_5}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -m & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -m & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -m & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & m^3-2m+1 & -m^2-m+1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{-m^3+m^2+3m-2}{m-1} & 0 \end{array}\right).$$

TH1: Nếu $m=2$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm:

$$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5 \text{ với } x_5\in\mathbb{R}.$$

TH2: Nếu $m \neq 2$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0.$$

Với $m^3 - 2m + 1 = 0$ thì $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ m = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$. Khi đó:

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -m & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m^2 - m + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m^4 + 3m^2 - 1 & m^3 - 2m + 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_5 \leftrightarrow h_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -m & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m^4 + 3m^2 - 1 & m^3 - 2m + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m^2 - m + 1 & 0 \end{array}\right).$$

TH1: Nếu $m = 1$ thì hệ phương trình tương đương với:

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 - x_2 + x_3 = 0 & \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 & \\ x_3 - x_4 + x_5 = 0 & \rightarrow \\ x_4 = 0 & \\ -x_5 = 0 & \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0. \end{array}\right.$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0.$$

TH2: Nếu $m^2+m-1=0$ thì $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ m=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$. Khi đó:

$$\to\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -m & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Hệ phương trình tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x_1-mx_2+x_3=0 \\ x_2-mx_3+x_4=0 \\ x_3-mx_4+x_5=0. \end{cases}$$

Thì hệ phương trình có vô số nghiệm:

$$\begin{cases} x_1=\left(m^3-2m\right)x_4-\left(m^2-1\right)x_5 \\ x_2=\left(m^2-1\right)x_4-mx_5 \\ x_3=mx_4-x_5 \\ x_4,x_5\in\mathbb{R}. \end{cases} \quad \text{với} \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ m=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

**Bài 4.** (*Kỷ yếu Olympic 2014*). Tìm $a$ để hệ có nghiệm tầm thường:

$$\begin{cases} ax_1+x_2+\cdots+x_{2015}+x_{2016}=0 \\ x_1+ax_2+\cdots+x_{2015}+x_{2016}=0 \\ \cdots \\ x_1+x_2+\cdots+ax_{2015}+x_{2016}=0 \\ x_1+x_2+\cdots+x_{2015}+ax_{2016}=0. \end{cases}$$

**Lời giải**

Ma trận bổ sung của hệ:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c} a & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a & 0 \end{array}\right).$$

Cộng tất cả các hàng vào hàng 1 ta được:

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c} a+2015 & a+2015 & \cdots & a+2015 & a+2015 & 0 \\ 1 & a & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_1\leftrightarrow h_{2016}}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & \cdots & 1 & a & 0 \\ 1 & a & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & a & 1 & 0 \\ a+2015 & a+2015 & \cdots & a+2015 & a+2015 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[h_{2016}-(a+2015)h_1\rightarrow h_{2016}]{h_i-h_1\rightarrow h_i\,(i=1\rightarrow 2025)}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & \cdots & 1 & a & 0 \\ 0 & a-1 & \cdots & 0 & 1-a & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (a+2015)(1-a) & 0 \end{array}\right).$$

Hệ có nghiệm tầm thường khi: $\begin{cases} a\neq -2015 \\ a\neq 1. \end{cases}$

**Bài 5.** (*Kỷ yếu Olympic 2017*). Giải và biện luận hệ phương trình biến số thực theo tham số:

$$\begin{cases} x+ & y+(1-m)z=2+m \\ (1+m)x- & y+ \quad 2z=0 \\ 2x+my+ & \quad 3z=2+m. \end{cases}$$

**Lời giải**

Ma trận bổ sung của hệ:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1-m & 2+m \\ 1+m & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -m & 3 & 2+m \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[h_3-2h_1\to h_3]{h_2-(1+m)h_1\to h_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1-m & 2+m \\ 0 & -2-m & 1+m^2 & -m^2-3m-2 \\ 0 & -m-2 & 1+2m & -2-m \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_3-h2\to h_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1-m & 2+m \\ 0 & -(2+m) & 1+m^2 & -m^2-3m-2 \\ 0 & 0 & m(2-m) & m(m+2) \end{array}\right).$$

TH1: Nếu $m=0$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm:

$$x=\frac{-3}{2}z+1, y=\frac{1}{2}z+1 \text{ với } z\in\mathbb{R}.$$

TH2: Nếu $m=2$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

TH3: Nếu $m=-2$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm:

$$y=-x, z=0 \text{ với } x\in\mathbb{R}.$$

TH4: Nếu $m\neq 0;2;-2$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

$$x=\frac{1}{m-2}, y=\frac{m+3}{2-m}, z=\frac{m+2}{2-m}.$$

**Bài 6.** (*Kỷ yếu Olympic 2002*). Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_{2001}+bx_{2002}=1 \\ bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_{2001}+bx_{2002}=2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_{2001}+bx_{2002}=2001 \\ bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_{2001}+ax_{2002}=2002. \end{cases}$$

Tìm điều kiện của $a,b$ để hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

**Lời giải**

Ký hiệu $D$ là định thức của hệ phương trình:

$$D=\begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}_{2002\times 2002}$$

(Cộng tất cả các cột với cột đầu tiên)

$$=\left(a+2001b\right)\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & b & b \\ 1 & a & \dots & b & b \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 1 & b & \dots & a & b \\ 1 & b & \dots & b & a \end{vmatrix}_{2002\times 2002}$$

(nhân hàng đầu với $-1$ rồi cộng vào các hàng còn lại)

$$=\left(a+2001b\right)\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & b & b \\ 0 & a-b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a-b & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix}_{2002\times 2002}$$

$$=\left(a+2001b\right)\left(a-b\right)^{2001}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $a\neq b$ và $a\neq -2001b$.

**Bài 7.** (*Kỷ yếu Olympic 2022*). Giải và biện luận hệ phương trình sau theo $m$.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4=1 \\ 2x_1+4x_2-7x_3+9x_4=2 \\ 5x_1+10x_2-17x_3+23x_4=1 \\ 3x_1+6x_2-10x_3+mx_4=13-m. \end{cases}$$

**Lời giải**

Ma trận bổ sung của hệ:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-3&4&1\\2&4&-7&9&2\\5&10&-17&23&1\\3&6&-10&m&13-m\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{h_3-5h_1\to h_3\\ h_4-3h_1\to h_4}]{h_2-2h_1\to h_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-3&4&1\\0&0&-1&1&0\\0&0&-2&3&-4\\0&0&-1&m-12&10-m\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_4-(m-13)h_3\to h_4}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-3&4&1\\0&0&-1&1&0\\0&0&0&1&-4\\0&0&0&0&3m-42\end{array}\right).$$

Do đó nếu $m\neq 14$ thì hệ vô nghiệm.

Nếu $m=14$ thì hệ có vô số nghiệm:

$$x_1=5-2c, x_2=c, x_3=-4; x_4=-4, \text{ với } c \text{ là hằng số.}$$

**Bài 8.** Giải và biện luận hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_1+ax_2+x_3+x_4=0\\x_1+x_2+ax_3+x_4=0\\x_1+x_2+x_3+ax_4=0.\end{cases}$$

**Lời giải**

Ma trận bổ sung của hệ:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}a&1&1&1&0\\1&a&1&1&0\\1&1&a&1&0\\1&1&1&a&0\end{array}\right).$$

Cộng tất cả các hàng vào hàng 1 ta được:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a+3 & a+3 & a+3 & a+3 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & a & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_1\leftrightarrow h_3}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 & 0 \\ a+3 & a+3 & a+3 & a+3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{h_3-h_1\to h_3\\ h_4-(a+3)h_1\to h_4}]{h_2-h_1\to h_2}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a+3)(1-a) & 0 \end{array}\right).$$

TH1: Nếu $m=1$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm:

$$x_1=-x_2-x_3-x_4 \text{ với } x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}.$$

TH2: Nếu $m=-3$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm:

$$x_1=-\frac{a^2-3a+2}{a-1}x_4, x_2=\frac{1-a}{a-1}x_4, x_3=\frac{1-a}{a-1}x_4 \text{ với } x_4\in\mathbb{R}.$$

TH3: Nếu $m\neq 1,-3$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

$$x_1=x_2=x_3=x_4=0.$$

**Bài 9.** Giải và biện luận hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \quad\quad +2x_4+x_5=1 \\ 2x_1+4x_2+\ x_3+3x_4 \quad\quad =3 \\ 3x_1+6x_2+2x_3+3x_4+x_5=m \\ x_1+2x_2+\ x_3 \quad\quad +x_5=2m-8. \end{cases}$$

**Lời giải**

Ma trận bổ sung của hệ:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&0&2&1&1\\2&4&1&3&0&3\\3&6&2&3&1&m\\1&2&1&0&1&2m-8\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[h_4-h_1\to h_4]{\substack{h_2-2h_1\to h_2\\h_3-3h_1\to h3}}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&0&2&1&1\\0&0&1&-1&-2&1\\0&0&2&-3&-2&m-3\\0&0&1&-2&0&2m-9\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[h_4-h_2\to h_4]{h_3-2h_2\to h3}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&0&2&1&1\\0&0&1&-1&-2&1\\0&0&0&-1&2&m-5\\0&0&0&-1&2&2(m-5)\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_4-h_3\to h_4}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&0&2&1&1\\0&0&1&-1&-2&1\\0&0&0&-1&2&m-5\\0&0&0&0&0&m-5\end{array}\right).$$

TH1: Nếu $m=5$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm:

$$x_1=1-2x_2-5x_5, x_3=1+4x_5, x_4=2x_5 \text{ với } x_2,x_5\in\mathbb{R}.$$

TH2: Nếu $m\neq 5$ thì hệ phương trình vô số nghiệm.

**Bài 10.** Giải và biện luận hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+mx_4=1\\x_1+x_2+mx_3+x_4=1\\x_1+mx_2+x_3+x_4=1\\mx_1+x_2+x_3+x_4=1.\end{cases}$$

**Lời giải**

Ma trận bổ sung của hệ:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Cộng các hàng vào hàng 4 ta được:

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 & 1 \\ m+3 & m+3 & m+3 & m+3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{h_3-h_1\to h_3\\ h_4-(m+3)h_1\to h_4}]{h_2-h_1\to h_2}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (m+3)(1-m) & 1-m \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_2\leftrightarrow h_3}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (m+3)(1-m) & 1-m \end{array}\right).$$

TH1: Nếu $m=1$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm:

$$x_1=1-x_2-x_3-x_4, \text{với } x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}.$$

TH2: Nếu $m=-3$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

TH3: Nếu $m\neq 1;-3$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

$$x_1=x_2=x_3=x_4=\frac{1}{m+3}.$$

**Bài 11.** Giải và biện luận hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=2 \\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4=m \\ 4x_1+8x_2-4x_3+16x_4=m+1. \end{cases}$$

**Lời giải**

Ma trận bổ sung của hệ:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}2&1&1&1&1\\1&2&-1&4&2\\1&7&-4&11&m\\4&8&-4&16&m+1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_1\leftrightarrow h_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&4&2\\2&1&1&1&1\\1&7&-4&11&m\\4&8&-4&16&m+1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{h_3-h_1\to h_3\\ h_4-4h_1\to h_4}]{h_2-2h_1\to h_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&4&2\\0&-3&3&-7&-3\\0&5&-3&7&m-2\\0&0&0&0&m-7\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_3+\frac{5}{3}h_2\to h_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&4&2\\0&-3&3&-7&-3\\0&0&2&-14/3&m-7\\0&0&0&0&m-7\end{array}\right).$$

TH1: Nếu $m=7$ thì phương trình có vô số nghiệm:

$$x_1=\frac{-5}{3}x_4, x_2=1, x_3=\frac{7}{3}x_4 \text{ với } x_4\in\mathbb{R}.$$

TH2: Nếu $m\neq 7$ thì phương trình vô nghiệm.

**Bài 12.** Giải và biện luận hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}mx_1+x_2+x_3+x_4=1\\x_1+mx_2+x_3+x_4=1\\x_1+x_2+mx_3+x_4=1.\end{cases}$$

**Lời giải**

Ma trận bổ sung của hệ:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} m & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Cộng các hàng vào hàng 1 ta được:

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c} m+2 & m+2 & m+2 & 3 & 3 \\ 1 & m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_1\leftrightarrow h_3}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 & 1 \\ m+2 & m+2 & m+2 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[h_3-(m+2)h_1\to h_3]{h_2-h_1\to h_2}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (m+2)(1-m) & 1-m & 1-m \end{array}\right).$$

Hệ đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x_1+ & x_2+ & mx_3+ & x_4=1 \\ & (m-1)x_2- & (m-1)x_3 & =0 \\ & & (m+2)(1-m)x_3+(1-m)x_4=1-m & \end{cases}$$

$$\to\begin{cases} x_1+x_2+mx_3+x_4=1 \\ (m-1)(x_2+x_3)=0 \\ (1-m)\left[(m+2)x_3+x_4\right]=1-m. \end{cases}$$

TH1: Nếu $m=1$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm:

$$x_1=1-x_2-x_3-x_4, \text{với } x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}.$$

TH2: Nếu $m\neq 1$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm:

$$x_1=1-(2m+3)x_3, x_2=x_3, x_4=(m+2)x_3 \text{ với } x_3\in\mathbb{R}.$$

**Bài 13.** Giải và biện luận hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} mx_1+2x_2- & x_3=3 \\ x_1+mx_2+2x_3=4 & \\ 2x_1+3x_2+ & x_3=m. \end{cases}$$

**Lời giải**

Ma trận bổ sung của hệ:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 & -1 & 3 \\ 1 & m & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & m \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_1\leftrightarrow h_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 2 & 4 \\ m & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & m \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_2\leftrightarrow h_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & m \\ m & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[h_3-mh_1\to h_3]{h_2-2h_1\to h_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 2 & 4 \\ 0 & 3-2m & -3 & m-8 \\ 0 & 2-m^2 & -1-2m & 3-4m \end{array}\right).$$

Với $3-2m=0$ thì $m=\dfrac{3}{2}$. Khi đó:

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & m-8 \\ 0 & 2-m^2 & -1-2m & 3-4m \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_3\leftrightarrow h_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 2 & 4 \\ 0 & 2-m^2 & -1-2m & 3-4m \\ 0 & 0 & -3 & m-8 \end{array}\right).$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất là:

$$x_1=\frac{-m^2+13m+8}{3m^2-6}, x_2=\frac{2m^2-3m-17}{3m^2-6}, x_3=\frac{-m+8}{3} \text{ với } m=\frac{3}{2}.$$

Với $3-2m\neq 0$ thì $m\neq\dfrac{3}{2}$. Khi đó:

$$\xrightarrow{h_3-\frac{2-m^2}{3-2m}h_1\to h_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & m & 2 & 4\\ 0 & 3-2m & -3 & m-8\\ 0 & 0 & \dfrac{m^2-4m+3}{3-2m} & \dfrac{m^3-20m+25}{3-2m}\end{array}\right).$$

TH1: Nếu $m^2-4m+3=0\to m=3;1$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

TH2: Nếu $m^2-4m+3\neq 0\to m\neq 3;1$ thì hệ phương trình có nghiệm nghiệm duy nhất:

$$x_1=\frac{-2m^3-11m^2+97m-114}{\left(m^2-4m+3\right)\left(3-2m\right)},x_2=\frac{4m^3-12m^2-25m+51}{\left(m^2-4m+3\right)\left(3-2m\right)},x_3=\frac{m^3-20m+25}{m^2-4m+3}.$$

**Bài 14.** Cho hệ $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+mx_4=4\\ -x_1-x_2+3x_3+2x_4=k\\ 2x_1-x_2-3x_3+(m-1)x_4=3\\ x_1+x_2+x_3+2mx_4=5.\end{cases}$

a) Điều kiện để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

b) Điều kiện để hệ phương trình có vô số nghiệm.

**Lời giải**

Ma trận bổ sung của hệ:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & m & 4\\ -1 & -1 & 3 & 2 & k\\ 2 & -1 & -3 & m-1 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 2m & 5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[h_4-h_1\to h_4]{\substack{h_2+h_1\to h_2\\ h_3-2h_1\to h_3}}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & m & 4\\ 0 & 1 & 2 & 2+m & k+4\\ 0 & -5 & -1 & -m-1 & -5\\ 0 & -1 & 2 & m & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[h_4+h_2\to h_4]{h_3+5h_2\to h_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&m&4\\0&1&2&2+m&k+4\\0&0&9&4m+9&5k+15\\0&0&4&2+2m&k+5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_4-\frac{4}{9}h_3\to h_4}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&m&4\\0&1&2&2+m&k+4\\0&0&9&4m+9&5k+15\\0&0&0&\frac{2}{9}m-2&\frac{-11}{9}k-\frac{5}{3}\end{array}\right).$$

a) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi:

$$\frac{2}{9}m-2\neq 0\to m\neq 9.$$

b) Hệ phương trình có vô số nghiệm khi:

$$\begin{cases}\frac{2}{9}m-2=0\\\frac{-11}{9}k-\frac{5}{3}=0\end{cases}\to\begin{cases}m=9\\k=\frac{-15}{11}.\end{cases}$$

**Bài 15.** Tìm điều kiện của a để hệ phương có nghiệm không tầm thường:

$$\begin{cases}2x+ay-z=0\\ax+y+2z=0\\x-ay-3z=0.\end{cases}$$

**Lời giải**

Ma trận bổ sung của hệ:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}2&a&-1&0\\a&1&2&0\\1&-a&-3&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_1\leftrightarrow h_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-a&-3&0\\a&1&2&0\\2&a&-1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[h_3-2h_1\to h_3]{h_2-ah_1\to h_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -3 & 0\\ 0 & 1+a^2 & 2+3a & 0\\ 0 & 3a & 5 & 0\end{array}\right)$$

Vì $1+a^2\neq 0$ nên:

$$\xrightarrow{(1+a^2)h_3-(3a)h_2\to h_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -3 & 0\\ 0 & 1+a^2 & 2+3a & 0\\ 0 & 0 & -4a^2-6a+5 & 0\end{array}\right).$$

Để hệ phương trình có nghiệm không tầm thường thì:

$$-4a^2-6a+5=0$$

$$\Leftrightarrow\left(a-\frac{-3+\sqrt{29}}{4}\right)\left(a-\frac{-3-\sqrt{29}}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{-3+\sqrt{29}}{4}\\ a=\dfrac{-3-\sqrt{29}}{4}.\end{array}\right.$$

**Bài 16.** Tìm điều kiện của m để hệ phương trình có nghiệm tầm thường:

$$\begin{cases}(m+5)x+2y-(2m+1)z=0\\ mx+(m-1)y+4z=0\\ (m+5)x+(m+2)y+5z=0.\end{cases}$$

**Lời giải**

Ma trận bổ sung của hệ:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}m+5 & 2 & -(2m+1) & 0\\ m & m-1 & 4 & 0\\ m+5 & m+2 & 5 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_2\leftrightarrow h_1}\left(\begin{array}{ccc|c}m & m-1 & 4 & 0\\ m+5 & 2 & -(2m+1) & 0\\ m+5 & m+2 & 5 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[h_3-\frac{5}{4}h_1\to h_3]{h_2+\frac{2m+1}{4}h_1\to h_2}\left(\begin{array}{ccc|c} m & m-1 & 4 & 0 \\ \dfrac{2m^2+5m+20}{4} & \dfrac{2m^2-m+7}{4} & 0 & 0 \\ \dfrac{20-m}{4} & \dfrac{13-m}{4} & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[4h_3\leftrightarrow h_3]{4h_2\leftrightarrow h_2}\left(\begin{array}{ccc|c} m & m-1 & 4 & 0 \\ 2m^2+5m+20 & 2m^2-m+7 & 0 & 0 \\ 20-m & 13-m & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vì $2m^2-m+7\neq 0$ nên:

$$\xrightarrow{h_3-\frac{13-m}{2m^2-m+7}h_1\to h_3}\left(\begin{array}{ccc|c} m & m-1 & 4 & 0 \\ 2m^2+5m+20 & 2m^2-m+7 & 0 & 0 \\ \dfrac{20m^2-72m-120}{2m^2-m+7} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Để hệ phương trình có nghiệm tầm thường thì:

$$20m^2-72m-120\neq 0\to\begin{cases} m\neq\dfrac{9+\sqrt{231}}{5} \\ m\neq\dfrac{9-\sqrt{231}}{5}. \end{cases}$$

**Bài 17.** Tìm mối quan hệ giữa $a,b,c$ để hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=a \\ x_1+2x_2-x_3=b \\ 3x_1+7x_2-x_3=c. \end{cases}$$

a) Có nhiều nhất một nghiệm.

b) Có ít nhất một nghiệm.

**Lời giải**

Ma trận bổ sung của hệ:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 1 & a\\ 1 & 2 & -1 & b\\ 3 & 7 & -1 & c\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[h_2-h_1\to h_2]{h_3-3h_2\to h_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 1 & a\\ 0 & -1 & -2 & b-a\\ 0 & 1 & 2 & c-3b\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_3+h_2\to h_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 1 & a\\ 0 & -1 & -2 & b-a\\ 0 & 0 & 0 & c-2b-a\end{array}\right).$$

a) Hệ phương trình có nhiều nhất một nghiệm có 2 trường hợp xảy ra:

TH1: Hệ phương có nghiệm duy nhất (vô lý).

TH2: Hệ phương vô nghiệm khi:

$$c-2b-a\neq 0.$$

b) Hệ phương trình có ít nhất một nghiệm có 2 trường hợp xảy ra:

TH1: Hệ phương có nghiệm duy nhất (vô lý).

TH2: Hệ phương vô nghiệm khi:

$$c-2b-a=0.$$

**Bài 18.** Giải và biện luận hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x+2y- & 3z=4\\ 4x+ & y+ & 2z=6\\ x+2y+(a^2-19)z=a. \end{cases}$$

**Lời giải**

Ma trận bổ sung của hệ:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 6\\ 1 & 2 & a^2-19 & a\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[h_3-h_1\to h_3]{h_2-4h_1\to h_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & -3 & 8 & -2\\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4\end{array}\right).$$

TH1: Nếu $a=4$ thì hệ phương trình hệ phương trình vô nghiệm.

TH2: Nếu $a=4$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm:

$$x=\frac{8}{3}-\frac{7}{3}z, y=\frac{2}{3}+\frac{8}{3}z \text{ với } z\in\mathbb{R}.$$

TH3: Nếu $a\neq -4;4$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

$$x=\frac{8}{3}-\frac{7}{3(a+4)}, y=\frac{2}{3}+\frac{8}{3(a+4)}, z=\frac{1}{a+4}.$$

**Bài 19.** Giải và biện luận hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x+ky+(1+4k)3z=1+4k \\ 2x+(k+1)y+(2+7k)z=1+7k \\ 3x+(k+2)y+(3+9k)z=1+9k. \end{cases}$$

**Lời giải**

Ma trận bổ sung của hệ:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1+4k & 1+4k \\ 2 & k+1 & 2+7k & 1+7k \\ 3 & k+2 & 3+9k & 1+9k \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[h_3-3h_1\to h_3]{h_2-2h_1\to h_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1+4k & 1+4k \\ 0 & 1-k & -k & -1-k \\ 0 & 2-2k & -3k & -2-3k \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_3-2h_2\to h_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1+4k & 1+4k \\ 0 & 1-k & -k & -1-k \\ 0 & 0 & -k & -k \end{array}\right).$$

TH1: Nếu $k=0$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm:

$$x=1-z, y=-1 \text{ với } z\in\mathbb{R}.$$

TH2: Nếu $k=1$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

TH3: Nếu $k\neq 0;1$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

$$x=\frac{k}{1-k}, y=\frac{-1}{1-k}, z=1.$$

**Bài 20.** Giải và biện luận hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (k+2)x + 2ky - z = 1 \\ x - 2y + kz = -k \\ y + z = k. \end{cases}$$

**Lời giải**

Ma trận bổ sung của hệ:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} k+2 & 2k & -1 & 1 \\ 1 & -2 & k & -k \\ 0 & 1 & 1 & k \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & k \\ 1 & -2 & k & -k \\ k+2 & 2k & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_2 \leftrightarrow h_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & -k \\ 0 & 1 & 1 & k \\ k+2 & 2k & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_3 - (k+2)h_1 \to h_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & -k \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & 4(k+1) & -(k+1)^2 & (k+1)^2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_3 - 4(k+1)h_2 \to h_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & -k \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & -(k+1)(k+5) & (k+1)(1-3k) \end{array}\right).$$

TH1: Nếu $k = -1$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm:

$$x = -1 - z, y = -1 - z \text{ với } z \in \mathbb{R}.$$

TH2: Nếu $k = -5$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

TH3: Nếu $k \neq -1; -5$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

$$x = \frac{-2k^2 + 2}{k+5}, y = \frac{k^2 + 2k + 1}{k+5}, z = \frac{3k-1}{k+5}.$$

**Bài 21.** Giải và biện luận hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x+ & 2ky+(k+1)z=1 \\ kx+(1-k)y+ & z=k+2 \\ x+ & y+ \quad kz=k+1. \end{cases}$$

**Lời giải**

Ma trận bổ sung của hệ :

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2k & k+1 & 1 \\ k & 1-k & 1 & k+2 \\ 1 & 1 & k & k+1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_3\leftrightarrow h_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k+1 \\ k & 1-k & 1 & k+2 \\ 1 & 2k & k+1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_3\leftrightarrow h_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k+1 \\ 1 & 2k & k+1 & 1 \\ k & 1-k & 1 & k+2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[h_3-kh_1\to h_3]{h_2-h_1\to h_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k+1 \\ 0 & 2k-1 & 1 & -k \\ 0 & 1-2k & 1-k^2 & 2-k^2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_3+h_2\to h_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k+1 \\ 0 & 2k-1 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 2-k^2 & k^2-k+2 \end{array}\right).$$

TH1: Nếu $k=\dfrac{1}{2}$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

TH2: Nếu $k=\sqrt{2};-\sqrt{2}$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

TH3: Nếu $k\neq -\sqrt{2};\dfrac{1}{2};\sqrt{2}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

$$x=\frac{-4k^4-3k^3+k^2+k}{(2-k^2)(2k-1)}, y=\frac{k^3-k^2-k-2}{(2-k^2)(2k-1)}, z=\frac{k^2-k+2}{2-k^2}.$$

**Bài 22:** Giải và biện luận hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+5x_3+\ 4x_4=3 \\ 2x_1+3x_2+6x_3+\ 8x_4=5 \\ \ x_1-6x_2-9x_3-20x_4=-11 \\ 4x_1+\ x_2+4x_3+\ \lambda x_4=2. \end{cases}$$

**Lời giải**

Ma trận bổ sung của hệ:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & \lambda & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_3\leftrightarrow h_1}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & \lambda & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[h_4-4h_1\to h_4]{\substack{h_2-2h_1\to h_2\\ h_3-3h_1\to h_3}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 0 & 15 & 24 & 48 & 27 \\ 0 & 20 & 32 & 64 & 36 \\ 0 & 25 & 40 & \lambda+80 & 46 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}h_3\leftrightarrow h_2}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & 15 & 24 & 48 & 27 \\ 0 & 25 & 40 & \lambda+80 & 46 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[h_4-5h_2\to h_4]{h_3-3h_2\to h_3}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_3 \leftrightarrow h_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

TH1: Nếu $\lambda = 0$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

TH2: Nếu $\lambda \neq 0$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm:

$$x_1 = \frac{-1}{5} - \frac{3}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4, x_2 = \frac{9}{5} - \frac{8}{5}x_3 - \frac{16}{5}x_4 \text{ với } x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

***Nhận xét:*** Bài 3 đến bài 22 là bài toán giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính chứa tham số.

Phương pháp giải khử Gauss - người giải phân tích rõ từng biến đổi hàng và tách các trường hợp tham số, từ đó xác định được tình trạng vô nghiệm, vô số nghiệm hay nghiệm duy nhất.

**BÀI TẬP LUYỆN TẬP**

**Bài 1.** Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau theo tham số m:

$$\begin{cases} x + 2y - z + 4t = 2 \\ 2x - y + z + t = 1 \\ x + 7y - 4z + 11t = m. \end{cases}$$

**Bài 2.** Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$$

**Bài 3.** Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = 1 \\ ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a. \end{cases}$$

**Bài 4.** Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = m \\ 4x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 16x_4 = m + 1. \end{cases}$$

**Bài 5.** Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} (k+1)x + y + z = 1 \\ x + (k+1)y + z = k \\ x + y + (k+1)z = k^2. \end{cases}$$

**Bài 6.** Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x + y + mz = 3 \\ x + my + 3z = 2. \end{cases}$$

**Bài 7.** Cho hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x + 2y + mz = 3 \\ 3x - y - mz = 2 \\ 2x - 3y + 2z = n. \end{cases}$$

a) Tìm điều kiện để hệ phương trình có vô số nghiệm.

b) Tìm điều kiện để hệ phương trình vô nghiệm.

**Bài 8.** Cho hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x + 2y + z + mt = 0 \\ 5x - (m+1)y - mz + t = 0 \\ 2x - 3my + 2z + t = 0 \\ 4x + y + z + mt = 0. \end{cases}$$

a) Tìm điều kiện để hệ có nghiệm tầm thường.

b) Tìm điều kiện để hệ có nghiệm không tầm thường.

**Bài 9.** Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ 5x - y + mz = 0. \end{cases}$$

**Bài 10.** Cho hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x + y + 5z + 2t = 3 \\ 2x + y + 3z + 2t = -1 \\ x + y + 3z + 4t = 1 \\ 2x + 3y + 11z + mt = n. \end{cases}$$

a) Tìm điều kiện để hệ có nghiệm tầm thường.

b) Tìm điều kiện để hệ có nghiệm không tầm thường.

**Bài 11.** Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 + \lambda x_2 + x_3 + 4x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 9x_3 + x_4 = 19 \\ 6x_1 - 2x_2 + 18x_3 + 2x_4 = \lambda. \end{cases}$$

**Bài 12.** Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 2x + y + mz = 0 \\ x + my + 3z = 0. \end{cases}$$

**Bài 13.** Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} mx + 5my - mz = 0 \\ 2mx + my + 10mz = 0 \\ -mx - 2my - 3mz = 0. \end{cases}$$

**Bài 14.** Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ mx_1 + 4x_2 + 10x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + 17x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 1x_4 = 0. \end{cases}$$

**Bài 15.** Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} -x_1 \quad + 2x_3 \quad + \ x_4 = 0 \\ 2x_1 \quad - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + mx_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

## 2.2. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Ở dạng bài này, mục đích là nhằm vận dụng lý thuyết ma trận và đại số tuyến tính để khảo sát cấu trúc tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính. Nội dung trọng tâm là xây dựng nghiệm tổng quát từ một nghiệm riêng và không gian nghiệm thuần nhất, đồng thời nghiên cứu các dạng nghiệm đặc biệt như nghiệm nguyên hoặc nghiệm có tính chất riêng của hệ và phân tích số nghiệm độc lập dựa trên không gian nghiệm thuần nhất. Dưới đây là một số bài toán minh hoạ tiêu biểu.

**Bài 1.** (*Kỷ yếu Olympic 2002*). Cho hệ phương trình tuyến tính có 10 phương trình và 11 ẩn số. Biết rằng:

1) Bộ số $(1992,1993,...,2002)$ là một nghiệm của hệ phương trình đã cho.
2) Khi xoá cột thứ $i$ trong ma trận hệ số của hệ phương trình đã cho thì ta được một ma trận vuông có định thức đúng bằng $j$ $(j=1,2,...,11)$.

Hãy tìm tất cả các nghiệm của hệ phương trình đã cho.

**Lời giải**

Gọi $A=\left(a_{ij}\right)_{10\times 11}$ là ma trận hệ số của hệ phương trình. Từ giả thiết $2)$ suy ra $rankA=10$, nên phương trình thuần nhất tương ứng chỉ có một nghiệm độc lập tuyến tính. Theo giả thiết 1) $x_0=(1992,1993,\ldots,2002)$ là một nghiệm (riêng) của phương trình, do đó mọi nghiệm của phương trình đã cho đều có dạng:

$$\left(x_1,x_2,\ldots,x_{11}\right)=\left(1992,1993,\ldots,2002\right)+\left(a_1,a_2,\ldots,a_{11}\right)t,\ \ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Trong đó $\left(a_1,a_2,\ldots,a_{11}\right)$ là một nghiệm nào đó của phương trình thuần nhất. Vì vậy, ta chỉ cần tìm một nghiệm của hệ phương trình thuần nhất. Với mỗi $j=1,2,\ldots,10$ gọi $P_j$ là ma trận vuông cấp 11 có dòng đầu tiên là dòng thứ $j$ của ma trận $A$, 10 dòng còn lại vẫn là các dòng của $A$, nghĩa là:

$$P_j = \begin{pmatrix} a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots & a_{j,10} & a_{j,11} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,10} & a_{1,11} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots & a_{j,10} & a_{j,11} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ a_{9,1} & a_{9,2} & \cdots & a_{9,10} & a_{9,11} \\ a_{10,1} & a_{10,2} & \cdots & a_{10,10} & a_{10,11} \end{pmatrix}.$$

Như vậy, $\det P_j = 0$. Mặt khác, khai triển định thức $P_j$ theo dòng đầu tiên và sử dụng giả thiết 2), ta được:

$$a_{j,1}(1) + a_{j,2}(-2) + a_{j,3}(3) + \cdots + a_{j,10}(-10) + a_{j,11}(11) = 0, \ \forall j = 1,2,\ldots,10.$$

Từ đó suy ra $(1,-2,3,-4,5,-6,7,-8,9,-10,11)$ là một nghiệm của phương trình thuần nhất. Vậy, phương trình đã cho có nghiệm:

$$(x_1,x_2,\ldots,x_{11}) = (1992,1993,1994,\ldots,2001,2002) + (1,-2,3,-4,\ldots,-10,11)t$$
$$= (1992+t,1993-2t,1994+3t,\ldots,2001-10t,2002+11t), \forall j = 1,2,\ldots,10.$$

**Bài 2.** (*Kỷ yếu Olympic 2006*). Xác định $n$ để hệ phương trình sau có 3 nghiệm độc lập tuyến tính:

$$\begin{cases} 1^2 x_1 + 2^2 x_2 + \cdots + n^2 x_n = 0 \\ 2^2 x_1 + 3^2 x_2 + \cdots + (n+1)^2 x_n = 0 \\ 3^2 x_1 + 4^2 x_2 + \cdots + (n+2)^2 x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n^2 x_1 + (n+1)^2 x_2 + \cdots + (2n-1)^2 x_n = 0. \end{cases}$$

**Lời giải**

Gọi $A$ là ma trận hệ số của phương trình:

$$A=\begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & \dots & (n+1)^2 \\ 3^2 & 4^2 & \dots & (n+2)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2 & (n+1)^2 & \dots & (2n-1)^2 \end{pmatrix}.$$

Nhân dòng $k$ với $-1$ rồi cộng vào dòng $k+1$ $(k=1,...,n-1)$, ta được:

$$A=\begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \\ 3 & 5 & \dots & 2n+1 \\ 5 & 7 & \dots & 2n+3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2n-1 & 2n+1 & \dots & 4n-3 \end{pmatrix}.$$

Nhân dòng $k$ với $-1$ rồi cộng vào dòng $k+1$ $(k=1,...,n-1)$, ta được:

$$A=\begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \\ 3 & 5 & \dots & 2n+1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

Dễ dàng nhận thấy từ dòng thứ 3 đổ đi các dòng giống nhau $\Rightarrow$ các dòng này phụ thuộc tuyến tính nhau còn 3 dòng đầu tiên độc lập tuyến tính với nhau $\Rightarrow rank(A)=3$. Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm độc lập tuyến tính thì $n\geq 3$.

**Bài 3.** (*Kỷ yếu Olympic 2019*). Cho $3n$ số nguyên $a_1,a_2,\dots,a_n;b_1,b_2,\dots,b_n;$ $c_1,c_2,\dots,c_n$ thoả mãn $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=0$. Chứng minh rằng hệ phương trình sau luôn có nghiệm nguyên:

$$\begin{cases} a_1b_1x_1+a_1b_2x_2+\cdots+a_1b_nx_n=c_1-x_1 \\ a_2b_1x_1+a_2b_2x_2+\cdots+a_2b_nx_n=c_2-x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_nb_1x_1+a_nb_2x_2+\cdots+a_nb_nx_n=c_n-x_n. \end{cases}$$

**Lời giải**

Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} (a_1b_1+1)x_1 + a_1b_2x_2 + \cdots + a_1b_nx_n = c_1 \\ a_2b_1x_1 + (a_2b_2+1)x_2 + \cdots + a_2b_nx_n = c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_nb_1x_1 + a_nb_2x_2 + \cdots + (a_nb_n+1)x_n = c_n. \end{cases}$$

Xét định thức:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1b_1+1 & a_1b_2 & \ldots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2+1 & \ldots & a_2b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \ldots & a_nb_n+1 \end{vmatrix} = D_{n-1} + a_nb_n.$$

$D_n = 1 + a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = 1$. Do đó, hệ đã cho là hệ Cramer. Vậy hệ có nghiệm duy nhất.

$D_n^i$ là định thức có được từ định thức $D_n$ bằng cách thay cột thứ $i$ bằng cột $(c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$. Ta có $D_n^i$ là các số nguyên với mọi $i = 1, n$ nên hệ đã cho có duy nhất nghiệm nguyên $x_i = \dfrac{D_n^i}{D_n}$.

**Bài 4.** (*Kỷ yếu Olympic 2022*). Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a-2018} + \dfrac{y}{a-2019} + \dfrac{z}{a-2020} + \dfrac{\mathrm{w}}{a-2021} = 1 \\ \dfrac{x}{b-2018} + \dfrac{y}{b-2019} + \dfrac{z}{b-2020} + \dfrac{\mathrm{w}}{b-2021} = 1 \\ \dfrac{x}{c-2018} + \dfrac{y}{c-2019} + \dfrac{z}{c-2020} + \dfrac{\mathrm{w}}{c-2021} = 1 \\ \dfrac{x}{d-2018} + \dfrac{y}{d-2019} + \dfrac{z}{d-2020} + \dfrac{\mathrm{w}}{d-2021} = 1. \end{cases}$$

trong đó $a, b, c, d$ là các tham số. Giả sử hệ có nghiệm là $(x, y, z, \mathrm{w})$, hãy tính tổng: $S = x + y + z + \mathrm{w}$.

**Lời giải**

Vì $(x, y, z, \mathrm{w})$ là nghiệm của phương trình nên phương trình ẩn $t$:

$$\frac{x}{t-2018}+\frac{y}{t-2019}+\frac{z}{t-2020}+\frac{\mathrm{w}}{t-2021}=1 \quad (1)$$

có các nghiệm là $t=a,b,c,d$.

Với $t\notin\{2018;2019;2020;2021\}$ thì $(1)$ tương đương với phương trình đa thức $P(t)=0$, trong đó:

$$\begin{aligned}P(t)&=(t-2018)(t-2019)(t-2020)(t-2021)\\&\quad -x(t-2019)(t-2020)(t-2021)-y(t-2018)(t-2020)(t-2021)\\&\quad -z(t-2018)(t-2019)(t-2021)-\mathrm{w}(t-2018)(t-2019)(t-2020).\end{aligned}$$

Do $\deg P(t)=4$ và $P(t)=0$ tại 4 giá trị $t=a,b,c,d$ nên:

$$P(t)=(t-a)(t-b)(t-c)(t-d).$$

So sánh hệ số của $t^3$ ở hai vế của $P(t)$ suy ra:

$$\begin{aligned}&-(2018+2019+2020+2021)-(x+y+z+\mathrm{w})=-(a+b+c+d)\\&\Rightarrow 2018+2019+2020+2021+x+y+z+\mathrm{w}=a+b+c+d.\end{aligned}$$

Vậy nên: $S=x+y+z+\mathrm{w}=a+b+c+d-8078$.

**Bài 5.** (*Kỷ yếu Olympic 2022*). Cho hệ phương trình

$$\begin{cases}x=by+cz+dt\\y=cz+dt+ax\\z=dt+ax+by\\t=ax+by+cz.\end{cases}$$

trong đó các hệ số $a,b,c,d$ khác $-1$. Chứng minh rằng hệ trên có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi các số $a,b,c,d$ thoả mãn hệ thức:

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{d}{d+1}=1.$$

**Lời giải**

Gọi $A$ là ma trận hệ số của hệ phương trình, khi đó $A$ có dạng:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & b & c & d \\ a & -1 & c & d \\ a & b & -1 & d \\ a & b & c & -1 \end{pmatrix}.$$

Nhân dòng 1 với $-1$ rồi cộng vào dòng $k(k=2,3,4)$, ta được:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & b & c & d \\ a+1 & -1-b & 0 & 0 \\ a+1 & 0 & -1-c & 0 \\ a+1 & 0 & 0 & -1-d \end{pmatrix}.$$

Gọi $D$ là định thức ma trận hệ. Ta xét:

$$D=\begin{vmatrix} -1 & b & c & d \\ a+1 & -1-b & 0 & 0 \\ a+1 & 0 & -1-c & 0 \\ a+1 & 0 & 0 & -1-d \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{2+1}(a+1)\begin{vmatrix} b & c & d \\ 0 & -1-c & 0 \\ 0 & 0 & -1-d \end{vmatrix}+(-1)^{2+2}(-1-b)\begin{vmatrix} -1 & c & d \\ a+1 & -1-c & 0 \\ a+1 & 0 & -1-d \end{vmatrix}$$

$$=-(a+1)b(1+c)(1+d)-(1+b)\left[-(1+c)(1+d)+d(1+c)(a+1)+c(a+1)(1+d)\right]$$

$$=-(a+1)b(1+c)(1+d)+(1+b)(1+c)(1+d)-d(1+b)(1+c)(a+1)-c(1+b)(a+1)(1+d)$$

$$=(1+b)(1+c)(1+d)-b(1+a)(1+c)(1+d)-c(1+a)(1+b)(1+d)-d(1+a)(1+b)(1+c).$$

Hệ phương trình có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi $D=0$:

$$D=(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)\left(\frac{1}{1+a}-\frac{b}{1+b}-\frac{c}{1+c}-\frac{d}{1+d}\right)$$

$$=(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)\left(1-\frac{a}{a+1}-\frac{b}{b+1}-\frac{c}{c+1}-\frac{d}{d+1}\right).$$

**Bài 6.** (*Kỷ yếu Olympic 2022*). Ký hiệu $Y\ E\ A\ R$ là một năm gồm 4 số tự nhiên trong khoảng từ 0 đến 9 $(Y\neq 0)$. Năm đó sẽ gọi là năm đặc biệt nếu hệ phương trình:

$$\begin{cases} Yx_1 + Ex_2 + Ax_3 + Rx_4 = Y \\ Rx_1 + Yx_2 + Ex_3 + Ax_4 = E \\ Ax_1 + Rx_2 + Yx_3 + Ex_4 = A \\ Ex_1 + Ax_2 + Rx_3 + Yx_4 = R \end{cases}$$

có ít nhất hai nghiệm. Tìm tất cả các năm đặc biệt trong thế kỷ 21 (bắt đầu từ năm 2001 đến 2100). Năm 2020 có phải là năm đặc biệt không?

**Lời giải**

Hệ không có nghiệm duy nhất thì cần định thức ma trận hệ bằng 0. Gọi ma trận mở rộng hệ là:

$$\Omega = \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} Y & E & A & R & Y \\ R & Y & E & A & E \\ A & R & Y & E & A \\ E & A & R & Y & R \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ R & Y & E & A & E \\ A & R & Y & E & A \\ E & A & R & Y & R \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & Y-R & E-R & A-R & E-R \\ 0 & R-A & Y-A & E-A & 0 \\ 0 & A-E & R-E & Y-E & R-E \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & Y-R & E-R & A-R & E-R \\ 0 & R-A & Y-A & E-A & 0 \\ 0 & A-E+Y-R & 0 & Y-E+A-R & 0 \end{array}\right).$$

Nếu $E \neq R$ thì $2 \leq rank\,\Omega \leq rank\,\mathrm{A}$ (vì hai phần tử ở hàng 3 và 4 cột $b$ là 0).

Nếu $E = R$ thì rõ ràng $rank\,\Omega \leq rank\,\mathrm{A}$. Như vậy hệ luôn có ít nhất một nghiệm.

Bây giờ ta cần tìm các điều kiện để $A$ suy biến.

a) Xét $E \neq R$, ta có:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & Y-R & E-R & A-R \\ 0 & (R-A)(E-R)-(Y-R)(Y-A) & 0 & (E-A)(E-R)-(A-R)(Y-A) \\ 0 & A-E+Y-R & 0 & Y-E+A-R \end{pmatrix}.$$

Ma trận $A$ suy biến nếu:

i. $A-E+Y-R=0$ hoặc

ii. $(R-A)(E-R)-(Y-R)(Y-A)=(E-A)(E-R)-(A-R)(Y-A)$.

Trường hợp (ii) tương đương với $(E-R)^2+(A-Y)^2=0$, do $E\neq R$ nên điều này không thể xảy ra.

b) Xét $E=R$, ta có:

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & Y-R & 0 & A-R\\ 0 & R-A & Y-A & R-A\\ 0 & A+Y-2R & 0 & Y+A-2R\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & Y-R & 0 & A-R\\ 0 & R-A & Y-A & R-A\\ 0 & A-R & 0 & Y-R\end{pmatrix}.$$

- Nếu $Y=A$ thì ma trận $A$ suy biến.
- Nếu $Y\neq A$ tính định thức:

$$|A|=(Y-A)\left[(Y-R)^2-(A-R)^2\right].$$

Khi đó, $A$ không suy biến nếu $Y-R\neq\pm(A-R)$. Vì $Y\neq A$ nên $Y-R\neq-(A-R)$ hay $Y+A\neq 2R$.

Vậy năm đặc biệt khi và chỉ khi:

1) $E\neq R$ và $A-E+Y-R=0$ hoặc
2) $E=R$ và $Y=A$ hoặc
3) $E=R, Y\neq A$ và $Y+A=2R$.

Thay $Y=2, E=0$ ta có các năm:

Thoả $(1)$: $A+2=R\neq 0$ gồm 2002, 2013, 2024, 2035, 2046, 2057, 2068, 2079.

Thoả $(2)$: là 2020.

Không có năm thoả $(3)$.

**BÀI TẬP LUYỆN TẬP**

**Bài 1.** (*Kỷ yếu Olympic 2019*). Chứng minh rằng hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

trong đó $a_{ij} = -a_{ji}$ với mọi $1 \le i, j \le n$ và $n$ lẻ. Có nghiệm khác 0.

**Bài 2.** Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a-2022} + \dfrac{y}{a-2023} + \dfrac{z}{a-2024} + \dfrac{w}{a-2025} = 1 \\ \dfrac{x}{b-2022} + \dfrac{y}{b-2023} + \dfrac{z}{b-2024} + \dfrac{w}{b-2025} = 1 \\ \dfrac{x}{c-2022} + \dfrac{y}{c-2023} + \dfrac{z}{c-2024} + \dfrac{w}{c-2025} = 1 \\ \dfrac{x}{d-2022} + \dfrac{y}{d-2023} + \dfrac{z}{d-2024} + \dfrac{w}{d-2025} = 1. \end{cases}$$

Trong đó $a, b, c, d$ là các tham số. Giả sử hệ có nghiệm là $(x, y, z, w)$, hãy tính tổng: $S = x + y + z + w$.

**Bài 3.** Xác định $n$ để hệ phương trình sau có 3 nghiệm độc lập tuyến tính:

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + \cdots + (n+1)x_n = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + \cdots + (n+2)x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ nx_1 + (n+1)x_2 + \cdots + (2n-1)x_n = 0. \end{cases}$$

**Bài 4.** Cho $A \in M_n(\mathbb{R}), (n \in \mathbb{N}^*)$ thoả mãn:

$A^{2024} \neq 0, A^{2025} = 0$. Chứng minh rằng hai hệ phương trình sau có cùng tập hợp nghiệm

$$Ax = 0 (1)$$
$$\left(A + A^2 + \cdots + A^{2024}\right)x = 0. (2)$$

**Bài 5.** (*Kỷ yếu Olympic 2014*). Cho hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - kx_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + kx_3 + x_4 + kx_5 = 0 \\ x_1 + kx_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ kx_1 + kx_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

trong đó $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ là các ẩn và $k$ là tham số thuộc $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng, nếu $k \notin \{-1, 3\}$ và $(a, b, c, d, e)$ là một nghiệm của hệ thì $a(3-k) = e(-2k+2)$; $b(3-k) = e(k+1)$; $c(3-k) = e(2k+2)$ và $d(k-3) = e(k-1)^2$.

## 2.3. BÀI TOÁN THỰC TẾ QUY VỀ VIỆC GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Ở dạng bài này, mục đích là vận dụng kiến thức về hệ phương trình tuyến tính để giải quyết các bài toán có nội dung thực tế, trong đó mối quan hệ giữa các đại lượng được mô tả thông qua các phương trình tuyến tính. Những bài toán này giúp người học thấy được tính ứng dụng của lý thuyết vào đời sống, đồng thời rèn luyện khả năng mô hình hóa và tư duy logic khi chuyển một bài toán thực tế về dạng hệ phương trình tuyến tính. Dưới đây là một số bài toán minh họa tiêu biểu.

**Bài 1.** (*Kỷ yếu Olympic 2015*). Bạch Tuyết chia 3 lít sữa vào cốc của bảy chú lùn. Trước bữa ăn, các chú lùn chơi một trò chơi như sau: Chú lùn thứ nhất chia đều tất cả sữa của mình vào cốc của sáu chú lùn còn lại (cốc của chú không còn sữa nữa). Tiếp theo, chú lùn thứ hai cũng chia đều tất cả sữa đang có trong cốc của mình vào cốc của sáu chú còn lại. Các chú lùn khác cũng lần lượt làm như vậy. Sau khi chú lùn thứ bảy chia đều tất cả sữa của mình vào cốc của sáu chú lùn kia, mọi người nhận thấy trong cốc của mỗi chú lượng sữa bằng đúng với lượng sữa ban đầu Bạch Tuyết chia cho. Hỏi ban đầu mỗi chú lùn được chia cho bao nhiêu lít sữa?

**Lời giải**

Gọi lượng sữa mỗi chú được Bạch Tuyết chia cho lần lượt là $x_1, x_2, ...., x_7$.

Tổng lượng sữa chú lùn thứ $k$ nhận được trước khi chú chia đều cho anh em là $y_k$.

Dễ thấy $y_1 = 0$ và $x_7 = 0$. Ta có: $x_1 + x_2 + .... + x_7 = 3$.

Lượng sữa chú lùn thứ $k$ có trước khi chú chia là $x_k + y_k$. Vì trước khi chú lùn thứ $k$ chia sữa thì tổng lượng sữa chú thứ $k$ và $k+1$ là $y_k$ như nhau nên tổng lượng sữa mà chú lùn $k+1$ nhận được trước khi chú chia là

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(x_k + y_k).$$

Như vậy ta được sáu phương trình tuyến tính đầu tiên.

Sau khi chia hết thì chú lùn thứ $k$ không còn giọt sữa nào trong cốc nữa.

Lượng sữa trong cốc của chú sau lần chia của chú thứ bảy là $x_k$ là do các chú lùn tiếp theo chia cho, gồm hai phần:

- Lượng $\frac{1}{6}(x_{k+1} + y_{k+1})$ do chú lùn thứ $k+1$ chia cho;

- Những lần chia tiếp theo, hai chú lùn $k$ và $k+1$ được chia lượng như nhau và bằng $x_{k+1}$

Như vậy:

$$x_k = x_{k+1} + \frac{1}{6}(x_{k+1} + y_{k+1})$$

Ta được thêm sáu phương trình nữa. Giải các phương trình này bắt đầu từ $k=1$. Khi đó từ $y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(x_1 + y_1)$ và $x_1 = x_2 + \frac{1}{6}(x_2 + y_2)$ kết hợp với $y_1 = 0$, ta được:

$$y_2 = \frac{1}{6}x_1,\ x_2 = \frac{5}{6}x_1.$$

Giải tiếp ta được $y_3 = \frac{1}{3}x_1,\ x_3 = \frac{2}{3}x_1,\ .....,\ x_6 = \frac{1}{6}x_1,\ x_7 = 0$. Kết hợp với $x_1 + x_2 + \ldots + x_7 = 3$, ta được nghiệm duy nhất là:

$$x_1 = \frac{6}{7},\ x_2 = \frac{5}{7},\ x_3 = \frac{4}{7},\ x_4 = \frac{3}{7},\ x_5 = \frac{2}{7},\ x_6 = \frac{1}{7},\ x_7 = 0.$$

**Bài 2.** (*Kỷ yếu Olympic 2016*). Công ty cây xanh đô thị thực hiện dự án thay thế các cây già cỗi và cây không đúng chủng loại bởi các cây mới. Công ty thực hiện chương trình trong bốn tháng. Trong mỗi tháng công ty sẽ chặt bỏ 10% tổng số cây xanh trong thành phố tính tới ngày đầu tiên của tháng, đồng thời thực hiện trồng thêm một số cây xanh. Cụ thể trong tháng thứ nhất sẽ trồng thêm 100 cây, tháng thứ hai trồng thêm 102 cây, tháng thứ ba trồng thêm 104 cây, tháng cuối

cùng trồng thêm 106 cây. Tại buổi tổng kết dự án người ta cho biết, tổng số cây hiện tại trong thành phố đã tăng thêm 80 cây so với trước khi thực hiện dự án. Hỏi hiện nay trong thành phố có bao nhiêu cây xanh?

**Lời giải**

Gọi $y_0$ là số cây ban đầu công ty quản lí; $y_1, y_2, y_3, y_4$ là số cây tương ứng của công ty ở cuối các tháng thứ 1, 2, 3, 4 $y_i \in \mathbb{N}^* \ \left(i = \overline{0,4}\right)$.

Từ giả thiết ta có: $y_1 = 0,9y_0 + 100.$

Hay $10y_1 - 9y_0 = 1000.$

Phân tích tương tự ta nhận được:

$$10y_2 - 9y_1 = 1020;\ 10y_3 - 9y_2 = 1040;\ 10y_4 - 9y_3 = 1060$$

Ta có: $y_4 = y_0 + 80$

Ta có hệ phương trình:

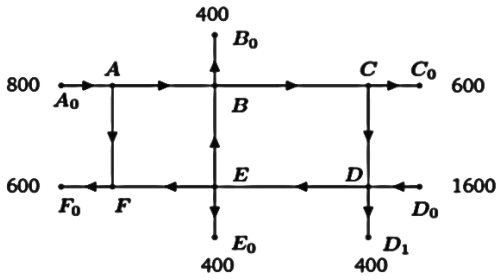
$$\begin{cases} 10y_1 - 9y_0 = 1000 \\ 10y_2 - 9y_1 = 1020 \\ 10y_3 - 9y_2 = 1040 \\ 10y_4 - 9y_3 = 1060 \\ y_4 = y_0 + 80. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên:

$$y_0 = 800, y_1 = 820, y_2 = 840, y_3 = 860, y_4 = 880.$$

Vậy hiện nay trong thành phố có 880 cây xanh.

**Bài 3.** (*Kỷ yếu Olympic 2017*). Trong thành phố Q có một hệ thống đường một chiều như tròn hình, trong đó $A, B, C, D, E, F$ là các giao lộ, $A_0, B_0, C_0, D_0, D_1, E_0, F_0$ là các lối vào hoặc ra khỏi hệ thống đó, mũi tên chỉ chiều của đường. Người ta đếm số lượng xe vào và ra khỏi hệ thống này trong một ngày và thấy: Có 800 xe vào lối $A_0$, 400 xe ra khỏi hệ thống qua lối $B_0$, 600 xe ra lối $C_0$, 1600 xe vào lối $D_0$ và 400 xe ra lối $D_1$, 400 xe ra lối $E_0$. Người ta cũng quan sát thấy số lượt xe đi trên đoạn đường $AB$ nhiều gấp đôi số lượt xe đi trên đoạn $EF$; số lượt xe đi trên đoạn đường $DE$ nhiều gấp rưỡi số lượt xe đi trên đoạn đường $BC$. Giả sử các xe vào hệ thống đều ra khỏi hệ thống trong thời gian đó. Hỏi trong ngày hôm đó đã có bao nhiêu lượt xe đi qua các đoạn đường $AB, BC, CD, EB, AF$ ?




**Lời giải**

Gọi số lượt xe đã qua các đoạn đường $AB, BC, CD, EB, AF$ lần lượt là $x, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t}, \mathrm{u}, \mathrm{w}, \mathrm{v}$ $(x, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t}, \mathrm{u}, \mathrm{w}, \mathrm{v} \in \mathbb{N})$.

Phân tích tại từng giao lộ, ta có các phương trình sau:

$$\begin{cases} x+v=800 \\ x+u=y+400 \\ z+600=y \\ t+400=z+1600 \\ u+v=t-400 \\ v+w=600. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được:

$$\begin{cases} x=w+200 \\ v=-w+600 \\ u=z-w+800 \\ t=z+1200 \\ y=z+600. \end{cases}$$

Kết hợp với các quan sát $x=2w$ và $t=1{,}5y$ ta được:

$$x=400, y=1200, z=600, t=1800, u=1200, v=400, w=200.$$

Vậy trong ngày hôm đó đã có 400, 1200, 600, 1800, 1200, 200, 400 lượt xe đi qua các đoạn đường $AB, BC, CD, EB, AF$.

**Bài 4.** (*Kỷ yếu Olympic 2018*). Người ta khảo sát một mô hình di cư dân số giữa hai vùng đô thị và nông thôn với quy luật như sau: Hằng năm, có 50% dân số vùng nông thôn chuyển về vùng đô thị và đồng thời có 25% dân số cùng đô thị chuyển về vùng nông thôn sinh sống. Giả sử $x, y$ tương ứng là số dân vùng nông thôn và

vùng đô thị ở thời điểm ban đầu $(x, y > 0)$. Hỏi sau $k$ năm dân số của vùng nông thôn và vùng đô thị là bao nhiêu?

**Lời giải**

Gọi $x_k, y_k$ tương ứng là số dân tại các vùng nông thôn và vùng đô thị sau $k$ năm $(k \in \mathbb{N})$.

Ví dụ, $x_0 = x$, $y_0 = y$. Ta có $x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{4}y_k$, $y_{k+1} = \frac{3}{4}y_k + \frac{1}{2}x_k$.

Nói cách khác:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}.$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = A^k . \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

trong đó $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$.

Đa thức đặc trưng của $A$ là $x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{4} = (x-1)\left(x - \frac{1}{4}\right)$.

Từ đây, ta suy ra $A$ có các véc tơ riêng $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ tương ứng với các giá trị riêng $1, \frac{1}{4}$. Vậy nếu ta đặt $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, thì $P^{-1}AP = D$, trong đó $D$ là ma trận đường chéo với các hệ số trên đường chéo lần lượt là $1$ và $\frac{1}{4}$.

Ta dễ dàng tính được $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$.

Suy ra $A = PDP^{-1}$ và

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{4^k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3.4^k} & \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3.4^k} \\ \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3.4^k} & \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3.4^k} \end{bmatrix}.$$

Từ đó:

$$x_k = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3.4^k}\right)x + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3.4^k}\right)y$$

$$y_k = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3.4^k}\right)x + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3.4^k}\right)y.$$

**Bài 5.** (*Kỷ yếu Olympic 2019*). Một nhà máy sản xuất năm loại sản phẩm A, B, C, D, E. Mỗi loại phải qua năm công đoạn cắt, gọt, đóng gói, trang trí và dán nhãn với thời gian cho mỗi công đoạn như trong bảng sau:

| | Cắt | Gọt | Đóng gói | Trang trí | Dán nhãn |
|---|---|---|---|---|---|
| Sản phẩm A | 1 giờ | 1 giờ | 1 giờ | 1 giờ | 1 giờ |
| Sản phẩm B | 4 giờ | 3 giờ | 3 giờ | 2 giờ | 1 giờ |
| Sản phẩm C | 8 giờ | 12 giờ | 6 giờ | 3 giờ | 1 giờ |
| Sản phẩm D | 12 giờ | 15 giờ | 10 giờ | 4 giờ | 1 giờ |
| Sản phẩm E | 20 giờ | 24 giờ | 10 giờ | 5 giờ | 1 giờ |

Các bộ phận cắt, gọt, đóng gói, trang trí, dán nhãn có số giờ công tối đa trong một tuần lần lượt là 180, 220, 120, 60, 20 giờ. Trong thiết kế ban đầu của nhà máy có phương án về số lượng mỗi loại sản phẩm nhà máy phải sản xuất trong một tuần lễ để sử dụng hết công suất các bộ phận. Tính số lượng mỗi loại sản phẩm được sản xuất trong một tuần theo phương án đó.

**Lời giải**

Gọi số sản phẩm của từng loại A, B, C, D, E lần lượt là $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ $(x_i \in \mathbb{N})$ $\left(i = \overline{0,5}\right)$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 12x_4 + 20x_5 = 180 \\ x_1 + 3x_2 + 12x_3 + 15x_4 + 24x_5 = 220 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 + 10x_5 = 120 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 60 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 4$.

**Bài 6.** (*Kỷ yếu Olympic 2019*). Giả sử có 1000 người sử dụng mạng điện thoại Viettel (V), Mobi (M), Vina (N). Biết rằng sau mỗi tháng, trong số những người dùng V có 10% chuyển sang dùng M và 20% chuyển sang dùng N; trong số những người dùng M có 15% chuyển sang dùng V và 10% chuyển sang dùng N; trong số những người dùng N có 20% chuyển sang dùng V và 5% chuyển sang dùng M.

a. Giả sử ban đầu cả 1000 người này đều dùng V. Hỏi sau 3 tháng, số lượng khách hàng dùng mỗi loại mạng điện thoại là bao nhiêu?

b. Hỏi thời điểm ban đầu, số người dùng mỗi loại mạng di động là bao nhiêu để cho qua mỗi tháng, số lượng khách hàng ở mỗi nhà mạng là không đổi? Biết rằng, tổng số khách hàng dùng 3 loại mạng luôn là 1000 và không có khách hàng mới nào và không có khách hàng nào bỏ dùng. Kết quả được làm tròn đến số nguyên.

**Lời giải**

Gọi $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ là số người dùng $\begin{pmatrix} V \\ M \\ N \end{pmatrix}$ sau $n$ tháng khảo sát.

Ta có $\begin{cases} x_{n+1} = 0,7x_n + 0,15y_n + 0,2z_n \\ y_{n+1} = 0,1x_n + 0,75y_n + 0,05z_n \\ z_{n+1} = 0,2x_n + 0,1y_n + 0,75z_n \end{cases} \Leftrightarrow X_{n+1} = AX_n$

với $A=\begin{pmatrix} 0,7 & 0,15 & 0,2 \\ 0,1 & 0,75 & 0,05 \\ 0,2 & 0,1 & 0,75 \end{pmatrix}$.

a. Sau 3 tháng:

$$X_3 = A^3\begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 464,75 \\ 185,75 \\ 349,5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 465 \\ 186 \\ 349 \end{pmatrix}.$$

b. Giả sử $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ thoả mãn yêu cầu bài toán $(x, y, z \in \mathbb{N})$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1000 \\ AX=X \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (A-I)X=0 \\ x+y+z=1000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc} -0,3 & 0,15 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & -0,25 & 0,05 & 0 \\ 0,2 & 0,1 & -0,25 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1000 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=377 \\ y=230 \\ z=393. \end{cases}$$

**Bài 7.** (*Kỷ yếu Olympic 2022*). Một nhà máy sản xuất một loại sản phẩm từ ba nguyên liệu (A, B, C), biết rằng mỗi nguyên liệu là sự kết hợp của ba thành tố (N, K, S) theo một tỉ lệ khối lượng cố định và được cho như sau:

| Tên thành tố / Loại nguyên liệu | N | K | S |
|---|---|---|---|
| A | 0,4 | 0,2 | 0,4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| B | 0,2 | 0,3 | 0,5 |
| C | 0,3 | 0,3 | 0,4 |

Giả sử $x, y, z$ lần lượt là tỉ lệ khối lượng của các nguyên liệu A, B, C đóng góp trong một sản phẩm được sản xuất.

a. Tính các tỉ lệ khối lượng của các thành tố N, K, S chiếm trong một sản phẩm theo $x, y, z$.

b. Tìm $x, y, z$ biết rằng một sản phẩm có tỉ lệ khối lượng của các thành tố như sau 0,31 là N; 0,26 là K và còn lại là S.

c. Gọi $a, b$ lần lượt là tỉ lệ của các thành tố N, K trong một sản phẩm.

Chứng minh rằng:

$$\begin{cases} 0,2 \le b \le 0,3 \\ 0,5 \le a+b \le 0,6 \\ 0,8 \le a+2b \le 0,9. \end{cases}$$

**Lời giải**

Điều kiện: $x, y, z \ge 0,\ x+y+z=1.$

a. Tỉ lệ của N trong sản phẩm là: $0,4x+0,2y+0,3z.$

Tỉ lệ của K trong sản phẩm là: $0,2x+0,3y+0,3z.$

Tỉ lệ của S trong sản phẩm là: $0,4x+0,5y+0,4z.$

b. Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+ \quad y+ \quad z=1 \\ 0,4x+0,2y+0,3z=0,31 \\ 0,2x+0,3y+0,3z=0,26. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $(x; y; z)=(0,4; 0,3; 0,3).$

c. Gọi $a, b$ lần lượt là tỉ lệ của N, K trong một sản phẩm $a, b \ge 0$. Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+ \quad y+ \quad z=1 \\ 0,4x+0,2y+0,3z=a \\ 0,2x+0,3y+0,3z=b. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được:

$$\begin{cases} x = 3 - 10b \\ y = 6 - 10a - 10b \\ z = -8 + 10a + 20b. \end{cases}$$

Điều kiện để có một sản phẩm là $0 \le x, y, z \le 1$. Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} 0,2 \le b \le 0,3 \\ 0,5 \le a + b \le 0,6 \\ 0,8 \le a + 2b \le 0,9. \end{cases}$$

**Bài 8.** (*Kỷ yếu Olympic 2022*). Giả sử có một mỏ cát dưới đáy sông, ở đó cát tích tụ theo tốc độ không đổi trong năm. Nếu cho một đoàn 50 máy khai thác ở đó liên tục, thì sau 60 ngày sẽ hết cát. Còn nếu cho một đoàn 80 máy khai thác ở đó, thì chỉ sau 30 ngày là hết cát. Hỏi để cho cát không tích tụ quá nhiều và cũng không bị hết đi, thì để bao nhiêu máy khai thác cát ở đó là vừa phải? Giả thiết rằng các máy khai thác làm việc với năng suất như nhau.

**Lời giải**

Gọi $x$ là lượng cát tích tụ thêm mỗi ngày $(x > 0)$,

$y$ là lượng cát có sẵn ở mỏ cát $(y > 0)$,

$a$ là lượng cát mỗi máy khai thác được trong một ngày $(a > 0)$.

50 máy khai thác trong 60 ngày được lượng cát là $50 \times a \times 60 = 3000a$.

Trong 60 ngày, lượng cát trong mỏ là: $y + 60x$.

Ta được phương trình: $y + 60x = 3000a \quad (1)$

80 máy khai thác trong 30 ngày được lượng cát là: $80 \times a \times 30 = 2400a$.

Trong 30 ngày lượng cát trong mỏ là $y + 30x$.

Ta được phương trình: $y + 30x = 2400a. \quad (2)$

Từ $(1),(2)$ ta được: $x = 20a$.

Vậy mỗi ngày lượng cát tích tụ thêm bằng lượng cát khai thác được của 20 máy. Suy ra, để 20 máy khai thác ở mỏ cát đó là vừa phải.

**Bài 9.** (*Kỷ yếu Olympic 2022*). Có $n$ quyển vở được chia cho 4 người A, B, C, D. Nếu bớt $k$ quyển của A, thêm $k$ quyển của B, gấp đôi của C và chia đôi của D thì số vở của bốn người là bằng nhau. Hãy tìm số vở được chia của mỗi người.

**Lời giải**

Theo bài ra ta có $0<n,k\in\mathbb{N}^*$.

Gọi $x_1, i=1,2,3,4$ là số sách được chia cho bốn người $\left(0<x_i\in\mathbb{N}^*\right)$.

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ \ x_3+x_4=n \\ x_1-x_2\qquad\quad\ =2k \\ x_1\qquad -2x_3\quad\ =k \\ \qquad\quad\ 4x_3-x_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+5x_3=n \\ x_1-x_2\qquad =2k \\ x_1\qquad -2x_3=k. \end{cases} \quad (3)$$

Giải hệ (3) ta nhận được các nghiệm:

$$x_1=\frac{2n}{9}+k,\ x_2=\frac{2n}{9}-k,\ x_3=\frac{n}{9},\ x_4=\frac{4n}{9}.$$

**Bài 10.** (*Kỷ yếu Olympic 2022*). Để chọn ra đội tuyển Olympic từ 25 sinh viên trong lớp, một đề thi gồm 3 bài A, B, C được đưa ra. Biết rằng:

i. Mỗi em sinh viên đều giải được ít nhất 1 trong 3 bài đó.

ii. Trong số sinh viên không giải được bài A, thì số sinh viên giải được bài B nhiều gấp 2 lần số sinh viên giải được bài C.

iii. Số sinh viên chỉ giải được bài A nhiều hơn số sinh viên giải được bài A thêm ít nhất 1 bài khác là 1 người.

iv. Số sinh viên chỉ giải được bài A bằng số sinh viên chỉ giải được bài B cộng với số sinh viên chỉ giải được bài C.

Hỏi có bao nhiêu sinh viên chỉ giải được bài B?

**Lời giải**

Gọi $a$ là số sinh viên chỉ giải được bài A,

$b$ là số sinh viên chỉ giải được bài B,

$c$ là số sinh viên chỉ giải được bài C.

Gọi $x_{bc}$ là số sinh viên giải được cả bài B và C nhưng không giải được bài A.

Điều kiện: $a$, $b$, $c$, $x_{bc}$ là các số tự nhiên.

Số sinh viên giải được bài A và thêm ít nhất 1 bài khác là: $25-a-b-c-x_{bc}$.

Từ đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} b + x_{bc} = 2\left(c + x_{bc}\right) & (1) \\ a = \left(25 - a - b - c - x_{bc}\right) + 1 & (2) \\ a = b + c. & (3) \end{cases}$$

Từ (1): $b - 2c = x_{bc} \geq 0.$ $(4)$

Thay (3), (4) vào (2): $4b + c = 26.$ $(5)$

Từ (5): c là số tự nhiên chia 4 dư 2, $b \leq 6$.

Kết hợp (4), (5): $9c \leq 26 \Rightarrow c \leq 2$ suy ra $c = 2, b = 6$.

Vậy đáp số: $b = 6$.

**Bài 11.** (*Kỷ yếu Olympic 2022*). Một chiếc ô tô có 4 bánh. Mỗi lốp ở hai bánh trước được sử dụng tối đa 3000 km, mỗi lốp ở hai bánh sau sử dụng được tối đa 4500 km. Nếu có thể thay đổi vị trí giữa lốp trước và lốp sau thì quãng đường lớp nhất xe có thể đi với một bộ 4 lốp là bao nhiêu?

**Lời giải**

Giả sử khi ô tô đi được $a$ km thì ta thực hiện đổi hai lốp trước và 2 lốp sau cho nhau. Sau khi đổi lốp, ô tô đi làm thêm được $b$ km $(a, b \geq 0)$.

Ta có các nhận xét sau:

i. Tại thời điểm đổi lốp thì lốp trước bị hao mòn $\frac{a}{3000}$ lốp và lốp sau bị hao mòn $\frac{a}{4500}$.

ii. Từ thời điểm thay lốp đến thời điểm ô tô đi được quãng đường tối đa thì lốp trước bị hao mòn thêm $\frac{b}{3000}$; lốp sau bị hao mòn thêm $\frac{b}{4500}$.

iii. Để ô tô chạy được quãng đường xa nhất thì cả 4 lốp mòn tối đa cùng một lúc.

Từ các nhận xét trên ta có phương trình:

$$\frac{a}{3000} + \frac{b}{4500} = \frac{a}{4500} + \frac{b}{3000} \Leftrightarrow 3000a + 4500b = 4500a + 3000b = 1.$$

Giải phương trình trên ta có: $a = b = 1800\left(km\right)$.

Vậy quãng đường lớn nhất xe có thể đi là 3600 km.

**Bài 12.** Một trường đại học tuyển sinh được một số lượng sinh viên nhất định và chia số sinh viên này thành 5 chuyên ngành khác nhau. Số sinh viên năm đầu phải học các môn đại cương nên cần mượn sách tại thư viện nhưng sinh viên ở mỗi chuyên ngành mượn số lượng sách khác nhau. Cụ thể như sau:

| | Triết học Mác Lênin | Tâm lý học | Tin học đại cương | Toán cao cấp | Tiếng Anh 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| Chuyên ngành 1 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| Chuyên ngành 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| Chuyên ngành 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| Chuyên ngành 4 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| Chuyên ngành 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Sau đó, thư viện thống kê thì thấy rằng đã có 700 cuốn Triết học Mác Lênin, 550 cuốn Tâm lý học, 120 cuốn Tiếng Anh 1, 200 cuốn Toán cao cấp và 300 cuốn Tin học đại cương được mượn. Hãy xác định số sinh viên của từng chuyên ngành?

**Lời giải**

Gọi số sinh viên của các chuyên ngành 1, 2, 3, 4, 5 lần lượt là $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ $\left(x_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1,5}\right)$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 700 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 550 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 300 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 200 \\ x_3 + x_4 = 120. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: $x_1 = 100, x_2 = 80, x_3 = 70, x_4 = 50, x_5 = 50.$

Vậy số sinh viên của các chuyên ngành 1, 2, 3, 4, 5 lần lượt là 100, 80, 70, 50, 50 sinh viên.

**Bài 13.** (*Kỷ yếu Olympic 2023*). Một nhà máy sử dụng bốn loại vật liệu để sản xuất bốn loại sản phẩm. Định mức về vật liệu cho các sản phẩm được thể hiện qua bảng sau:

| | Vật liệu I | Vật liệu II | Vật liệu III | Vật liệu IV |
|---|---|---|---|---|
| Sản phẩm A | 1 | 3 | 2 | 2 |
| Sản phẩm B | 2 | 2 | 3 | 2 |
| Sản phẩm C | 1 | 2 | 1 | 2 |
| Sản phẩm D | 1 | 2 | 2 | 1 |

Hãy tìm số lượng các loại sản phẩm A, B, C, D khi nhà máy có số lượng các loại vật liệu loại I, II, III, IV lần lượt là 50, 80, 80, 60.

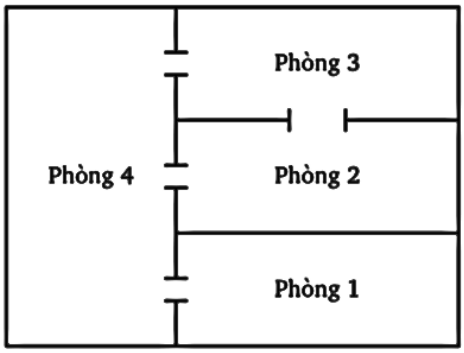
**Lời giải**

Gọi $x, y, z, t$ $(x, y, z, t \in \mathbb{N})$ lần lượt là số lượng sản phẩm A, B, C, D. Khi đó ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x+2y+z+t=50 \\ 3x+2y+2z+2t=80 \\ 2x+3y+z+2t=80 \\ 2x+2y+2z+t=60. \end{cases}$$

Giải hệ ta được nghiệm là $x=0, y=10, z=10, t=20.$ Do đó số lượng sản phẩm A, B, C, D lần lượt là 0, 10, 10, 20 sản phẩm.

**Bài 14.** (*Kỷ yếu Olympic 2024*). Có 200 con muỗi trong một căn hộ gồm 4 phòng với hệ thống cửa nối các phòng như hình vẽ.



Biết rằng, mỗi phút, mỗi con muỗi chỉ ở lại trong phòng nó đang ở hoặc bay sang một phòng bên cạnh. Ngoài ra, người ta thống kê được rằng, với mỗi phòng, có 40% số muỗi ở lại phòng đó, còn trong số muỗi bay ta khỏi phòng thì số lượng muỗi bay sang mỗi phòng bên cạnh đó là bằng nhau. Chẳng hạn, trong số các con muỗi bay từ phòng 3 sang phòng khác, thì có một nửa sang phòng 2, một nửa sang phòng 4.

a. Giả sử sau mỗi phút số muỗi ở các phòng 1, phòng 2, phòng 3 và phòng 4 tương ứng là 24, 50, 52 và 74. Tìm số muỗi ở mỗi phòng tại thời điểm ban đầu.

b. Gọi trạng thái *ổn định* là trạng thái mà kể từ đó trở đi số muỗi ở mỗi phòng đều không đổi. Tìm số lượng muỗi tương ứng của mỗi phòng tại trạng thái ổn định.

**Lời giải**

a. Gọi $a_i$ là số muỗi ban đầu tương ứng của phòng $\left(a_i \in \mathbb{N},\ i \in \{1,2,3,4\}\right)$. Từ giả thiết ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 0,4a_1 + 0,2a_4 = 24 \\ 0,4a_2 + 0,3a_3 + 0,2a_4 = 50 \\ 0,3a_2 + 0,4a_3 + 0,2a_4 = 52 \\ 0,6a_1 + 0,3a_2 + 0,3a_3 + 0,4a_4 = 74. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta nhận được nghiệm $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ với:

$$a_1 = 20, a_2 = 40, a_3 = 60, a_4 = 80.$$

Vậy thời điểm ban đầu số muỗi của các phòng lần lượt là 20, 40, 60,80.

b. Gọi $x_1, x_2, x_3, x_4$ $\left(x_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1,4}\right)$ là số muỗi tương ứng của các phòng 1,2,3,4 ở trạng thái ổn định. Khi đó $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 200$, và sau một phút số muỗi mỗi phòng tương ứng sẽ là $x_1', x_2', x_3', x_4'$ trong đó:

$$\begin{cases} x_1' = 0,4a_1 + 0,2a_4 \\ x_2' = 0,4a_2 + 0,3a_3 + 0,2a_4 \\ x_3' = 0,3a_2 + 0,4a_3 + 0,2a_4 \\ x_4' = 0,6a_1 + 0,3a_2 + 0,3a_3 + 0,4a_4. \end{cases}$$

Từ điều kiện trạng thái ổn định $\left(x_1', x_2', x_3', x_4'\right) = \left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)$ ta có:

$$x_1 = \frac{1}{3}a, x_2 = \frac{2}{3}a, x_3 = \frac{2}{3}a, x_4 = a. \qquad (\textit{với } a \textit{ là một số nào đó})$$

Kết hợp với điều kiện $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 200$, suy ra số muỗi tương ứng của các phòng 1,2,3,4 ở trạng thái ổn định là 25, 50, 50, 75.

**Bài 15.** (*Kỷ yếu Olympic 2024*). Một công ty kinh doanh cây cảnh ở Làng hoa Sa đéc tổng kết hoạt động bốn tháng đầu năm như sau: Trong mỗi tháng công ty trồng thêm 10% tổng số cây xanh hiện có trong tháng trước, đồng thời bán ra được một số cây xanh. Cụ thể trong tháng thứ nhất bán được 100 cây, tháng thứ hai bán được 200 cây, tháng thứ ba bán được 90 cây, tháng cuối cùng bán được 40 cây. Sau bốn tháng, tổng số cây hiện tại trong công ty đã giảm 50 cây so với trước. Hỏi hiện nay công ty có bao nhiêu cây xanh?

**Lời giải**

Gọi $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 (y_i \in \mathbb{N}^*, \mathrm{i} = \overline{0,4})$ lần lượt là số cây ban đầu, sau tháng thứ nhất, thứ hai, thứ ba và thứ tư. Ta có hệ

$$\begin{pmatrix} -11 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 10 \\ 10 & 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1000 \\ -2000 \\ -900 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Giải hệ ta được $y_0 = y_1 = 1000, y_2 = y_3 = 900$. Cuối cùng $y_4 = 950$

**Bài 16.** (*Kỷ yếu Olympic 2024*). Một cửa hàng bán ba loại sản phẩm A, B, C với giá của mỗi sản phẩm là cố định. Có 4 khách hàng đến mua hàng. Số lượng sản phẩm A, B, C mà người thứ hai đã mua tương ứng bằng 1,5 lần, 0,75 lần và 2 lần số sản phẩm người thứ nhất đã mua. Người thứ ba mua một nửa số sản phẩm A mà người thứ nhất đã mua, mua gấp 3 lần số sản phẩm B mà người thứ 2 đã mua và mua số sản phẩm C bằng đúng số lượng sản phẩm C của hai người mua trước cộng lại. Người thứ tư mua 15 sản phẩm A, 30 sản phẩm B và 10 sản phẩm C. Tổng số sản phẩm người thứ nhất mua là 40 và phải trả một số tiền ít hơn người thứ hai 420 000 đồng và cũng ít hơn người thứ ba 1 500 000 đồng. Người thứ tư phải trả số tiền nhiều hơn người thứ ba là 660 000 đồng. Tổng số sản phẩm người thứ hai mua là 55 và tổng số sản phẩm người thứ ba mua là 61. Tính số tiền người thứ nhất phải trả khi mua hàng.

**Lời giải**

Gọi $x_1, x_2, x_3 \left(x_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1,3}\right)$ tương ứng là số sản phẩm A, B, C mà người thứ nhất đã mua.

Số sản phẩm A, B, C mà người thứ hai đã mua tương ứng là $\frac{3}{2}x_1, \frac{3}{4}x_2, 2x_3$.

Số sản phẩm A, B, C mà người thứ ba đã mua tương ứng là $\frac{1}{2}x_1, \frac{9}{4}x_2, 3x_3$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 40 \\ \frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2 + 2x_3 = 55 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{9}{4}x_2 + 3x_3 = 61. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được $x_1 = 20, x_2 = 12, x_3 = 8$.

Gọi $y_1, y_2, y_3$ tương ứng là giá bán của các mặt hàng A, B, C. So sánh sự khác nhau về số lượng từng loại sản phẩm được mua của 4 người ta lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 10y_1 - 3y_2 + 8y_3 = 420000 \\ -10y_1 + 15y_2 + 16y_3 = 150000 \\ -15y_1 + 21y_2 - 6y_3 = 660000. \end{cases}$$

Giải hệ trên theo phương pháp khử Gauss ta thu được $y_1 = 20000$, $y_2 = 60000$, $y_3 = 50000$. Do đó ta tính được số tiền người thứ nhất phải trả khi mua hàng là 1 520000 đồng.

**Bài 17.** (*Kỷ yếu Olympic 2025*). Bốn xí nghiệp nước sạch có nhiệm vụ cung cấp nước sinh hoạt cho một thành phố. Nếu hoạt động bình thường thì tổng sản lượng hàng ngày của bốn xí nghiệp đúng bằng nhu cầu hàng ngày của cả thành phố. Nếu vào một ngày nào đó, một xí nghiệp cần thực hiện công tác bảo dưỡng sửa chữa hệ thống sản xuất theo định kì thì sản lượng hàng ngày của xí nghiệp đó hạ xuống mức 50% và nếu ba xí nghiệp còn lại được sắp xếp theo sản lượng hàng ngày từ cao xuống thấp thì các xí nghiệp này phải tăng sản lượng tương ứng theo các mức 20%, 15%, 10%. Trong những ngày như vậy, nếu tổng sản lượng bị thiếu hụt thì

lượng thiếu hụt (tính theo $1000m^3$) sẽ là 28 hoặc 112; nếu tổng tổng sản lượng dư thừa thì lượng dư thừa (tính theo $1000m^3$) sẽ là 24 hoặc 72. Hãy xác định sản lượng hàng ngày của từng xí nghiệp và nhu cầu nước sinh hoạt hàng ngày của toàn thành phố.

**Lời giải**

Gọi sản lượng hàng ngày của từng xí nghiệp là $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4$ và $x_5$ là nhu cầu nước sinh hoạt hàng ngày của toàn thành phố.

Ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 0,5x_1 + 1,2x_2 + 1,15x_3 + 1,1x_4 - x_5 = -112 \\ 1,2x_1 + 0,5x_2 + 1,15x_3 + 1,1x_4 - x_5 = -28 \\ 1,2x_1 + 1,15x_2 + 0,5x_3 + 1,1x_4 - x_5 = 24 \\ 1,2x_1 + 1,15x_2 + 1,1x_3 + 0,5x_4 - x_5 = 72. \end{cases}$$

Dùng phương pháp khử Gauss suy ra $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (600, 480, 400, 320, 1800)$.

Do đó sản lượng hàng ngày của từng xí nghiệp lần lượt là 600 ngàn, 480 ngàn, 320 ngàn mét khối. Nhu cầu nước sinh hoạt hàng ngày của toàn thành phố là 1,8 triệu mét khối.

**BÀI TẬP LUYỆN TẬP**

**Bài 1.** Theo khảo sát trong sinh viên của trường Đại học Hoa Lư đối với ba quán cafe A, B, C trước cổng trường thì người ta có thông tin về sự thay đổi lượng khách đến quán sau mỗi tuần như bên dưới, cho biết thêm rằng ban đầu, hai quán A, B chưa mở nên 100% khách đều đến C:

- Trong những sinh viên đến quán cafe A, sẽ có 20% người tiếp tục đến A, có 60% người sang B và 20% người sang C.
- Trong những sinh viên đến quán cafe B, sẽ có 10% người sang A, có 40% người tiếp tục đến B và 50% người sang C.
- Trong những sinh viên đến quán cafe C, sẽ có 70% người sang A, có 20% người sang B và 10% người tiếp tục đến C.

Tính tỷ lệ phần trăm những người đến quán A, B, C sau 1 tháng (4 tuần) và hãy cho biết thị phần ổn định của các quán sau khi hoạt động trong thời gian đủ lâu.

**Bài 2.** Một công ty bánh kẹo sản xuất 5 loại bánh: Bánh quy X, Bánh bông lan Y, Bánh su kem Z, Bánh mì M và Bánh tart N. Mỗi loại bánh phải trải qua 5 công

đoạn: Trộn bột, Nướng, Làm nguội, Trang tri và Đóng gói với thời gian cần thiết cho mỗi công đoạn như trong bảng sau:

| Loại bánh | Trộn bột | Nướng | Làm nguội | Trang trí | Đóng gói |
|---|---|---|---|---|---|
| Bánh quy X | 1 giờ | 1 giờ | 1 giờ | 1 giờ | 1 giờ |
| Bánh bông lan Y | 2 giờ | 3 giờ | 2 giờ | 2 giờ | 1 giờ |
| Bánh su kem Z | 4 giờ | 5 giờ | 3 giờ | 2 giờ | 1 giờ |
| Bánh mì M | 6 giờ | 7 giờ | 4 giờ | 3 giờ | 1 giờ |
| Bánh tart N | 8 giờ | 9 giờ | 5 giờ | 4 giờ | 1 giờ |

Các bộ phận Trộn bột, Nướng, Làm nguội, Trang trí và Đóng gói có số giờ làm việc tối đa trong một tuần lần lượt là 281, 340, 205, 166 và 70 giờ. Công ty muốn thiết kế kế hoạch sản xuất sao cho toàn bộ công suất của các bộ phận được sử dụng hết. Hỏi mỗi loại bánh cần sản xuất bao nhiêu chiếc trong một tuần lễ?

**Bài 3.** Giả sử ban đầu học sinh các trường phổ thông ở phường Uông Bí, tỉnh Quảng Ninh chỉ mua bánh mì của Công ty A. Sau đó Công ty B cũng tham gia vào việc cung cấp bánh mì cho thị trường này. Nghiên cứu cho thấy sau mỗi quý (3 tháng) có 30% khách hàng của Công ty A chuyển sang dùng sản phẩm của Công ty B, số còn lại vẫn dùng của Công ty A. Đồng thời có 40% khách hàng của Công ty B chuyển sang dùng của Công ty A, số còn lại vẫn dùng của Công ty B.

a. Hỏi sau 18 tháng kể từ khi Công ty B tham gia vào thị trường, tỉ lệ khách hàng (trên tổng số học sinh của toàn phường Uông Bí) mua bánh mì của mỗi công ty tương ứng là bao nhiêu?

b. Giám đốc Công ty A quyết định sẽ ngừng kinh doanh mặt hàng bánh mỳ nếu tỉ lệ số khách hàng của họ (trên tổng số) ít hơn 50%. Hỏi với số liệu như trên, Công ty A có thời điểm nào cần quyết định ngừng kinh doanh mặt hàng này hay không? Tại sao?

**Bài 4.** Anh Khang đang thiết kế một phần ăn SmartMeal gồm cơm gạo lứt, ức gà, trứng gà, sữa tươi và đậu phụ. Anh muốn đảm bảo rằng phần ăn này cung cấp chính xác 63,5 g protein, 55,7 g carbohydrate, 22,32 g chất béo, 343 mg canxi, và 5,85 mg sắt mỗi ngày. Biết rằng mỗi phần cơm gạo lứt chứa 5 g protein, 45 g carb, 2 g fat, 30 mg canxi và 0,5 mg sắt; ức gà chứa 31 g protein, 0 g carb, 3,6 g fat, 15 mg canxi và 1 mg sắt; trứng gà chứa 13 g protein, 1 g carb, 10 g fat, 50 mg canxi và 1,5 mg sắt; sữa tươi chứa 8 g protein, 12 g carb, 8 g fat, 120 mg canxi và 0,2

mg sắt; đậu phụ chứa 10 g protein, 4 g carb, 5 g fat, 0,2 g canxi và 3 mg sắt. Hỏi Anh Khang cần dùng bao nhiêu phần mỗi loại thực phẩm để tạo nên phần ăn SmartMeal đáp ứng đúng yêu cầu về dinh dưỡng như trên?

**Bài 5.** Một cửa hàng bán ba loại nước uống: nước ép cam, nước ép dứa và nước ép xoài với giá cố định cho mỗi loại. Trong một ngày, có bốn khách hàng đến mua hàng. Khách thứ nhất mua tổng cộng 30 chai ba loại nước. Khách thứ hai mua gấp đôi số chai nước ép cam, bằng $\frac{2}{3}$ số chai nước ép dứa và nhiều hơn 2 chai nước ép xoài so với khách thứ nhất, tổng cộng 36 chai. Khách thứ ba mua số chai nước ép cam bằng một nửa tổng số chai nước ép cam của hai người đầu, số chai nước ép dứa bằng tổng số chai nước ép dứa của hai người đầu và số chai nước ép xoài nhiều hơn 1,5 lần tổng số chai nước ép xoài của hai khách đầu tiên, tổng cộng 87 chai. Khách thứ tư mua 12 chai nước ép cam, 20 chai nước ép dứa và 18 chai nước ép xoài. Biết rằng khách thứ nhất trả ít hơn khách thứ hai 76 000 đồng, khách thứ ba trả nhiều hơn khách thứ nhất 1 044 000 đồng và khách thứ tư trả nhiều hơn khách thứ hai 252 000 đồng. Hỏi khách thứ nhất đã phải trả bao nhiêu tiền khi mua hàng?

**Bài 6.** Một công ty chuyên sản xuất ba loại linh kiện điện tử A, B và C với bốn phân xưởng X, Y, Z và T, mỗi phân xưởng có năng suất ổn định hàng ngày. Trong điều kiện bình thường, tổng sản lượng của bốn phân xưởng vừa đủ đáp ứng nhu cầu tiêu thụ mỗi ngày trên thị trường. Tuy nhiên, để nâng cấp dây chuyền sản xuất, công ty có kế hoạch luân phiên cho mỗi phân xưởng nghỉ một ngày mỗi tuần để lắp đặt thiết bị mới. Trong những ngày như vậy, ba phân xưởng còn lại sẽ phải tăng công suất để bù đắp phần thiếu hụt. Cụ thể, phân xưởng có năng suất cao nhất trong ba phân xưởng còn lại sẽ tăng 30%, phân xưởng thứ hai tăng 20% và phân xưởng có năng suất thấp nhất tăng 10% so với mức bình thường. Qua ghi nhận thực tế, người ta thấy rằng: khi phân xưởng X nghỉ, tổng sản lượng là 1675 linh kiện; khi phân xưởng Y nghỉ, là 1844 linh kiện; khi Z nghỉ là 1940 linh kiện và khi T nghỉ thì tổng sản lượng đạt 2061 linh kiện. Trong cả bốn trường hợp, tổng sản lượng luôn vượt đúng 40 linh kiện so với nhu cầu thị trường. Hỏi mỗi phân xưởng có năng suất hàng ngày là bao nhiêu và nhu cầu tiêu thụ linh kiện mỗi ngày trên thị trường là bao nhiêu chiếc?

**Bài 7.** Trong một buổi kiểm tra kỹ năng thực hành của Câu lạc bộ Tin học, 25 học viên được yêu cầu thực hiện ba dự án: Thiết kế Web (W), Lập trình ứng dụng (P)

và Phân tích dữ liệu (D). Mỗi học viên đều hoàn thành ít nhất một trong ba dự án. Đặc biệt, trong số những học viên không làm được dự án Web, số người hoàn thành dự án Lập trình ứng dụng gấp đôi số người hoàn thành dự án Phân tích dữ liệu. Ngoài ra, số học viên chỉ hoàn thành dự án Web nhiều hơn số học viên làm được Web và ít nhất một dự án khác đúng một người. Đồng thời, số học viên chỉ hoàn thành dự án Web đúng bằng tổng số học viên chỉ làm được Lập trình ứng dụng và chỉ làm được Phân tích dữ liệu. Hỏi có bao nhiêu học viên chỉ làm được dự án Lập trình ứng dụng?

**Bài 8.** Một trung tâm sách cũ tại thành phố Huế theo dõi lượng sách tồn kho trong bốn tháng đầu năm. Mỗi tháng, trung tâm thu mua thêm một lượng sách bằng một phần ba số sách hiện có ở tháng trước, đồng thời bán ra một lượng sách nhất định. Cụ thể, trong tháng thứ nhất trung tâm bán được 230 cuốn sách, tháng thứ hai bán 240 cuốn, tháng thứ ba bán 90 cuốn và tháng thứ tư bán 100 cuốn. Sau bốn tháng, tổng số sách còn lại tại trung tâm giảm 90 cuốn so với ban đầu. Hỏi hiện tại trung tâm còn bao nhiêu cuốn sách?

**Bài 9.** Một công ty Cổ phần Sữa Việt Nam (Vinamilk) có hai chi nhánh: Chi nhánh A ở thành phố Hồ Chí Minh và Chi nhánh B ở thành phố Hà Nội. Hằng năm, có 40% nhân viên từ Chi nhánh B được điều chuyển lên làm việc tại Chi nhánh A, trong khi đó có 10% nhân viên từ Chi nhánh A được luân chuyển ngược lại về Chi nhánh B để đào tạo. Giả sử ban đầu số nhân viên ở Chi nhánh B là $x$ người và ở Chi nhánh A là $y$ người. Hỏi sau $n$ năm, số nhân viên ở mỗi chi nhánh sẽ là bao nhiêu?

## Kết luận chương 2

Trong chương 2 đã trình bày và phân loại một số dạng bài toán tiêu biểu về hệ phương trình tuyến tính thường gặp trong các kỳ thi Olympic Toán học sinh viên và học sinh. Thông qua việc hệ thống hóa, giải và biện luận các bài toán cụ thể, chương góp phần minh họa rõ nét việc vận dụng các phương pháp lý thuyết đã trình bày ở chương 1 vào thực tiễn giải toán. Kết quả đạt được không chỉ giúp củng cố kiến thức đại số tuyến tính mà còn rèn luyện tư duy logic, khả năng phân tích và kỹ năng giải quyết vấn đề cho người học.

# KẾT LUẬN - KIẾN NGHỊ

## 1. Kết luận

Đề tài đã phân loại các dạng bài hệ phương trình tuyến tính thường gặp trong kỳ thi Olympic Toán học sinh viên và học sinh, tổng hợp, diễn giải và minh hoạ các công cụ giải. Cụ thể, báo cáo đã làm rõ các nhóm bài tập đặc trưng (hệ nghiệm duy nhất, hệ vô số nghiệm, hệ vô nghiệm, hệ chứa tham số và các bài toán quy về hệ tuyến tính trong mô hình thực tế), trình bày các định lý nền tảng và mô tả các phương pháp lời giải trọng điểm kèm theo các minh chứng, thuật toán và bước giải mẫu có hệ thống.

Đề tài đã biên soạn một kho bài tập có chọn lọc phân theo mức độ, mỗi bài có hướng dẫn giải chi tiết hoặc định hướng phương pháp giải hợp lý. Qua quá trình soạn thảo và giải mẫu, đề tài cũng thể hiện tính chặt chẽ trong phương pháp tiếp cận, từ cách nhận dạng dạng bài, lựa chọn công cụ giải tối ưu đến việc kiểm tra điều kiện tương thích và phân tích cấu trúc nghiệm, đáp ứng yêu cầu bồi dưỡng, ôn luyện chuyên sâu.

## 2. Kiến nghị

Đưa tài liệu vào sử dụng làm tài liệu tham khảo trong quá trình bồi dưỡng sinh viên tham gia kỳ thi Olympic Toán học sinh viên và học sinh.

Tiếp tục mở rộng hướng nghiên cứu từ hệ phương trình tuyến tính sang các dạng hệ phương trình phức tạp hơn đồng thời nghiên cứu sâu hơn về các phương pháp giải hiện đại nhằm đa dạng hóa kiến thức và rèn luyện khả năng tư duy tổng hợp.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO


[1] *Kỷ yếu kỳ thi Olympic Toán học sinh viên và học sinh.*

[2] Ngô Việt Trung (2002). *Giáo trình Đại số tuyến tính,* NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[3] Lê Tuấn Hoa (2006). *Đại số tuyến tính qua các ví dụ và bài tập,* NXB ĐHQG Hà Nội.

[4] Ngô Thúc Lanh (1970). *Đại số tuyến tính,* NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp.

[5] Nguyễn Hữu Việt Hưng (2000). *Đại số tuyến tính,* NXB ĐHQG Hà Nội.

[6] Nguyễn Tiến Quang, Lê Đình Nam (2014). *Cơ sở Đại số tuyến tính,* NXB giáo dục Việt Nam.

[7] Nguyễn Duy Thuận (2003). *Đại số tuyến tính,* NXB Đại học sư phạm.

[8] Mỵ Vinh Quang (2004). *Đại số tuyến tính.*